



**LA MODELACIÓN MATEMÁTICA COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA EL
APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE DERIVADA**

JONNATHAN MUÑOZ CUBILLOS

Asesora:

Paula Liliana Giraldo Aristizabal

**FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MANIZALES
2017**

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	8
1. PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	8
2. JUSTIFICACIÓN.....	10
3. HIPÓTESIS	11
4. OBJETIVOS	12
4.1 Objetivo general	12
4.2 Objetivos específicos.....	12
5. MARCO REFERENCIAL	13
5.1 Antecedentes	13
5.2 Marco teórico	16
5.2.1 Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	17
5.2.2 La modelación matemática como estrategia didáctica	19
5.2.3 Concepto de derivada	24
6. DISEÑO METODOLÓGICO.....	25
6.1 Enfoque y tipo de investigación	25
6.2 Población y muestra	25
7. PROPUESTA	26
7.1 Saberes previos	27
7.2 Intervención docente	27
7.3 Formación del concepto de derivada como razón de cambio	27
7.3.1 Interpretación geométrica del cociente incremental	29
8. RESULTADOS Y ANÁLISIS	31
8.1 Análisis de Brenda.....	31
8.1.1 Pre-test (Saberes previos)	31
8.1.2 Experimentación cinemática	34
8.1.3 Post-test (Aplicación nuevamente de saberes previos)	44
8.2 Análisis de Laura	49
8.2.1 Pre-test (Saberes previos)	49
8.2.2 Experimentación cinemática	52
8.2.3 Post-test (Aplicación nuevamente de saberes previos)	57
8.3 Análisis de María Fernanda	61
8.3.1 Pre-test (Saberes previos)	61

8.3.2 Experimentación cinemática	64
8.3.3 Post-test (Aplicación nuevamente de saberes previos)	73
8.4 Análisis de Valeria	79
8.4.1 Pre-test (Saberes previos)	79
8.4.2 Experimentación cinemática	81
8.4.3 Post-test (Aplicación nuevamente de saberes previos)	87
8.5 Consideraciones generales del análisis y evaluación de resultados	92
9. CONCLUSIONES	96
10. ANEXOS	97
10.1 Anexo 1	97
10.2 Anexo 2	100
11. REFERENCIAS	109

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Propuesta general de la investigación.....	26
Figura 2 Gráfica de la función $y = f(x)$	28
Figura 3. Tablas construidas por Brenda y Laura de distancia vs tiempo (a) masa colgante de 250g, (b) masa colgante de 500g y (c) masa colgante de 800g	35
Figura 4. Gráficos distancia (cm) vs tiempo (s) realizados por Brenda y Laura en https://www.generadordegraficos.com/ para las tres masas colgantes usadas en el experimento.....	36
Figura 5. Tablas construidas por Brenda y Laura de velocidad vs tiempo (a) masa colgante de 250g, (b) masa colgante de 500g y (c) masa colgante de 800g.	37
Figura 6. Gráficos velocidad (cm/s) vs tiempo (s) realizados por Brenda y Laura en https://www.generadordegraficos.com/ para las tres masas colgantes usadas en el experimento.....	38
Figura 7. Tablas construidas por Brenda y Laura de velocidad vs tiempo (a) masa colgante de 250g, (b) masa colgante de 500g y (c) masa colgante de 800g.	40
Figura 8. Gráficos aceleración (cm/s ²) vs tiempo (s) realizados por Brenda y Laura en https://www.generadordegraficos.com/ para las tres masas colgantes usadas en el experimento.....	40
Figura 9. Respuesta de Brenda a la pregunta 8 del pos-test.....	45
Figura 10. Gráfico distancia (cm) vs velocidad (m/s) realizado por Brenda en https://www.generadordegraficos.com/ para dar respuesta a la última pregunta del post-test	46
Figura 11. Respuesta de Brenda a las dos últimas preguntas del punto 9 del pos-test....	48
Figura 12. Respuesta de Laura a la pregunta 8 del pos-test.	58
Figura 13. Gráfico distancia (cm) vs velocidad (m/s) realizado por Laura en https://www.generadordegraficos.com/ para dar respuesta a la última pregunta del post-test	59
Figura 14. Respuesta de Laura a las dos últimas preguntas del punto 9 del pos-test.	60
Figura 15. Tablas construidas por María Fernanda y Valeria de distancia vs tiempo (a) masa colgante de 250g, (b) masa colgante de 500g y (c) masa colgante de 800g.....	65
Figura 16. Gráficos distancia (cm) vs tiempo (s) realizados por María Fernanda y Valeria en Excel para las tres masas colgantes usadas en el experimento	66

Figura 17. Tablas construidas por María Fernanda y Valeria de velocidad vs tiempo (a) masa colgante de 250g, (b) masa colgante de 500g y (c) masa colgante de 800g	67
Figura 18. Gráficos velocidad vs tiempo realizados por María Fernanda y Valeria en Excel para las tres masas colgantes usadas en el experimento	67
Figura 19. Tablas construidas por María Fernanda y Valeria de aceleración vs tiempo (a) masa colgante de 250g, (b) masa colgante de 500g y (c) masa colgante de 800g	69
Figura 20. Gráficos distancia vs tiempo realizados por María Fernanda y Valeria en Excel para las tres masas colgantes usadas en el experimento.	70
Figura 21. Respuesta de María Fernanda a la pregunta 8 del pos-test.....	74
Figura 22. Gráfico distancia (m) vs velocidad (m/s) realizado por María Fernanda en Excel para dar respuesta a la última pregunta del post-test.....	76
Figura 23. Respuesta de María Fernanda a las dos últimas preguntas del punto 9 del pos-test.....	77
Figura 24. Respuesta de Valeria a la pregunta 8 del pos-test.....	88
Figura 25. Gráfico distancia (m) vs velocidad (m/s) realizado por Valeria en Excel para dar respuesta a la última pregunta del post-test.....	90
Figura 26. Respuesta de Valeria a las dos últimas preguntas del punto 9 del pos-test. ...	90
Figura 27. Evaluación de resultados de Brenda.....	93
Figura 28. Evaluación de resultados de Laura	93
Figura 29. Evaluación de resultados de María Fernanda	94
Figura 30. Evaluación de resultados de Valeria	94
Figura 31 Distancia recorrida vs tiempo transcurrido	99
Figura 32 Esquema ilustrativo del montaje experimental y sus principales elementos ...	101

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Ventajas y desventajas de la modelación matemática como estrategia didáctica (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012).....	23
Tabla 2. Niveles de desempeño para la evaluación de resultados.....	92
Tabla 3 Distancia de parada para diferentes velocidades	99

INTRODUCCIÓN

La educación matemática representa uno de los desafíos más grande dentro de la educación formal. Los índices de fracaso escolar en matemáticas son siempre de los más altos. Esta situación en Colombia se presenta desde hace muchos años y a la fecha no se ha podido contrarrestar este fenómeno tan marcado tanto a nivel de educación básica, media y superior. Una de las posibles causas está asociada a la descontextualización de las matemáticas en la educación (Riveros, 2015). Los estudiantes estudian matemáticas pero no saben para qué. Las prácticas de enseñanza en matemáticas tienden a ser tradicionales, memorísticas y no permiten que los estudiantes lleguen a una reflexión y a un acercamiento de sus propias realidades para que puedan desarrollar un aprendizaje significativo, logrando de esta manera relacionar las matemáticas con otras disciplinas del conocimiento (Socas, citado en Moreno, 2014; Lozano, 2003; Artigue, 2004)

Tratando de contrarrestar esta situación han surgido diferentes estrategias didácticas dentro de las cuales se destaca la modelación matemática que permite que los estudiantes tengan un acercamiento a la reflexión y a la metacognición (Burón citado por Peñalva, 2010 y Herrera, Montenegro y Poveda, 2012). En este sentido, la modelación matemática permite llevar esta área del conocimiento a concebir los fenómenos reales, analizar y describir situaciones físicas desde la concepción matemática (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012). En concordancia con este pensamiento, en el presente trabajo de investigación se desarrolló un estrategia didáctica basada en al modelación matemática para aprender el concepto de derivada como razón de cambio usando la experimentación cinemática. El trabajo se desarrolló en educación media considerando que el concepto de derivada es uno de los más importantes dentro del cálculo diferencial pero no se trabaja en el grado undécimo desde su aplicación, situación que lleva a que los estudiantes terminen la educación media considerando que lo visto en sus últimos años (grado undécimo) no tiene una importancia mayúscula en su formación académica.

La estrategia utilizada resultó ser acertada y exitosa, las estudiantes mostraron un interés mayor por el desarrollo y aprendizaje de los conceptos que en una clase tradicional de matemáticas. La visualización matemática de fenómenos físicos permitió que las estudiantes se acercaran a la descripción matemática de un comportamiento y pudieran modelar a nivel escolar un fenómeno físico. De esta forma aproximarse a fenómenos reales

posibilitó el análisis, la descripción y entender el significado de objetos simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos. Todo esto desde la modelación matemática y el aprendizaje del concepto de derivada como razón de cambio.

1. PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Las matemáticas representan uno de los mayores dolores de cabeza dentro de la educación formal por el alto índice de fracasos escolares que arroja esta área del conocimiento. Los estudiantes en un porcentaje mayoritario piensan que las matemáticas son una ciencia abstracta lejana de la realidad que los rodea. Las matemáticas han sido consideradas vitales para el desarrollo y funcionamiento de la sociedad, así como esencial en la formación integral de las personas, constituyéndose en elemento presente desde temprana edad (Mora, 2003; Jimeno, 2006; Oliveros, 2011). Sin embargo, las dificultades en su aprendizaje además de generar bajo rendimiento académico, son causa de deserción escolar y exclusión social, ya que contribuye a la expulsión del sistema educativo (Rivas, 2005).

Dentro del acercamiento a la Institución Ciudadela Educativa la Presentación de la ciudad de Cali, se identificaron algunos aspectos que atentan contra el aprendizaje matemático, los cuales tienen que ver con deficiencias en la práctica pedagógica o situaciones didácticas inapropiadas y esto es un denominador común según lo reportado por Socas, citado en Moreno, 2014; Lozano, 2003; Artigue, 2004. Estas prácticas son tradicionales, memorísticas y no permiten que los estudiantes lleguen a una reflexión y a un acercamiento de sus propias realidades para que puedan desarrollar un aprendizaje significativo, logrando de esta manera relacionar las matemáticas con otras disciplinas del conocimiento. Aunque se han hecho intentos desde lo pedagógico y didáctico para llegar a otro tipo de metodologías más constructivistas centradas en el estudiante aún se presenta al docente como el centro del proceso de aprendizaje y le impiden al estudiante la construcción individual y colectiva del conocimiento, y por lo tanto, su comprensión, aplicación y socialización (Biembengut y Hein, 2004). Este tipo de práctica pedagógica se ha impuesto de forma mecánica e irreflexiva (Rivas, 2005) de manera histórica y aún se observa en los centros educativos.

En Colombia dentro de los derechos básicos de aprendizaje para el grado once, se establecen algunos, que desde el enfoque de este trabajo son muy importantes, en el documento de Colombia aprende se plantea de la siguiente forma en los numerales 4, 5, 6 y 13 respectivamente.

- *Reconoce la derivada de una función como la función de razón de cambio instantáneo (p.1)*
- *Conoce las fórmulas de las derivadas de funciones polinomiales, trigonométricas, potencias, exponenciales y logarítmicas y las utiliza para resolver problemas. (p. 1)*
- *Modela situaciones haciendo uso de funciones definidas o a trozos. (p. 2)*
- *Razona geométrica y algebraicamente para resolver problemas y para encontrar fórmulas que relacionan magnitudes en diversos contextos. (p. 3)*

Dentro de estos se destacan las siguientes categorías: reconocer, resolver problemas, modelar y razonar. Por lo tanto, cualquier estrategia didáctica debería apuntar a que el estudiante aprenda a reconocer, resolver problemas, modelar y razonar. El formalismo matemático que es muy implementado por los docentes de esta área en muchas ocasiones lleva consigo mismo un lenguaje complejo y de difícil apropiación por parte de los estudiantes. En la enseñanza tradicional y desde lo observado en la institución de análisis el formalismo matemático muchas veces atenta contra el objetivo principal que busca una estrategia didáctica bien diseñada, el aprendizaje significativo. Por lo tanto, en el presente trabajo se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué incidencia tiene la modelación matemática como estrategia didáctica en el aprendizaje del concepto de derivada?

2. JUSTIFICACIÓN

Una de las líneas de investigación de mayor auge en educación matemática en los últimos años es la modelación matemática ya que permite a los estudiantes poder entender un fenómeno y describirlo matemáticamente. El concepto de derivada es uno de los más usados en diferentes áreas del conocimiento por su gran aplicación desde los fenómenos sociales hasta los desarrollos de alta ingeniería. El entendimiento del concepto de la derivada a través de la modelación matemática puede permitir entre otras cosas que el estudiante vea con agrado cómo las matemáticas tienen una aplicación directa en la vida diaria, además entender que no se necesita todo el formalismo matemático para asimilar conceptos de matemáticas avanzadas de una forma sencilla. Con esto se puede lograr que los estudiantes de grado once puedan reconocer en la fase terminal de su formación media la importancia y aplicación de las matemáticas en su vida diaria. Un alto índice de los estudiantes del colegio Ciudadela la Presentación tiene aspiraciones de ingresar a instituciones de educación superior, muchas de ellas desean aplicar a becas universitarias que requieren un excelente desempeño en todas las áreas, principalmente en matemáticas, con este trabajo se puede lograr que las estudiantes del grado once pueden lograr tener éxito en sus aspiraciones de acceso a la universidad.

3. HIPÓTESIS

La modelación matemática permite que los estudiantes puedan ver las matemáticas desde el punto de vista de su aplicación y no desde el formalismo matemático, logrando así incrementar el interés por esta área del conocimiento. Reconocer la importancia de las matemáticas en el mundo que los rodea a partir del concepto matemático de deriva sería un gran paso hacia la construcción de un aprendizaje significativo de las matemáticas.

4. OBJETIVOS

4.1 Objetivo general

- Analizar la incidencia de la modelación matemática como estrategia didáctica en el aprendizaje del concepto derivada de las estudiantes del grado once de la institución educativa ciudadela la presentación de la ciudad de Cali.

4.2 Objetivos específicos

- Diseñar una estrategia didáctica usando la modelación matemática para enseñar el concepto de derivada a las estudiantes del grado once de la institución educativa ciudadela la presentación de la ciudad de Cali.
- Implementar la estrategia didáctica diseñada con las estudiantes del grado once del colegio ciudadela educativa la presentación de la ciudad de Cali
- Evaluar el impacto de la estrategia en el grupo de análisis.

5. MARCO REFERENCIAL

5.1 Antecedentes

La revisión de las investigaciones realizadas a nivel regional, nacional e internacional, permiten identificar a tipo de antecedentes una serie de estudios que desde la consideración del autor son importantes para soportar el trabajo que se desarrolla en torno a la educación matemática más precisamente respecto a la modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza-aprendizaje de esta área del conocimiento.

En este orden de ideas se pueden destacar algunos trabajos.

- *“El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los lineamientos curriculares colombianos”* (Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio y Osorio, 2008)
- *“Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”* (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012)
- *“La modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje: El caso del área bajo la curva”* (Peña-Páez y Morales-García, 2016)
- *“La modelación matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial”* (García, 2004)
- *“Modelización de la realidad como estrategia didáctica para la enseñanza de ecuaciones lineales en el grado noveno”* (Zapata, Villa y Calderón, 2015)
- *“La modelación: una posibilidad para desarrollar la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen en estudiantes de grado 9º”* (Agudelo y García, 2013)
- *“Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en educación secundaria obligatoria”* (Gómez, García, Sierra y Blanco, 2011)

- *“Modelos conceptuales de profesores de educación básica sobre las matemáticas y su enseñanza”* (Muñoz y García, 2015)
- *“Incidencia de las representaciones múltiples en la formación del concepto transporte celular en estudiantes universitarios”* (Alvarez y Tamayo, 2012)

En estos trabajos el aporte principal es la modelación matemática para la enseñanza-aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos. En el trabajo de Peña-Páez y Morales-García del 2016 se establece la modelación matemática para enseñar el caso del área bajo la curva, una forma de entender las integrales definidas. Aquí se concluye que *“involucrar a los estudiantes en experimentos pedagógicos, con tareas enfocadas hacia la modelación matemática, les brinda la posibilidad de poner en juego todas las competencias propias de la matemática y a buscar estrategias para la resolución de problemas propuestos”*. Esto indica que la modelación matemática les permite a los estudiantes resolver problemas y además construir conocimiento, uno de los fundamentos del aprendizaje significativo y a profundidad.

Así mismo en el trabajo de Zapata, Villa y Calderón el enfoque es a percibir la realidad que nos rodea para poder entender las ecuaciones lineales. En esta dirección está el trabajo de Agudelo y García, donde se concluyó que *“el trabajo llevado a cabo por las estudiantes se constituyó en una forma de resolver un problema que era de su interés, esta característica (propia de la modelación) facilitó la participación y la creación de un ambiente de auto-construcción del conocimiento a partir de la interacción entre pares, acompañado por la colaboración de un adulto cuyo objetivo era destacar la intencionalidad matemática de las tareas, promoviendo la explicación de ideas, la profundización y el análisis de los procedimientos. Las estudiantes demostraron flexibilidad en sus raciocinios y en las estrategias para resolver problemas y movilizaron y transfirieron conocimientos de un contexto a otro demostrando autonomía, responsabilidad e interés a lo largo de todo el proceso”*, aquí además de lo mencionado anteriormente se destaca un punto adicional y es el interés, por parte de los estudiantes, en el proceso de aprendizaje cuando la estrategia de enseñanza se basa en la modelación matemática. Todos estos aspectos son también destacados en el trabajo de García.

Por otro lado, a nivel de revisión de las estrategias como elemento esencial en el proceso de aprendizaje se establecen los pro y los contra desde la modelación matemática, este es el caso del trabajo “*Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*” (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012), donde se hace toda una revisión sobre diferentes estrategias mostrando los beneficios de la modelación de matemáticas, pero además muestra algunos aspectos adversos.

En esta dirección se encuentra Villa-Ochoa, Bustamante, Berrio y Osorio (2008), en este trabajo se destaca lo siguiente de la modelación como estrategia didáctica:

- *Se concibe a la Modelación como herramienta para el aprendizaje de las matemáticas ya que proporciona una mejor comprensión de los conceptos matemáticos al tiempo que permite constituirse en una herramienta motivadora en el aula de clase. A pesar de argumentos, la modelación no puede convertirse en la única estrategia para abordar los conceptos matemáticos en el aula de clase.*
- *La modelación matemática potencia el desarrollo de capacidades en el estudiante para posicionarse de manera crítica ante las diferentes demandas del contexto social junto con la capacidad para leer, interpretar, proponer y resolver situaciones problemas.*
- *La modelación matemática como proceso al interior del aula de clase, retoma su estructura de la modelización como actividad científica por tanto se espera que el estudiante alcance a desarrollar cierto grado de motivación y de destrezas frente a dicha actividad*

Todos estos antecedentes muestran que la modelación matemática como estrategia didáctica puede ayudar a contrarrestar algunos de los puntos neurálgicos en el aprendizaje de las matemáticas. Principalmente el tema de la motivación y la búsqueda de un aprendizaje significativo que permita la solución de problemas de manera efectiva.

5.2 Marco teórico

Antes de empezar con los temas de modelación matemática como estrategia didáctica y el concepto de derivada, es importante establecer algunos aspectos sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje desde los conceptos teóricos que se pueden establecer.

La enseñanza y el aprendizaje se concibe como un proceso (Alsina y Domingo, 2010; Aragón Carabeo, Castro Ling, Gómez Heredia, y González Plasencia, 2009). Este proceso se puede ver como un conjunto de eventos que se desarrollan para generar un cambio, y estos pueden ser internos o externos (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012). Los eventos se llevan a cabo en la conciencia o inconsciencia de la persona, tienen que ver con las *“operaciones mentales que favorecen el conocimiento”* (Aragón, Castro, Gómez, y González, (2009), sin embargo, autores como la organización CAPTAS (2009), no le dan importancia a este tipo de procesos, argumentando que *“los procesos internos como la motivación y los pensamientos no son medibles ni observables directamente por lo que no son relevantes para el estudio del aprendizaje”*.

Por otro lado, los eventos externos que forman parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, están relacionados con el medio en el que se desenvuelve el individuo; según Vigotsky, el conocimiento es un proceso de interacción entre el sujeto y el medio, pero el medio entendido como algo social y cultural, no solamente físico; y por su parte, CAPTAS (2009) plantea que *“el aprendizaje es el producto de la relación estímulo-respuesta”*. A partir de estas consideraciones se afirma que el aprendizaje se da en la interacción entre el objeto de aprendizaje y el sujeto que aprende con la intermediación del docente, quien motiva y orienta a partir de la planeación, organización y ejecución de lo que pretende enseñar (Alsina y Domingo, 2010; Pérez O, 2006; Castorina, 1994).

La intermediación de los docentes se presenta en las acciones didácticas, como prácticas y estrategias de enseñanza, pero para ello son necesarias la experimentación, la reflexión, la comprensión y la evaluación continua sobre lo que hacen (Quiceno, 2002; Vilanova, et al., 2001, p. 9). En términos generales, entre las prácticas y las estrategias de enseñanza que algunos autores proponen se encuentran las siguientes:

- Planear las clases de manera colaborativa (López y Toro, 2008, p. 775).

- Generar espacios de diálogo constructivo con el estudiante propiciando la adopción de competencias (Marín, 2005, p. 56)
- Utilizar objetos de aprendizaje que promuevan la construcción, comprensión y aplicación del conocimiento (Aragón, Castro, Gómez, y González, 2009, p. 100)
- Pasar de la preocupación por la corrección de los resultados a la valoración de los procedimientos (Díez y Molina, 2010, pág. 65)
- Implementar actividades de investigación con el fin de construir relaciones matemáticas que describan un fenómeno, objeto o problema (Domínguez, 2010, p. 2; Camarena, 2009; Díaz y Sotolo, 2009; Planchart, 2005; Millán, 2003).

5.2.1 Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Tradicionalmente han existido tres diferentes escuelas del pensamiento para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tales como el conductismo, el constructivismo cognitivo y el constructivismo social.

En el conductismo *“el aprendizaje es el producto de la relación estímulo-respuesta”* (CAPTAS, 2009), también conocida como la didáctica tradicional; es lo que Arredondo, Pérez y Aguirre (2006) y De Zubiría (2004) clasifican como heteroestructurales y se define como maestro centrista; en ella el profesor decide e impone qué enseñar, el aprendizaje proviene de una fuente externa al alumno, quien toma un papel pasivo de receptor (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012).

Desde el constructivismo cognitivo, Santiuste (2011) define el aprendizaje como un conjunto de fenómenos dependiente del contexto que debe ser descrito en términos de las relaciones internas entre el individuo, la cultura y la situación en la que el individuo está inmerso. Esta relación se produce a través de los conocimientos que el sujeto va adquiriendo y que influyen básicamente en los nuevos conocimientos que se le ofrecen; el profesor pasa a ser un orientador y mediador de dichas relaciones (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012). Las estrategias basadas en el constructivismo cognitivos buscan llevar al estudiante a la

metacognición, Burón (citado por Peñalva, 2010) plantea que el concepto de metacognición hace referencia a los mecanismos responsables del conocimiento, es decir, las operaciones mentales (percepción, atención, memorización, análisis, síntesis, comprensión, entre otras) que favorecen el aprendizaje de las ciencias y que son objeto de estudio al evaluar las dificultades y estilos de aprendizaje (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012).

Por su lado, en el constructivismo social, el cual se fundamenta en la relación del individuo con los objetos de estudio y con los demás (Jaramillo, 2005, p. 66; Suriani, 2003) se afirma que *“la práctica de enseñanza, nos remite a otras categorías, como la de práctica social, educativa y docente, es decir, esta se encuentra articulada dentro de la categoría macro de lo social, lo educativo y lo docente”*. En este sentido, es el docente quien está llamado a realizar dicha integración en su actuar cotidiano, y representa la principal mediación en los procesos formativos de los estudiantes; y la calidad de su quehacer está estrechamente relacionada con la posibilidad de contribuir en su desarrollo integral, es decir, en todas y cada una de las *“dimensiones cognitiva, ética, emocional y actitudinal”* (Ordoñez, 2006, p. 278). Desde este enfoque se busca que el proceso pedagógico a través de las matemáticas sea un proceso integral, que no solo lleve al conocimiento disciplinar sino que forme desde las matemáticas a seres integrales.

En términos generales las estrategias constructivistas hacen que el proceso de aprendizaje sea más fácil y permiten llegar al estudiante a un aprendizaje significativo, además favorecen el desarrollo de actitudes positivas, habilidades y destrezas para el trabajo cooperativo, independiente y autónomo (Díaz, 2009).

De acuerdo a Herrera, Montenegro y Poveda (2012) en la utilización de estas estrategias, el docente más que un transmisor de conocimientos debe constituirse en el guía de las actividades de construcción del conocimiento para cada estudiante. Es importante tener en cuenta que para alcanzar la efectividad de este tipo de aprendizaje se hace necesaria, por una parte, la motivación como resultado de la interacción entre el maestro y el alumno, y por otro lado que, el docente propicie situaciones didácticas significativas que generen conflictos cognitivos llamativos e interesantes para el aprendiz, de tal forma que este pueda relacionar la nueva información con conocimientos y experiencias familiares.

5.2.2 La modelación matemática como estrategia didáctica

Las matemáticas, nunca han estado desligadas de la producción y actividad práctica del hombre. Contar y medir no fueron simples pasatiempos, sino actividades vitales para la producción. En el desarrollo de la ciencia, las matemáticas juegan un papel fundamental. Para la física, las matemáticas no es sólo es un lenguaje para expresar ideas, sino que tiene un significado heurístico; es un verdadero método de descubrimiento de verdades nuevas. Así mismo, las matemáticas se han empleado en el estudio de fenómenos biológicos y sociales. La estadística y la probabilidad son instrumentos de gran utilidad en esas áreas (Universidad del Valle, 2016).

Históricamente, el hombre ha buscado dar explicación a fenómenos de diversa naturaleza, desde los físicos hasta los sociales, con el fin de reducir la incertidumbre, proponer soluciones a sus problemas o satisfacer sus necesidades; esto lo ha llevado a explorar el lenguaje común a todas las ciencias, a saber, las matemáticas (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012).

El proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción de las relaciones matemáticas que describen un fenómeno, objeto o problemas, cumpliéndose con condiciones de analogía, es lo que Camarena (2009, p. 20) define como modelación matemática, coincidiendo con autores como Domínguez (2010, p. 2; Planchart (2005); Millán (2003, p. 935); Díaz y Sotolo (2009). Es importante diferenciar y aclarar cuando se habla de modelación matemática los siguientes conceptos:

- Modelo matemático: se refiere a las relaciones matemáticas que describen un fenómeno, objeto o problema (Camarena, 2009, p. 20).
- Modelación matemática: es el proceso cognitivo que lleva a la construcción del modelo (Domínguez, 2010, p. 2; Camarena, 2009, p. 20).
- Simulación: es la experimentación con un modelo matemático para imitar el funcionamiento de un sistema del mundo real (Izquierdo, Galán, Santos y Del Olmo, 2008).

Domínguez (2010) afirma que *“históricamente, la modelación matemática ha sido aplicada desde los tiempos en que aparecieron las ciencias exactas”* (p. 3), si se hace un recorrido retrospectivo en el tiempo se puede apreciar cómo las matemáticas han sido un eje fundamental en el desarrollo no solo de las ciencias naturales sino también de las ciencias sociales, debido particularmente, a la gran precisión y exactitud que brinda al intentar identificar patrones (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012).

Para lograr este acercamiento a la realidad, la modelación matemática como parte de las ciencias formales ha tenido que evolucionar desde *“la analogía mecánica a la analogía matemática”* (Millán, 2003), puesto que, no solo basta con reconocer las formas y movimientos de la naturaleza, sino que es necesario además, identificar sus contenidos, estructuras y comportamientos (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012).

Como se ha venido observando a través del tiempo, *“la creación de modelos y estructuras matemáticas que se establecen como herramientas para solucionar cierto tipo de problemas, vislumbra la necesidad de que el modelo sea de fácil aplicación”* (Romo y Oktaç, 2007, p. 138). Esa simplicidad es lo que ha contribuido con el desarrollo de las ciencias, debido a la eficacia para predecir y describir fenómenos con determinado grado de certeza, obtener soluciones muy rápidas y contribuir con el uso eficiente de los recursos (Díaz y Sotolo, 2009; Baruch, Hernández y Barrera, 2005, p. 117), factores de gran relevancia especialmente para la empresa y para el desarrollo científico de hoy.

En lo que se refiere a la aplicación de las matemáticas, *“la organización industrial representa un contexto a mitad de camino entre, por una parte, la tecnología y la ingeniería, y, por otra, las ciencias humanas y sociales”* (Millán, 2003, p. 931). Para ilustrar esto, se encuentra en la actualidad una gran cantidad de aplicaciones de la modelación matemática. Se mencionan algunos:

- Proceso biotecnológico aerobio de un sistema de fermentación, presentado mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (Baruch, Hernández y Barrera, 2005, p. 117).
- Modelación matemática de una planta para la producción de biodiésel (Díaz y Sotolo, 2009).

- Modelación matemática del secado convencional de madera (Sandoval, 2009, p. 76).
- Modelación matemática del mezclado en ollas (cucharas) de aluminio equipadas con la técnica de desgasificación rotor-inyector (Ramírez, Contreras y González, 2006).
- Modelación matemática del proceso de tratamiento con hidróxido sódico de aceitunas verdes de mesa (Maldonado y Zuritz, 2003).
- Simulación numérica del movimiento de estructuras de control en canales de riego (de León, Prado, Verdier y Fuentes, 2007).
- Proceso productivo de una pequeña empresa usando dinámica de sistemas (Parra, Pérez y Torres, 2006).
- Modelos de toma de decisión en grupo con información lingüística difusa (Cabrerizo, 2008).

Dado el impacto que ha tenido la modelación matemática para el desarrollo de las ciencias, resulta de gran interés el estudio de estrategias didácticas basadas en la modelación para la enseñanza de las matemáticas.

Estas estrategias, históricamente han representado “*un reto para los docentes y un dolor de cabeza para los estudiantes*”; Schubring (2008, p. 383) comenta que “*la matemática escolar se presenta generalmente como algo esencialmente estático, sujeto a pocos cambios*”; este pensamiento tradicionalmente promueve la memorización de procesos matemáticos para la solución de problemas, mas no su comprensión. En la investigación de Barrón, Luna, Estrada, Flores, Estrada y Ramos, 2009, p. 26) se presentan cuatro razones más que dificultan la asimilación de las matemáticas en la enseñanza tradicional, estas dificultades son:

- La abstracción con que se tratan algunos tópicos de las matemáticas, ya que es casi nula la relación existente entre la realidad del mundo en que vivimos con la teoría expuesta.
- La falta del razonamiento lógico en el alumno.
- El método y los recursos de enseñanza que usa el maestro para generar el conocimiento.
- El abuso indiscriminado de la memorización.

En la búsqueda de nuevas alternativas y estrategias didácticas, la implementación del análisis de situaciones reales, junto con *“el uso de la tecnología en el salón de clases, ha permitido replantear la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, generando así modelaciones y simulaciones de la realidad”* (Romo y Oktaç, 2007, p. 140), y se facilitan la comprensión y el aprendizaje que, según (Planchart, 2005), *“es la perspectiva correcta, se da principalmente a partir del medio ambiente hacia las matemáticas y no en la otra dirección”*.

La implementación de la modelación matemática como estrategia didáctica consiste en un proceso de tres etapas, definidas por Domínguez (2010, p. 3), y Camarena (2009, p. 20), en la siguiente forma:

- La definición del modelo: identificar variables y constantes del problema, se incluye la identificación de lo que varía y lo que permanece constante.
- Formulación del algoritmo: establecer relaciones entre las variables y constantes a través de los conceptos involucrados en el problema.
- Desarrollar el programa: validar la “relación matemática” que modela al problema, lo cual se hace a través de regresarse y verificar que involucre a todos los datos, variables y conceptos del problema.

Sin embargo, la modelación matemática como estrategia didáctica presente algunas desventajas. En la Tabla 1 se presenta una comparación entre las ventajas y desventajas que presenta esta estrategia.

Tabla 1. Ventajas y desventajas de la modelación matemática como estrategia didáctica (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012)

Ventajas	Desventajas
Se provoca que el estudiante, al aproximarse a fenómenos reales, analice y describa la significación de objetos: simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos.	La percepción visual es una de las vías de acercamiento a los objetos, pero en algunas ocasiones, ésta puede perturbar la aprehensión del objeto, el cual puede estar determinado por los tipos de imágenes mentales que tengan establecidas los individuos.
Planteamientos más dinámicos en la adquisición del conocimiento.	El avance en el programa de la asignatura es más lento que en el método tradicional.
Permite estudiar las cualidades del proceso original al reemplazo del objeto cognitivo por su imagen matemática.	Exige un mayor trabajo para el maestro.
Se comprende la aplicación real de las matemáticas.	Puede conducir a dar respuestas incorrectas cuando se aprehende el objeto localmente y no globalmente.
El interés que muestra el grupo por la situación que se le presenta es muy superior al que suelen mostrar en el salón de clases.	Previamente es necesario desarrolla habilidades de pensamiento como: identificar lo puntos de control de error, transitar del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa, aplicar heurísticas, identificar regularidades.

En términos generales la modelación matemática como estrategia didáctica es una alternativa importante para la enseñanza de las matemáticas ya que apunta a mejorar muchos de los aspectos negativos que se han identificado a lo largo de la historia en la enseñanza de las matemáticas y que limitan el aprendizaje de esta. Aunque presenta

algunas desventajas, los aspectos positivos son suficientemente fuertes para seguir investigando y aplicando este tipo de estrategia didáctica.

5.2.3 Concepto de derivada

El cálculo diferencial surgió como muchas áreas de las matemáticas a raíz de situaciones problemas. A finales del siglo XVII se dio origen al cálculo diferencial a partir de algunos problemas, tales como el trazado de la tangente a una curva y las condiciones para obtener máximos y mínimos, la velocidad de los cuerpos en movimiento entre otros.

Los primeros matemáticos que abordaron estos problemas fueron Fermat (1601 - 1665) y Descartes (1596 – 1650), quienes crearon procesos para la construcción de las tangentes a una curva en un punto dado (Robayo, 2011)

Newton (1642 – 1727) y Leibniz (1646 – 1716) quienes desarrollaron procedimientos para abordar los problemas enunciados (Robayo, 2011)

Bolzano (1817) fue quien definió por primera vez la derivada como un límite y poco tiempo después Cauchy describió la derivada en su libro *Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal* (1823) *Tercera Lección*, a partir de los aportes de Bolzano (Robayo, 2011)

Aunque matemáticamente la definición de derivada tiene diferentes enfoques e incluso se podría hablar de diferentes definiciones, la definición que lleva como razón de cambio, es una de las definiciones cuya aplicación a problemas de la vida diría afecta diferentes áreas del conocimiento y permiten ver y modelar matemáticamente el mundo que nos rodea. Por lo que en este proyecto el concepto que se quiere trabajar es el concepto de razón de cambio el cual permite una fácil enseñabilidad si se considera una estrategia didáctica basada en la modelación matemática.

Para poder entender la derivada matemáticamente como una razón de cambio se debe presentar la derivada como un cociente de incrementos haciendo uso de conceptos físicos con los cuales los estudiantes estén familiarizados. La propuesta didáctica mostrará en mayor detalle esta parte.

6. DISEÑO METODOLÓGICO

6.1 Enfoque y tipo de investigación

La investigación propuesta es de tipo descriptivo con un enfoque cualitativo, en la que se busca establecer la incidencia de la modelación matemática como estrategia didáctica sobre el concepto de derivada en estudiantes de grado once. En el análisis se puede incorporar las dimensiones cuantitativa y cualitativa en función de lograr una comprensión más detallada de las interacciones entre los conceptos iniciales de los estudiantes y los conceptos enseñados por el docente. De acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006) se establece que la investigación corresponde a un caso de estudio en el cual se hace un diseño de pre-test-pos-test con un solo grupo de análisis para observar los cambios de los estudiantes en cuanto a la formación del concepto estudiado.

6.2 Población y muestra

La población corresponde a estudiantes de grado once del colegio ciudadela la presentación de la ciudad de Cali. En total son 37 estudiantes de último grado del colegio mencionado. Debido a que están finalizando su formación media, las estudiantes tienen múltiples compromisos institucionales y por lo tanto no se puede trabajar con todo el grupo, por lo tanto, la muestra corresponde a una selección aleatoria de cuatro estudiantes con las que se trabaja la propuesta.

7. PROPUESTA

El diseño de la presente propuesta es de pre-test-pos-test con un solo grupo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006); tiene tres tiempos; en este tipo de diseño se pueden identificar los cambios que se dan en el grupo (muestra), pero también permite identificar los cambios individuales de quienes conforman la muestra.

Los tres momentos de la presente propuesta son:

- I. Saberes previos sobre el concepto de derivada.
- II. Intervención docente a través de la estrategia didáctica.
- III. Formación del concepto de derivada como razón de cambio a partir de cociente de incrementos haciendo uso de conceptos físicos con los cuales las estudiantes estén familiarizadas.

En la Figura 1 se muestra en términos generales la propuesta de la presente investigación.

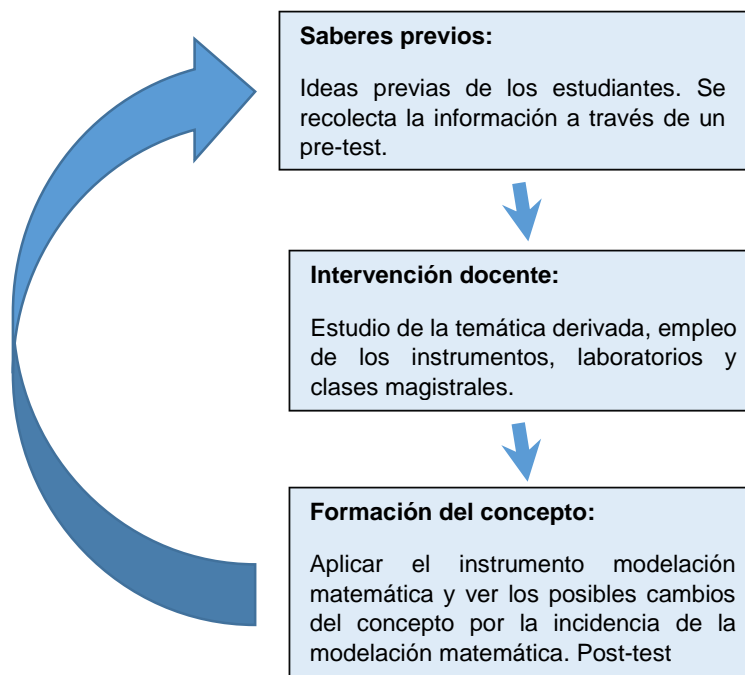


Figura 1. Propuesta general de la investigación

A continuación se presenta una descripción de los diferentes momentos de la propuesta.

7.1 Saberes previos

En esta etapa se aplica un pre-test para conocer los conceptos que tienen las estudiantes sobre el concepto de derivada. La prueba se realiza preguntando desde los conceptos definidos formalmente en matemáticas hasta situaciones problema, donde interviene el concepto de razón de cambio, con un lenguaje cotidiano.

7.2 Intervención docente

La intervención docente, está centrada en una actividad experimental:

- Experimentación cinemática en el laboratorio de física.

Con esto se busca que las estudiantes puedan acercarse a fenómenos con los que conviven a diario y poder dar una explicación matemática de lo que está sucediendo. De esta forma se parte para poder introducir el concepto de derivada como una razón de cambio a partir de un cociente de incrementos.

7.3 Formación del concepto de derivada como razón de cambio

Matemáticamente se puede definir la derivada como el cociente de incrementos entre dos variables. Sea $f(x)$ una función continua. Si se hace variar x la variable y puede crecer con x o decrecer, o pasar de un estado decreciente a otro creciente o viceversa. Como ejemplo se supone la función $y = f(x)$ crezca con la x y sea su gráfica la Figura 2. Considerando un punto A de la curva con coordenadas (x, y) .

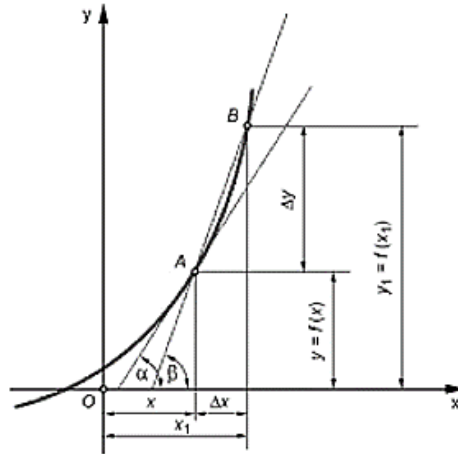


Figura 2 Gráfica de la función $y = f(x)$

Se observa que para un determinado incremento de x , es mayor el incremento de y cuanto mayor es el ángulo α que la tangente en el punto A . Entonces el problema se reduce a buscar la tangente a la curva en un punto.

La variable x pasa de un valor x_0 a otro x_1 , luego la función pasará de un valor y_0 a otro y_1 .

El incremento $x_1 - x_0$ se indicará con el símbolo Δx luego:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

Y el incremento $y_1 - y_0$ se indicará con el símbolo Δy luego:

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

Como y_1 es el valor que toma la función para el valor x_1 se puede escribir:

$$y_1 = f(x_1) \text{ y también } y_1 = f(x_0 + \Delta x).$$

El incremento $\Delta y = y_1 - y_0$, puede entonces expresarse como:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Dividiendo ambos miembros por Δx , se obtiene:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Expresión que recibe el nombre de cociente incremental de la función dada. Si Δx tiende a un número muy pequeño (infinitesimal pequeño) el cociente incremental recibe el nombre de derivada de la función dada.

7.3.1 Interpretación geométrica del cociente incremental

Considerando la Figura 2 de la función $y = f(x)$. Las coordenadas del punto A son (x, y) y del punto B son (x_1, y_1) . Si se traza la secante BA se observa que:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \tan \beta$$

Por lo tanto, el cociente incremental de la función $y = f(x)$ es igual al coeficiente angular de la secante que pasa por A y por B .

Si Δx es una cantidad muy pequeña, el punto B se acerca indefinidamente al punto A luego la secante tiende a ser la tangente de α en A . Luego:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \tan \beta = \tan \alpha$$

“La derivada de una función $y = f(x)$, en un punto A cualquiera, es la tangente trigonométrica del ángulo de la recta tangente que se forma en ese punto y el eje x ”.

Es decir:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \tan \alpha$$

Esta definición permite ver que la derivada es la pendiente de una recta.

El desafío de la presente estrategia didáctica será mostrar el concepto de derivada y reconocer cuando en aplicaciones físicas de la vida real se presenta este concepto. Todo desde la percepción que tienen las estudiantes del mundo que las rodea e interviniendo a través de la modelación matemática usando las estrategias que se especifican en **7.2 Intervención docente**. El detalle de los instrumentos didácticos usados en el presente trabajo se puede consultar en el capítulo 10. Los saberes previos se aplican iniciando la intervención didáctica y también como post-test.

8. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A continuación se realiza el análisis de los resultados, se busca encontrar evidencias de la incidencia de la modelación matemática en el aprendizaje del concepto de derivada, por lo tanto, en cada análisis se trata de identificar cuando la estudiante modela el problema y cómo éste le permite reconocer el concepto de derivada y su aplicación en la situación problema. El análisis de los resultados se realiza partiendo caso por caso y finalizando con un análisis general del grupo de trabajo. En el caso por caso se presentará si hubo o no evolución conceptual en lo referente al concepto de derivada y en qué probable momento las estudiantes lo lograron, bajo qué circunstancias y en qué actividad. En el caso general se hace un análisis del grupo de trabajo buscando conclusiones generales del comportamiento e interés de las estudiantes ante la metodología propuesta, además se busca ver la respuesta general del grupo de análisis en el presente caso de estudio.

8.1 Análisis de Brenda

A continuación se presentan todas las respuestas dadas por la estudiante en cada intervención, así mismo se realiza el análisis de cada una de ellas.

8.1.1 Pre-test (Saberes previos)

Pregunta 1 ¿Qué entiende por derivada?

R/ No lo sé muy bien, es algo que tiene que ver con unas divisiones

Pregunta 2 ¿Qué entiende por razón de cambio?

R/ No sé qué es razón de cambio

Pregunta 3 ¿Qué entiende por cociente de incrementos?

R/ No sé qué sea eso

Pregunta 4 En su vida diaria ¿Dónde se puede observar la aplicación del concepto de derivada?

R/ No lo se

Pregunta 5 ¿Qué entiende por posición, cambio de posición, velocidad, aceleración y tiempo?

R/ Posición es el lugar donde uno se encuentra, cambiar de posición es cambiar de lugar, velocidad es moverse, aceleración es moverse rápido y tiempo es lo que transcurre en todo momento

Pregunta 6 ¿Qué entiende por modelación matemática a nivel escolar?

R/ No sé qué es modelación matemática

Pregunta 7 ¿Cómo puede identificar en una situación física las variables y constantes del problema, es decir la identificación de lo que varía y lo que permanece constante?

R/ No se

Pregunta 8. En la gráfica mostrada en la Figura 31 de abajo se presenta la distancia recorrida (d en unidades de longitud) por un vehículo contra el tiempo transcurrido (t en unidades de tiempo) para recorrer dicha distancia ¿Puede estimar la velocidad del vehículo cuando lleva 2, 4 o 6 (unidades de tiempo)? ¿Son iguales dichas velocidades? ¿Por qué?

R/ No sé cómo hacerlo

Pregunta 9 Modelación: El tiempo total necesario para detener un automóvil después de percibir un peligro, se compone del tiempo de reacción (tiempo entre el reconocimiento del peligro y la aplicación del freno). La Tabla 3 muestra las distancias de parada en metros (distancia que necesita para detenerse totalmente) de un automóvil que viaja a las velocidades V (m/s) desde el instante que se observa el peligro. Una compañía que fabrica autos realiza pruebas con carros manejados a control remoto y para garantizar que estos tienen distancia promedio de parada aceptables se plantean las siguientes cuestiones.

Velocidad V (m/s)	0	5	10	15	20	25	30	35
Distancia de parada d(m)	0	0,9	1,6	2,7	4,1	6,2	8,8	11,9

- ¿Es un comportamiento lineal? ¿Por qué?

- *Si un automóvil viaja a una velocidad de 40 m/s y en esos momentos está colocado un obstáculo a 14.0 m. frente a él, al aplicar el freno ¿choca el auto contra el obstáculo? ¿Por qué?*
 - *¿Cuál es el tiempo de frenado para valores comprendidos: a) entre los 20 y 30 m/s. b) de 30 a 35 m/s?*
 - *¿Para qué velocidad el tiempo de frenado fue mayor y cuál fue?*
- R/ No tengo la menor idea de cómo hacer todo eso

El caso de Brenda muestra diferentes aspectos (Pregunta 1 a Pregunta 9):

- Pregunta 1. No logra reconocer qué es una derivada, sin embargo acude, al parecer, a recuerdos de su clase de matemáticas. Habla de unas divisiones, sin embargo no habla de un cociente de incrementos ni de razón de cambio.
- Pregunta 2. No reconoce lo que es una razón de cambio, tampoco se logra evidenciar que lo relacione con la derivada para un caso en particular.
- Pregunta 3. No entiende que es cociente de incrementos, ni mucho menos logra relacionarlo con el concepto de derivada
- Pregunta 4. Aunque al parecer acude a su entorno para definir conceptos físicos, como se ve en una de las preguntas posteriores, en este punto la estudiante no puede relacionar el concepto de derivada o su aplicación con su entorno.
- Pregunta 5. Los conceptos físicos de posición, cambio de posición, velocidad, aceleración y tiempo los define de forma muy intuitiva. Sin embargo, estas definiciones no son del todo erradas. Ella define posición como el lugar donde uno se encuentra, acude a su entorno para poder definir un concepto físico. Así mismo lo hace con las demás definiciones. Un aspecto a destacar es que la estudiante acude a su entorno para poder describir los conceptos.
- Pregunta 6. Aunque la modelación matemática tiene que ver mucho con el modelado de fenómenos físicos la estudiante no entiende el concepto.
- Pregunta 7. La estudiante no sabe cómo identificar constantes y variables en un problema físico. Esta es una de las etapas fundamentales dentro de un proceso de modelado matemático.
- Pregunta 8. En este punto es evidente que la estudiante no podrá realizar la actividad propuesta, ya que para ello requiere de unos conocimientos previos los cuales no posee.

- Pregunta 9. Nuevamente, la estudiante no podrá realizar la actividad propuesta, ya que para ello requiere de unos conocimientos previos los cuales no posee.

8.1.2 Experimentación cinemática

El laboratorio de carril de aire se realizó usando un sistema de adquisición de datos que arrojaba la información de distancia recorrida contra el tiempo de forma automática. A continuación se presentan lo realizado por las estudiantes, es importante aclarar que ellas trabajaron en la construcción de las tablas y gráficos solicitados de forma colaborativa pero las respuestas a cada pregunta las hicieron de manera independiente.

En Figura 3, Figura 5 y Figura 7 se muestran las tablas realizadas y en Figura 4, Figura 6 y Figura 8 se muestran los gráficos de distancia vs tiempo, velocidad vs tiempo y aceleración vs tiempo realizados en <https://www.generadordegraficos.com> por Brenda y Laura. Dentro de la construcción hubo asesoría por parte del docente en lo correspondiente a lo procedimental, sin embargo, las estudiantes realizaron una construcción propia a partir de lo que ellas interpretaban y/o analizaban sin intervención del docente.

A continuación se presentan las respuestas dadas por Brenda a las preguntas planteadas.

Masa colgante= 250 g			
Distancia	Valor Utilizado : cm	Tiempo	Valore Registrado : seg
d ₁	2	t ₁	1,41
d ₂	4	t ₂	2,00
d ₃	6	t ₃	2,45
d ₄	8	t ₄	2,83
d ₅	10	t ₅	3,16
d ₆	12	t ₆	3,46
d ₇	14	t ₇	3,74
d ₈	16	t ₈	4,00

(a)

Masa colgante= 500 g			
Distancia	Valor Utilizado	Tiempo	Valore Registrado
d ₁	2	t ₁	1,00
d ₂	4	t ₂	1,41
d ₃	6	t ₃	1,73
d ₄	8	t ₄	2,00
d ₅	10	t ₅	2,24
d ₆	12	t ₆	2,45
d ₇	14	t ₇	2,65
d ₈	16	t ₈	2,83

(b)

Masa colgante= 800g			
Distancia	Valor Utilizado	Tiempo	Valore Registrado
d ₁	2	t ₁	0,71
d ₂	4	t ₂	1,00
d ₃	6	t ₃	1,22
d ₄	8	t ₄	1,41
d ₅	10	t ₅	1,58
d ₆	12	t ₆	1,73
d ₇	14	t ₇	1,87
d ₈	16	t ₈	2,00

(c)

Figura 3. Tablas construidas por Brenda y Laura de distancia vs tiempo (a) masa colgante de 250g, (b) masa colgante de 500g y (c) masa colgante de 800g

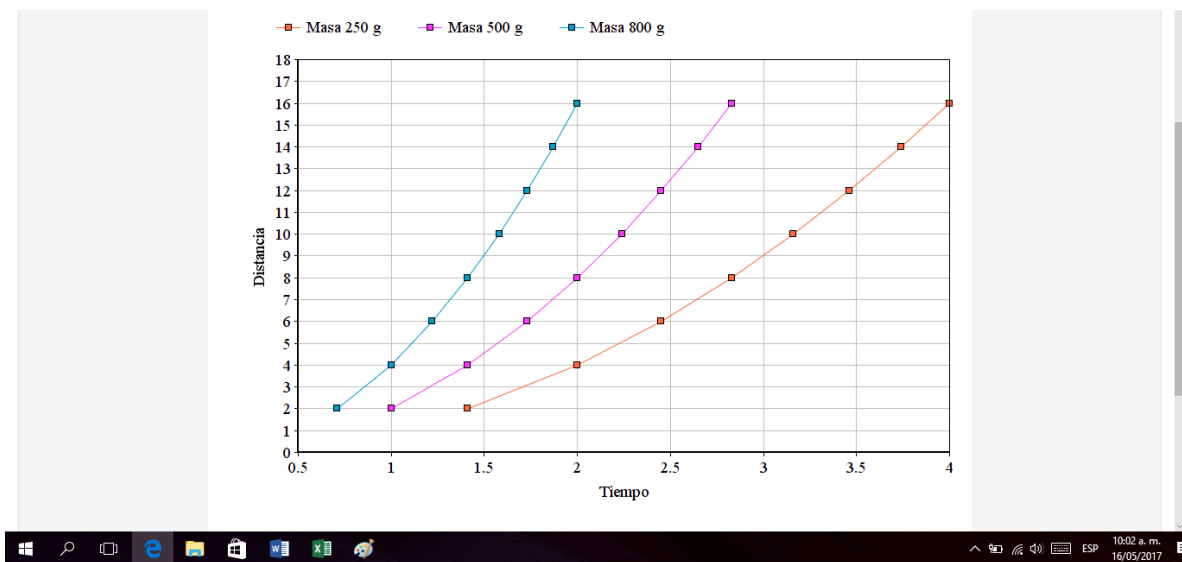


Figura 4. Gráficos distancia (cm) vs tiempo (s) realizados por Brenda y Laura en <https://www.generadordegraficos.com/> para las tres masas colgantes usadas en el experimento

Tablas y gráficas de posición:

- Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como distancia de los postes. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)
- ¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique

Viendo la gráfica parece ser una parte de una parábola, pero no estoy segura porque la naranja parece una línea recta.

En este punto la estudiante reconoce a partir de la forma de la gráfica que es posiblemente un comportamiento parabólico, sin embargo se confunde con una de las gráficas ya que dicha gráfica visualmente se asemeja a una línea recta aunque no lo es. La visualización matemática del fenómeno permitió que la estudiante se acercara a la descripción del comportamiento entre distancia – tiempo para un movimiento uniformemente acelerado, es decir está conceptualmente modelando a nivel escolar un fenómeno físico.

Masa colgante=	Valor	Incremento de	Valor
Razón de cambio (Cociente de incrementos)		Tiempo	
$\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$	$\frac{4 - 2}{2,00 - 1,41} = 3,4$	t_2	2,00
$\frac{d_3 - d_2}{t_3 - t_2}$	$\frac{6 - 4}{2,45 - 2,00} = 4,4$	t_3	2,45
$\frac{d_4 - d_3}{t_4 - t_3}$	$\frac{8 - 6}{2,83 - 2,45} = 5,3$	t_4	2,83
$\frac{d_5 - d_4}{t_5 - t_4}$	$\frac{10 - 8}{3,16 - 2,83} = 6,0$	t_5	3,16
$\frac{d_6 - d_5}{t_6 - t_5}$	$\frac{12 - 10}{3,46 - 3,16} = 6,6$	t_6	3,46
$\frac{d_7 - d_6}{t_7 - t_6}$	$\frac{14 - 12}{3,74 - 3,46} = 7,2$	t_7	3,74
$\frac{d_8 - d_7}{t_8 - t_7}$	$\frac{16 - 14}{4,00 - 3,74} = 7,7$	t_8	4,00

(a)

Masa colgante=	500g		
Razón de cambio (Cociente de incrementos) de	Valor	Incremento de Tiempo	de Valor
$\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$	$\frac{4-2}{1,41-1,00} = 4,8$	t_2	1,41
$\frac{d_3 - d_2}{t_3 - t_2}$	$\frac{6-4}{1,73-1,41} = 6,3$	t_3	1,73

$\frac{d_4 - d_3}{t_4 - t_3}$	$\frac{8-6}{2,00-1,73} = 7,5$	t_4	2,00
$\frac{d_5 - d_4}{t_5 - t_4}$	$\frac{10-8}{2,24-2,00} = 8,5$	t_5	2,24
$\frac{d_6 - d_5}{t_6 - t_5}$	$\frac{12-10}{2,45-2,24} = 9,4$	t_6	2,45
$\frac{d_7 - d_6}{t_7 - t_6}$	$\frac{14-12}{2,65-2,45} = 10,2$	t_7	2,65
$\frac{d_8 - d_7}{t_8 - t_7}$	$\frac{16-12}{2,83-2,65} = 10,9$	t_8	2,83

(a)

Masa colgante=	800g		
Razón de cambio (Cociente de incrementos) de	Valor	Incremento de Tiempo	de Valor
$\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$	$\frac{4-2}{1,00-0,71} = 6,8$	t_2	1,00
$\frac{d_3 - d_2}{t_3 - t_2}$	$\frac{6-4}{1,22-1,00} = 8,9$	t_3	1,22
$\frac{d_4 - d_3}{t_4 - t_3}$	$\frac{8-6}{1,41-1,22} = 10,4$	t_4	1,41
$\frac{d_5 - d_4}{t_5 - t_4}$	$\frac{10-8}{1,58-1,41} = 12,0$	t_5	1,58
$\frac{d_6 - d_5}{t_6 - t_5}$	$\frac{12-10}{1,73-1,58} = 13,3$	t_6	1,73
$\frac{d_7 - d_6}{t_7 - t_6}$	$\frac{14-12}{1,87-1,73} = 14,4$	t_7	1,87
$\frac{d_8 - d_7}{t_8 - t_7}$	$\frac{16-14}{2,00-1,87} = 15,5$	t_8	2,00

(c)

Figura 5. Tablas construidas por Brenda y Laura de velocidad vs tiempo (a) masa colgante de 250g, (b) masa colgante de 500g y (c) masa colgante de 800g.

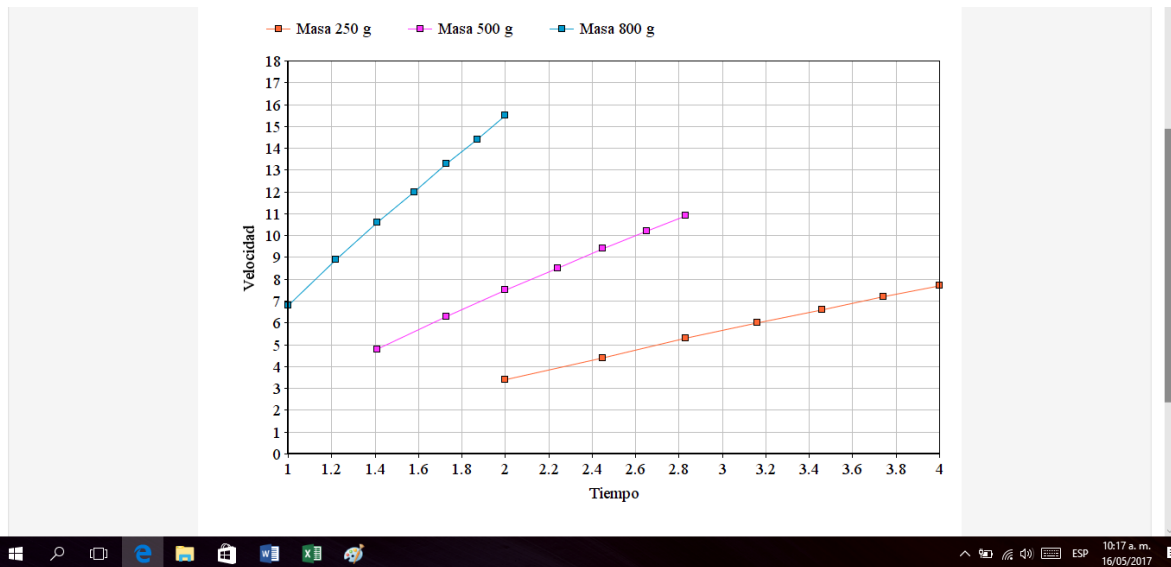


Figura 6. Gráficos velocidad (cm/s) vs tiempo (s) realizados por Brenda y Laura en <https://www.generadordegraficos.com/> para las tres masas colgantes usadas en el experimento

Tablas y gráficas de velocidad:

- *¿Cómo se interpreta el cociente de incrementos que obtuvieron en las tablas anteriores? ¿Se puede estimar la velocidad con estos datos? ¿Por qué?*

La velocidad es distancia sobre tiempo, entonces los datos de las divisiones son pequeñas velocidades. Aunque no se bien cómo explicarlo.

La estudiante en su respuesta describe la razón de cambio (cociente de incrementos entre distancia y tiempo) como unas pequeñas velocidades, aunque manifiesta no saber cómo explicarlo intuitivamente ya lo hizo porque al definir velocidad como distancia sobre tiempo da una posible explicación de la interpretación de las divisiones que ella realizó. No obstante, aquí hay un caso de un problema metacognitivo lingüístico ya que la estudiante tiene una idea pero no logra explicarla.

- *Es correcto afirmar que la velocidad es $v_{n+1} = \frac{d_{n+1}-d_n}{t_{n+1}-t_n}$ ¿Por qué?*

Pues creo que sí, porque son distancias divididas entre el tiempo.

En este caso la estudiante haciendo uso de sus conceptos físicos interpreta la ecuación de razón de cambio para decir que es correcto afirmar que dicha ecuación es la velocidad del carrito que se desplazaba en el experimento.

- *Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como velocidad. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)*
- *¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique*

Aquí sí parecen líneas rectas, las tres si son líneas rectas entonces yo diría que es lineal.

Nuevamente la estudiante haciendo uso de la visualización de la gráfica logra modelar matemáticamente a nivel escolar el comportamiento entre velocidad vs tiempo de un movimiento uniformemente acelerado.

Masa colgante= 250g.			
Razón de cambio de incrementos (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	de Valor
$\frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$	$\frac{4,4 - 3,4}{2,45 - 2,00} = 2,3$	t_3	2,45
$\frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3}$	$\frac{5,3 - 4,4}{2,83 - 2,45} = 2,2$	t_4	2,83
$\frac{v_5 - v_4}{t_5 - t_4}$	$\frac{6,0 - 5,3}{3,16 - 2,83} = 2,1$	t_5	3,16
$\frac{v_6 - v_5}{t_6 - t_5}$	$\frac{6,6 - 6,0}{3,46 - 3,16} = 2,1$	t_6	3,46
$\frac{v_7 - v_6}{t_7 - t_6}$	$\frac{7,2 - 6,6}{3,74 - 3,46} = 2,1$	t_7	3,74
$\frac{v_8 - v_7}{t_8 - t_7}$	$\frac{7,7 - 7,2}{4,00 - 3,74} = 2,1$	t_8	4,00

(a)

Masa colgante= 500g.			
Razón de cambio de incrementos (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	de Valor
$\frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$	$\frac{6,3 - 4,8}{1,73 - 1,41} = 4,6$	t_3	1,73
$\frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3}$	$\frac{7,5 - 6,3}{2,00 - 1,73} = 4,4$	t_4	2,00
$\frac{v_5 - v_4}{t_5 - t_4}$	$\frac{8,5 - 7,5}{2,24 - 2,00} = 4,3$	t_5	2,24

$\frac{v_6 - v_5}{t_6 - t_5}$	$\frac{9,4 - 8,5}{2,45 - 2,24} = 4,2$	t_6	2,45
$\frac{v_7 - v_6}{t_7 - t_6}$	$\frac{10,2 - 9,4}{2,65 - 2,45} = 4,2$	t_7	2,65
$\frac{v_8 - v_7}{t_8 - t_7}$	$\frac{10,9 - 10,2}{2,83 - 2,65} = 4,1$	t_8	2,83

(b)

Masa colgante=			
Razón de cambio de incrementos (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	de Valor
$\frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$	$\frac{8,9 - 6,8}{1,22 - 1,00} = 9,2$	t_3	1,22
$\frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3}$	$\frac{10,6 - 8,9}{1,41 - 1,22} = 8,7$	t_4	1,41
$\frac{v_5 - v_4}{t_5 - t_4}$	$\frac{12,0 - 10,6}{1,58 - 1,41} = 8,5$	t_5	1,58
$\frac{v_6 - v_5}{t_6 - t_5}$	$\frac{13,3 - 12,0}{1,73 - 1,58} = 8,4$	t_6	1,73
$\frac{v_7 - v_6}{t_7 - t_6}$	$\frac{14,4 - 13,3}{1,87 - 1,73} = 8,3$	t_7	1,87
$\frac{v_8 - v_7}{t_8 - t_7}$	$\frac{15,5 - 14,4}{2,00 - 1,87} = 8,3$	t_8	2,00

(c)

Figura 7. Tablas construidas por Brenda y Laura de velocidad vs tiempo (a) masa colgante de 250g, (b) masa colgante de 500g y (c) masa colgante de 800g.

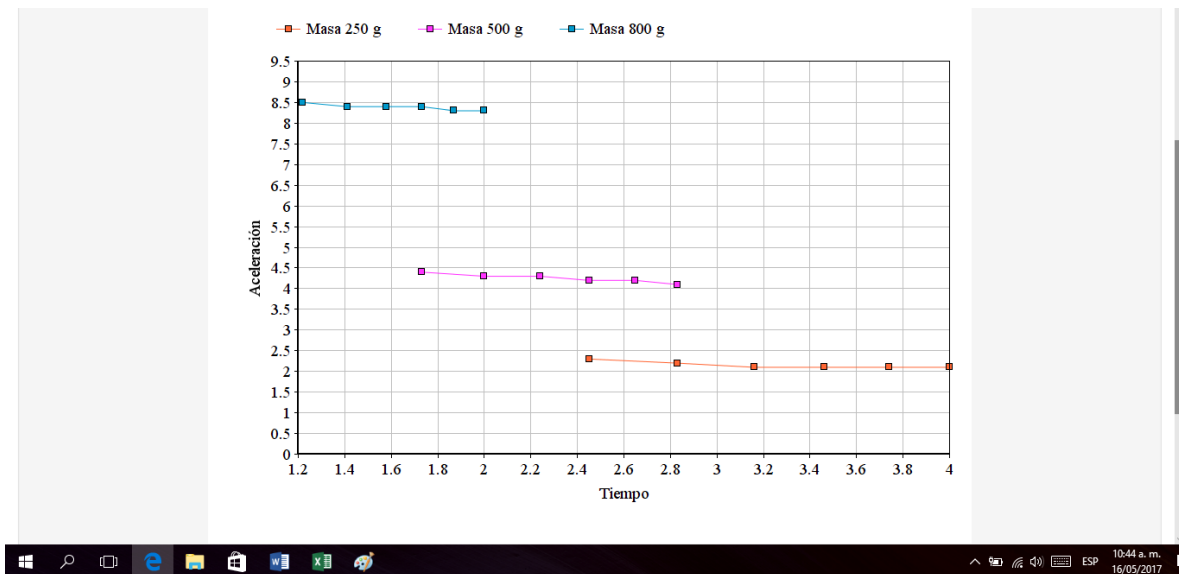


Figura 8. Gráficos aceleración (cm/s^2) vs tiempo (s) realizados por Brenda y Laura en <https://www.generadordegraficos.com/> para las tres masas colgantes usadas en el experimento

Tablas y gráficas de aceleración:

- *¿Cómo se interpreta el cociente de incrementos que completaron en las tablas anteriores? ¿Se puede estimar la aceleración con estos datos? ¿Por qué?*

No estoy segura, pero imagino que sí porque de esa misma forma se halló la velocidad.

La estudiante da una respuesta más guiada por la intuición que por el aprendizaje. El concepto de aceleración es más complejo que el de velocidad y además las estudiantes no utilizaron adecuadamente las unidades que suele ser un guía para entender ciertos aspectos cinemáticos.

- *Es correcto afirmar que la aceleración es $a_{n+1} = \frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n}$ ¿Por qué?*

Creo que sí, pero no lo sé.

Sería fácil si la estudiante tuviera claro el concepto de aceleración así como tenía claro el concepto de velocidad. En este punto el problema radica en que la estudiante no tiene claro el concepto de aceleración y por lo tanto no lo puede reconocer a nivel matemático.

- *Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como aceleración. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)*
- *¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique*

Estas gráficas son raras porque no se ve bien una línea recta ni una parábola. Sería otro comportamiento.

La estudiante se le dificulta entender claramente lo que sucede ya que los datos al ser procesado tienen unas variaciones en sus decimales y no se logra establecer un valor fijo de aceleración por este motivo y por ende no logra definir un comportamiento haciendo uso de la visualización. Este problema se puede solucionar argumentando comportamientos aproximados, situación que a nivel físico se usa muy a menudo. Ante la pregunta realizada a la estudiante *¿Aproximadamente (en lenguaje común más o menos) en el eje de aceleración se tiene un valor fijo?*

La respuesta de la estudiante fue la siguiente:

Pues más o menos sí.

Esto muestra que nuevamente poder visualizar el fenómeno físico permite entender un comportamiento de modelamiento matemático a nivel escolar, en este caso la estudiante reconoce un valor constante de aceleración para el movimiento uniformemente acelerado fenómeno que se presentó en el experimento.

Conclusiones finales:

- *En términos prácticos ¿cómo modelaría la distancia vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?*

Yo usaría la ecuación de la parábola. Pero solo una parte porque viendo los gráficos solo es una parte.

La estudiante acierta diciendo que modelaría la relación distancia vs tiempo para el problema de carril de aire usando la ecuación de la parábola. Sin embargo, dice que solo una parte de ella, este punto es errado ya que matemáticamente no se puede hablar de una parte de una ecuación; este problema se da porque la visualización permite ver el comportamiento más no permite tener un acercamiento formal sobre conceptos de dominio y rango de las ecuaciones. Sin embargo es un primer acercamiento al modelamiento de un fenómeno físico a nivel escolar haciendo uso de los conceptos matemáticos vistos previamente por la estudiante.

- *En términos prácticos ¿cómo modelaría la velocidad vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?*

Usaría la ecuación de la recta, pero también solo una parte.

En este punto el razonamiento de la estudiante es igual que para el caso de la relación distancia tiempo. Acierta al decir que usaría una ecuación de la recta, sin embargo, asocia el fenómeno de forma localizada ya que solo permite ver la relación velocidad tiempo para este caso en particular y no general. En este punto se detecta un inconveniente en la asimilación del fenómeno de forma general.

- *En términos prácticos ¿cómo modelaría la aceleración vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?*

Pues también es más o menos una recta, entonces yo usaría la ecuación de la recta.

La respuesta de la estudiante es acertada en términos generales, en este caso es una recta cuya pendiente es cero o es un valor constante. Sin embargo, la estudiante probablemente no llegue a esa conclusión solo con lo realizado en esta intervención didáctica.

- *¿En dónde se puede apreciar el concepto de derivada en la experimentación cinemática realizada en laboratorio de física?*

En las divisiones para encontrar las velocidades y las aceleraciones.

La estudiante reconoce la derivada como las divisiones usadas para encontrar las velocidades y las aceleraciones. Aunque la respuesta no está mal, ella pudo haber contestado: en la velocidad y en la aceleración.

- *¿Matemáticamente qué es la velocidad? Y ¿físicamente?*

Matemáticamente es la razón de cambio de la distancia con el tiempo y físicamente es cuando nos movemos.

La respuesta de la estudiante en cuanto al concepto matemático es impecable, sin embargo cuando quiere definirlo a nivel físico acude a la intuición.

- *¿Matemáticamente qué es la aceleración? Y ¿físicamente?*

La aceleración puede ser también la razón de cambio de la velocidad y físicamente es cuando uno se mueve más rápido.

La respuesta que presenta en este punto la estudiante no es totalmente satisfactoria, esto se debe a que el concepto de aceleración no lo tiene claro y es una deficiencia que se nota a lo largo de la intervención didáctica.

Consideraciones cinéticas:

- *¿Qué efecto tuvo la masa colgante sobre la velocidad y la aceleración del carrito?*

Cuando aumentaba la masa el carrito se movía más rápido y había más aceleración.

Haciendo uso solamente de la observación del experimento la estudiante logra responder la pregunta del efecto que producía, en la velocidad y aceleración, incrementar la masa colgante.

- *¿Se puede modelar dicho efecto? ¿Cómo?*

Se puede haciendo las mismas tablas pero en cada columna usar masa y en la otra velocidad y así mismo para la aceleración y ver qué pasa.

La estudiante propone hacer tablas y usar como variables la masa y la velocidad y la masa y la aceleración. Claramente es una propuesta que nace después de ella haber tenido la experiencia de la experimentación realizada en la presente propuesta didáctica. La propuesta de la estudiante puede funcionar para el caso masa vs aceleración pero no funcionaría para el caso de masa vs velocidad ya que la velocidad está cambiando todo el tiempo y de este punto la estudiante no se percató.

8.1.3 Post-test (Aplicación nuevamente de saberes previos)

Pregunta 1 ¿Qué entiende por derivada?

R/ Derivada es razón de cambio

Pregunta 2 ¿Qué entiende por razón de cambio?

R/ Es la derivada

Pregunta 3 ¿Qué entiende por cociente de incrementos?

R/ Es lo mismo que razón de cambio

Pregunta 4 En su vida diaria ¿Dónde se puede observar la aplicación del concepto de derivada?

R/ Cuando me muevo con velocidad

Pregunta 5 ¿Qué entiende por posición, cambio de posición, velocidad, aceleración y tiempo?

R/ Posición es un punto donde uno se encuentra, cambiar de posición es cambiar de lugar, velocidad es la razón de cambio con el tiempo de la posición, aceleración es la razón de cambio con el tiempo de la velocidad y tiempo es lo que transcurre en todo momento

Pregunta 6 ¿Qué entiende por modelación matemática a nivel escolar?

R/ Es usar las matemáticas para describir cosas en física

Pregunta 7 ¿Cómo puede identificar en una situación física las variables y constantes del problema, es decir la identificación de lo que varía y lo que permanece constante?

R/ Creo que se debe medir cada cosa y si cambian cuando pasa el tiempo son variables y si no es constante.

Pregunta 8. En la gráfica mostrada en la Figura 31 de abajo se presenta la distancia recorrida (d en unidades de longitud) por un vehículo contra el tiempo transcurrido (t en unidades de tiempo) para recorrer dicha distancia ¿Puede estimar la velocidad del vehículo cuando lleva 2, 4 o 6 (unidades de tiempo)? ¿Son iguales dichas velocidades? ¿Por qué?

R/

The image shows three handwritten calculations on lined paper, each representing the calculation of velocity at a specific time interval. The calculations are as follows:

$$\frac{1,2 - 0}{2 - 0} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$
$$\frac{4,8 - 1,2}{4 - 2} = \frac{3,6}{2} = 1,8$$
$$\frac{10,8 - 4,8}{6 - 4} = \frac{6}{2} = 3$$

Figura 9. Respuesta de Brenda a la pregunta 8 del post-test.

No son constantes porque haciendo lo de la razón de cambio para el tiempo da diferente.

Pregunta 9 Modelación: El tiempo total necesario para detener un automóvil después de percibir un peligro, se compone del tiempo de reacción (tiempo entre el reconocimiento del peligro y la aplicación del freno). La Tabla 3 muestra las distancias de parada en metros (distancia que necesita para detenerse totalmente) de un automóvil que viaja a las velocidades V (m/s) desde el instante que se observa el peligro. Una compañía que fabrica autos realiza pruebas con carros manejados a control remoto y para garantizar que estos tienen distancia promedio de parada aceptables se plantean las siguientes cuestiones.

Velocidad V (m/s)	0	5	10	15	20	25	30	35
Distancia de parada $d(m)$	0	0,9	1,6	2,7	4,1	6,2	8,8	11,9

- *¿Es un comportamiento lineal? ¿Por qué?*
- *Si un automóvil viaja a una velocidad de 40 m/s y en esos momentos está colocado un obstáculo a 14.0 m. frente a él, al aplicar el freno ¿choca el auto contra el obstáculo? ¿Por qué?*
- *¿Cuál es el tiempo de frenado para valores comprendidos: a) entre los 20 y 30 m/s. b) de 30 a 35 m/s?*
- *¿Para qué velocidad el tiempo de frenado fue mayor y cuál fue?*

R/

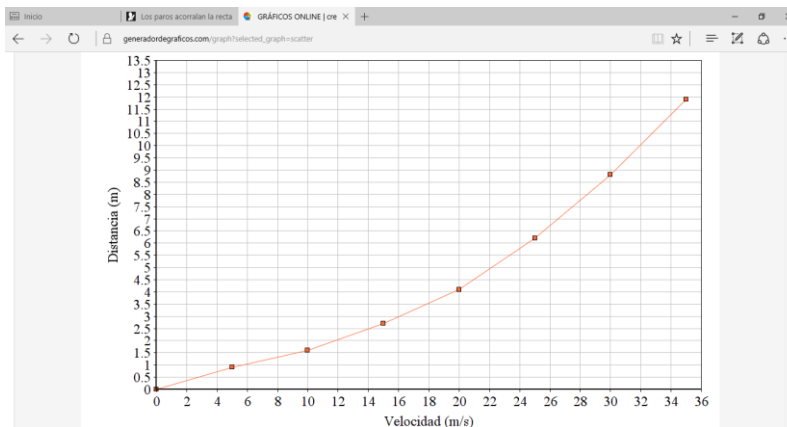


Figura 10. Gráfico distancia (cm) vs velocidad (m/s) realizado por Brenda en <https://www.generadordegraficos.com/> para dar respuesta a la última pregunta del post-test

- No es lineal porque haciendo la gráfica se ve que es parabólico.

- No sé porque solo llega a 35
- No sé porque no tengo el tiempo

Ante la respuesta inmediatamente anterior hubo una intervención adicional de parte del docente, en este caso se le preguntó a la estudiante si teniendo datos de velocidad y posición o distancia se puede hallar el tiempo, ella no lograba llegar a una respuesta, sin embargo haciendo un análisis de unidades se pudo lograr que la estudiante concluyera que la división entre distancia y velocidad era el tiempo. Con esta intervención la estudiante pudo responder las preguntas siguientes.

$$t = \frac{8,8 \text{ m} - 4,1 \text{ m}}{30 \text{ m/s} - 20 \text{ m/s}} = \frac{4,7 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} = 0,47 \text{ s.}$$
$$t = \frac{11,9 \text{ m} - 8,8 \text{ m}}{35 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}} = \frac{3,1 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 0,62 \text{ s.}$$

$$t_1 = \frac{0,9 - 0}{5 - 0} = \frac{0,9}{5} = 0,18 \text{ s.}$$

$$t_2 = \frac{1,6 - 0,9}{10 - 5} = \frac{0,7}{5} = 0,14 \text{ s}$$

$$t_3 = \frac{2,7 - 1,6}{15 - 10} = \frac{1,1}{5} = 0,22 \text{ s.}$$

$$t_4 = \frac{4,1 - 2,7}{20 - 15} = \frac{1,4}{5} = 0,28 \text{ s.}$$

$$t_5 = \frac{6,2 - 4,1}{25 - 20} = \frac{2,1}{5} = 0,42 \text{ s.}$$

$$t_6 = \frac{8,8 - 6,2}{30 - 25} = \frac{2,6}{5} = 0,52 \text{ s.}$$

$$t_7 = \frac{11,9 - 8,8}{35 - 30} = \frac{3,1}{5} = 0,62 \text{ s.}$$

Tiempo = 0,62 s
Velocidad = 35 m/s

Figura 11. Respuesta de Brenda a las dos últimas preguntas del punto 9 del pos-test.

El caso de Brenda muestra diferentes aspectos (Pregunta 1 a Pregunta 9) en términos generales la estudiante logró responder de manera satisfactoria la mayoría de preguntas en comparación con el pre-test donde ocurrió lo contrario:

- Pregunta 1. En esta pregunta, la estudiante logra responder de manera satisfactoria, haciendo uso del concepto de razón de cambio lo asocia con el concepto de derivada.
- Pregunta 2. En este caso sucede exactamente lo mismo lo del punto inmediatamente anterior.
- Pregunta 3. De manera adecuada la estudiante logra responder la pregunta, aquí se observa que logra relacionar la razón de cambio como derivada y además reconoce el cociente de incrementos como razón de cambio.

- Pregunta 4. La estudiante al reconocer el concepto de derivada en aplicaciones cinemáticas lo relaciona con su movimiento aunque es redundante en su respuesta esta se puede dar como válida.
- Pregunta 5. Los conceptos de velocidad y aceleración los define matemáticamente y los otros al parecer los hace nuevamente de forma intuitiva.
- Pregunta 6. La respuesta es muy básica, pero deja ver un avance conceptual al decir que la modelación es usar las matemáticas para describir, de acuerdo a su respuesta, fenómenos físicos. Aunque esta es una respuesta muy localizada para el campo de la modelación se puede dar como válida entendiendo que el campo de los fenómenos físicos tiene bastantes aspectos de modelado matemático.
- Pregunta 7. Aquí la estudiante logra identificar de forma simple pero acertada la forma de identificar variables pero lo hace desde su experiencia en experimentación.
- Pregunta 8. A diferencia del pre-test la estudiante logra responder la pregunta de manera acertada usando el concepto de razón de cambio.
- Pregunta 9. En este punto se observan varios aspectos, la estudiante responde la mayoría de las preguntas de manera satisfactoria. Sin embargo, no logra responder aspectos que no tiene visualmente en la gráfica, nuevamente la dificultad del modelado inductivo hace que las estudiantes se limiten a dar respuestas de forma local pero no global.

8.2 Análisis de Laura

A continuación se presentan todas las respuestas dadas por la estudiante en cada intervención, así mismo se realiza el análisis de cada una de ellas.

8.2.1 Pre-test (Saberes previos)

Pregunta 1 ¿Qué entiende por derivada?

R/ No se

Pregunta 2 ¿Qué entiende por razón de cambio?

R/ No sé

Pregunta 3 ¿Qué entiende por cociente de incrementos?

R/ Nada

Pregunta 4 En su vida diaria ¿Dónde se puede observar la aplicación del concepto de derivada?

R/ No lo he visto, no sé qué sea

Pregunta 5 ¿Qué entiende por posición, cambio de posición, velocidad, aceleración y tiempo?

R/ Posición es un lugar en el espacio, cambio de posición es cambiar el lugar en el espacio, velocidad es cambiar de posición constantemente, aceleración es el cambio de velocidad y tiempo es el que se mide en segundo u horas.

Pregunta 6 ¿Qué entiende por modelación matemática a nivel escolar?

R/ No se

Pregunta 7 ¿Cómo puede identificar en una situación física las variables y constantes del problema, es decir la identificación de lo que varía y lo que permanece constante?

R/ Si cambia es variable y si no cambia es constante, creo que así

Pregunta 8 En la gráfica mostrada en la figura de abajo se presenta la distancia recorrida (y en unidades de longitud) por un vehículo contra el tiempo transcurrido (x en unidades de tiempo) para recorrer dicha distancia ¿Puede estimar la velocidad del vehículo cuando lleva 2, 4 o 6 (unidades de tiempo)? ¿Son iguales dichas velocidades? ¿Por qué?

R/ Leyendo la gráfica, la velocidad debe ser 1,2, 2,7 y 4,8. No son iguales las velocidades.

Porque en la gráfica se ve que son diferentes.

Pregunta 9 Modelación: Modelación: El tiempo total necesario para detener un automóvil después de percibir un peligro, se compone del tiempo de reacción (tiempo entre el reconocimiento del peligro y la aplicación del freno). La Tabla 3 muestra las distancias de parada en metros (distancia que necesita para detenerse totalmente) de un automóvil que viaja a las velocidades V (m/s) desde el instante que se observa el peligro. Una compañía que fabrica autos realiza pruebas con carros manejados a control remoto y para garantizar que estos tienen distancia promedio de parada aceptables se plantean las siguientes cuestiones.

Velocidad V (m/s)	0	5	10	15	20	25	30	35
Distancia de parada $d(m)$	0	0,9	1,6	2,7	4,1	6,2	8,8	11,9

- ¿Es un comportamiento lineal? ¿Por qué?
- Si un automóvil viaja a una velocidad de 40 m/s y en esos momentos está colocado un obstáculo a 14.0 m. frente a él, al aplicar el freno ¿choca el auto contra el obstáculo? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el tiempo de frenado para valores comprendidos: a) entre los 20 y 30 m/s. b) de 30 a 35 m/s?
 - ¿Para qué velocidad el tiempo de frenado fue mayor y cuál fue?

R/ No sé cómo hacerlo

El caso de Laura muestra diferentes aspectos (Pregunta 1 a Pregunta 9):

- Pregunta 1. Al parecer no sabe qué es una derivada, no da explicaciones sobre algo intuitivo que pueda ayudarla.
- Pregunta 2. No reconoce lo que es una razón de cambio, tampoco se logra evidenciar que lo relacione con la derivada para un caso en particular.
- Pregunta 3. No entiende que es cociente de incrementos, ni mucho menos logra relacionarlo con el concepto de derivada.
- Pregunta 4. No logra reconocer donde se puede ver la aplicación de la derivada.
- Pregunta 5. La estudiante define los conceptos físicos bastante bien. Las definiciones que da son formales. Pude ser que recuerde las definiciones vistas en sus cursos de física, sin embargo la definición de tiempo la hace de manera intuitiva usando su entorno dando las unidades con las que el tiempo se mide.
- Pregunta 6. La estudiante no sabe que es la modelación matemática.
- Pregunta 7. Logra dar una respuesta bastante práctica a la pregunta y lo hace, muy probablemente, de manera intuitiva.
- Pregunta 8. La estudiante hace una lectura errónea de la gráfica que se le presenta, para poder dar respuesta a esta pregunta ella debería tener unos saberes previos que a lo largo del cuestionario se evidencia que no posee. Por lo tanto, realiza algo de manera intuitiva pero termina siendo erróneo.

- Pregunta 9. La estudiante no puede realizar la actividad propuesta, ya que para ello requiere de unos conocimientos previos los cuales no posee. En este punto la intuición no es suficiente.

8.2.2 Experimentación cinemática

A continuación se presentan las respuestas dadas por Laura a las preguntas planteadas.

Tablas y gráficas de posición:

- *Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como distancia de los postes. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)*
- *¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique*

En la gráfica se ve que son entre rectas y curvas, la azul se ve más curva que las otras. Puede ser parte de una parábola la azul y las otras son parte de otra figura.

En este caso la visualización del fenómeno fue confuso para la estudiante, sin embargo, acierta al decir que la gráfica azul es parte de una parábola pero se equivoca cuando asocia las dos figuras siguientes con parte de otras figuras distintas a una parábola. Esta confusión se da porque la curvatura de la parábola no es suficientemente pronunciada para ser denominada como tal, aunque el comportamiento de las tres figuras es parabólico. Se observa en este punto que también esta estudiante analiza el fenómeno de forma localizada a partir de lo que ve después de haber realizado la experimentación, situación que en términos de un aprendizaje significativo no es bueno.

Tablas y gráficas de velocidad:

- *¿Cómo se interpreta el cociente de incrementos que obtuvieron en las tablas anteriores? ¿Se puede estimar la velocidad con estos datos? ¿Por qué?*

Si porque dividimos distancia entre tiempo.

De forma muy simple la estudiante afirma que si en virtud que siempre divide distancia entre tiempo. Aunque la respuesta es corta se puede destacar que el describir un fenómeno en términos matemáticos puede permitir a las estudiantes entender aspectos más avanzados desde conceptos básicos que tienen como conocimientos previos.

- *Es correcto afirmar que la velocidad es $v_{n+1} = \frac{d_{n+1}-d_n}{t_{n+1}-t_n}$ ¿Por qué?*

Si porque se divide distancia entre tiempo y fue lo que hicimos en las tablas y las unidades son centímetros / segundos en las divisiones y es una velocidad.

La respuesta de la estudiante es totalmente correcta, se destaca que en este punto hace un énfasis adicional en las unidades y esto aparentemente lo utiliza para corroborar y/o argumentar más su respuesta.

- *Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como velocidad. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)*
- *¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique*

Las tres gráficas son líneas rectas.

En este punto aunque la estudiante no afirma que es un comportamiento lineal, acierta al decir que son líneas rectas por lo que está dando una explicación del comportamiento del fenómeno desde una perspectiva matemática.

Tablas y gráficas de aceleración:

- *¿Cómo se interpreta el cociente de incrementos que completaron en las tablas anteriores? ¿Se puede estimar la aceleración con estos datos? ¿Por qué?*

Si porque divide velocidad sobre tiempo.

Aunque las respuestas de la estudiante son muy simples muestra que tiene unos conceptos previos que le permiten responder las preguntas basada en dichos conceptos.

- *Es correcto afirmar que la aceleración es $a_{n+1} = \frac{v_{n+1}-v_n}{t_{n+1}-t_n}$ ¿Por qué?*

Si porque divide velocidad sobre tiempo.

En este caso sucede exactamente lo del punto inmediatamente anterior.

- *Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como aceleración. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)*
- *¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique*

El comportamiento es otro.

Nuevamente la visualización no permite que la estudiante acierte en su respuesta. Los datos procesado tienen unas variaciones en sus decimales y no se logra establecer un valor fijo de aceleración por este motivo no logra definir un comportamiento haciendo uso de la visualización. Este problema se puede solucionar argumentando comportamientos aproximados, situación que a nivel físico se usa muy a menudo. Ante la pregunta realizada a la estudiante *¿Aproximadamente (en lenguaje común más o menos) en el eje de aceleración se tiene un valor fijo?*

La respuesta de la estudiante fue la siguiente:

Más o menos sí.

Poder visualizar el fenómeno físico permite entender un comportamiento físico matemático a nivel escolar, en este caso la estudiante reconoce un valor constante de aceleración para el movimiento uniformemente acelerado fenómeno que se presentó en el experimento.

Conclusiones finales:

- *En términos prácticos ¿cómo modelaría la distancia vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?*

La ecuación de la parábola para la azul y para las otras no sé qué ecuación usar.

La estudiante acierta diciendo que modelaría la relación distancia vs tiempo para el problema de carril de aire usando la ecuación de la parábola para la gráfica azul. Sin embargo, dice que para las otras dos no sabe qué usar; este problema se da porque la estudiante no puede visualizar de manera acertada el comportamiento gráfico del fenómeno físico. Sin embargo, este es un primer acercamiento al modelamiento de un fenómeno físico a nivel escolar haciendo uso de los conceptos matemáticos vistos previamente por la estudiante.

- *En términos prácticos ¿cómo modelaría la velocidad vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?*

Con la ecuación de una línea recta.

Aquí de forma muy simple acierta al decir que usaría la ecuación de la línea recta, sin embargo. Al no dar elementos adicionales en su respuesta no se concibe si está entendiendo el fenómeno de forma localizada o lo concibe de forma general.

- *En términos prácticos ¿cómo modelaría la aceleración vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?*

Es más o menos un número, entonces se usa un número

La respuesta de la estudiante es acertada. Sin embargo, parece acudir netamente a la memorización cuando se le preguntó si era aproximadamente un número constante cuando estaba describiendo el comportamiento registrado en la Figura 8.

- *¿En dónde se puede apreciar el concepto de derivada en la experimentación cinemática realizada en laboratorio de física?*

Cuando hacíamos las divisiones para la velocidad y aceleración.

La estudiante reconoce la derivada como las divisiones usadas para encontrar las velocidades y las aceleraciones. Aunque la respuesta no está mal, ella pudo haber contestado: en la velocidad y en la aceleración.

- *¿Matemáticamente qué es la velocidad? Y ¿físicamente?*

Es la razón de cambio de la distancia.

La estudiante da una respuesta que no es del todo errónea pero si incompleta, ya que la respuesta correcta sería decir que es la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo. La estudiante tampoco argumenta una diferencia entre una descripción física y matemática de la velocidad.

- *¿Matemáticamente qué es la aceleración? Y ¿físicamente?*

Es la razón de cambio de la velocidad.

La respuesta que presenta en este punto la estudiante nuevamente es incompleta, ya que las razones de cambio se dan respecto a alguna variable y en este caso la variable es el tiempo.

Consideraciones cinéticas:

- *¿Qué efecto tuvo la masa colgante sobre la velocidad y la aceleración del carrito?*

Hacia que aumentara la velocidad y aceleración.

Haciendo uso solamente de la observación del experimento la estudiante logra responder la pregunta del efecto que producía, en la velocidad y aceleración, incrementar la masa colgante.

- *¿Se puede modelar dicho efecto? ¿Cómo?*

Si, imagino que haciendo tablas y gráficos.

La estudiante da una respuesta simple y acude a resumir el proceso realizado de modelación que se usó en la experimentación cinemática. La respuesta de la estudiante no es satisfactoria.

8.2.3 Post-test (Aplicación nuevamente de saberes previos)

Pregunta 1 ¿Qué entiende por derivada?

R/ Es razón de cambio

Pregunta 2 ¿Qué entiende por razón de cambio?

R/ Es derivada

Pregunta 3 ¿Qué entiende por cociente de incrementos?

R/ Es razón de cambio, son lo mismo

Pregunta 4 En su vida diaria ¿Dónde se puede observar la aplicación del concepto de derivada?

R/ Cuando voy en carro

Pregunta 5 ¿Qué entiende por posición, cambio de posición, velocidad, aceleración y tiempo?

R/ Posición es un lugar en el espacio, cambio de posición es cambiar el lugar en el espacio, velocidad es razón de cambio, aceleración es también razón de cambio y tiempo es el que se mide en segundo u horas.

Pregunta 6 ¿Qué entiende por modelación matemática a nivel escolar?

R/ Es usar gráficas y decir sus formas

Pregunta 7 ¿Cómo puede identificar en una situación física las variables y constantes del problema, es decir la identificación de lo que varía y lo que permanece constante?

R/ Midiendo y después viendo qué cambia

Pregunta 8 En la gráfica mostrada en la figura de abajo se presenta la distancia recorrida (y en unidades de longitud) por un vehículo contra el tiempo transcurrido (x en unidades de tiempo) para recorrer dicha distancia ¿Puede estimar la velocidad del vehículo cuando lleva 2, 4 o 6 (unidades de tiempo)? ¿Son iguales dichas velocidades? ¿Por qué?

R/.

$$\frac{1,2 - 0}{2 - 0} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

$$\frac{4,8 - 1,2}{4 - 2} = \frac{3,6}{2} = 1,8$$

$$\frac{10,8 - 4,8}{6 - 4} = \frac{6}{2} = 3$$

Figura 12. Respuesta de Laura a la pregunta 8 del pos-test.

Usando la razón de cambio da resultados distintos.

Pregunta 9 Modelación: Modelación: El tiempo total necesario para detener un automóvil después de percibir un peligro, se compone del tiempo de reacción (tiempo entre el reconocimiento del peligro y la aplicación del freno). La Tabla 3 muestra las distancias de parada en metros (distancia que necesita para detenerse totalmente) de un automóvil que viaja a las velocidades V (m/s) desde el instante que se observa el peligro. Una compañía que fabrica autos realiza pruebas con carros manejados a control remoto y para garantizar que estos tienen distancia promedio de parada aceptables se plantean las siguientes cuestiones.

Velocidad V (m/s)	0	5	10	15	20	25	30	35
Distancia de parada d (m)	0	0,9	1,6	2,7	4,1	6,2	8,8	11,9

- ¿Es un comportamiento lineal? ¿Por qué?

- Si un automóvil viaja a una velocidad de 40 m/s y en esos momentos está colocado un obstáculo a 14.0 m. frente a él, al aplicar el freno ¿choca el auto contra el obstáculo? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el tiempo de frenado para valores comprendidos: a) entre los 20 y 30 m/s. b) de 30 a 35 m/s?
- ¿Para qué velocidad el tiempo de frenado fue mayor y cuál fue?

R/

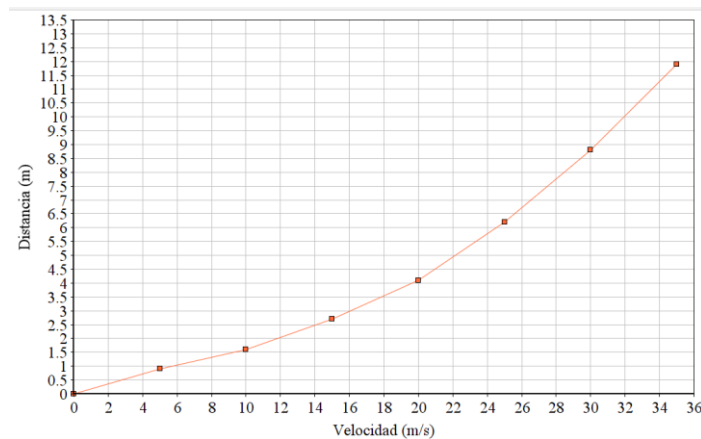


Figura 13. Gráfico distancia (cm) vs velocidad (m/s) realizado por Laura en <https://www.generadordegraficos.com/> para dar respuesta a la última pregunta del post-test

- No es lineal parece parabólico
- En la tabla no hay 40, no se
- No sé porque no tengo el tiempo

Ante la respuesta inmediatamente anterior hubo una intervención adicional de parte del docente, en este caso se le preguntó a la estudiante si teniendo datos de velocidad y posición o distancia se puede hallar el tiempo, ella no lograba llegar a una respuesta, sin embargo haciendo un análisis de unidades se pudo lograr que la estudiante concluyera que la división entre distancia y velocidad era el tiempo. Con esta intervención la estudiante pudo responder las preguntas siguientes.

$$t = \frac{8,8 \text{ m} - 4,1 \text{ m}}{30 \text{ m/s} - 20 \text{ m/s}} = \frac{4,7 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} = 0,47 \text{ s}$$

$$t = \frac{11,9 \text{ m} - 8,8 \text{ m}}{35 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}} = \frac{3,1 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 0,62 \text{ s}$$

$$t_1 = \frac{0,9 - 0}{5 - 0} = \frac{0,9}{5} = 0,18 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{1,6 - 0,9}{10 - 5} = \frac{0,7}{5} = 0,14 \text{ s}$$

$$t_3 = \frac{2,7 - 1,6}{15 - 10} = \frac{1,1}{5} = 0,22 \text{ s}$$

$$t_4 = \frac{4,1 - 2,7}{20 - 15} = \frac{1,4}{5} = 0,28 \text{ s}$$

$$t_5 = \frac{6,2 - 4,1}{25 - 20} = \frac{2,1}{5} = 0,42 \text{ s}$$

$$t_6 = \frac{8,8 - 6,2}{30 - 25} = \frac{2,6}{5} = 0,52 \text{ s}$$

$$t_7 = \frac{11,9 - 8,8}{35 - 30} = \frac{3,1}{5} = 0,62 \text{ s}$$

- El tiempo es 0,62 s
- La velocidad es 35 m/s

Figura 14. Respuesta de Laura a las dos últimas preguntas del punto 9 del post-test.

El caso de Laura muestra diferentes aspectos (Pregunta 1 a Pregunta 9) hubo una mejoría en sus respuestas respecto al pre-test:

- Pregunta 1. Logra responder la pregunta de manera satisfactoria al poder relacionar la derivada con el concepto de razón de cambio.
- Pregunta 2. En este punto ocurre exactamente lo del punto inmediatamente anterior.
- Pregunta 3. Acierta a decir que es lo mismo que razón de cambio, su respuesta es satisfactoria.
- Pregunta 4. Reconoce el concepto de derivada desde su aplicación cinemática y lo relaciona en su vida diaria cuando se mueve en carro, probablemente por sus fenómenos cinemáticos de velocidad y aceleración.
- Pregunta 5. La estudiante define los conceptos físicos bastante bien. Las definiciones que da para velocidad y aceleración son matemáticas y no físicas pero están incompletas ya que decir solamente razón de cambio no es suficiente para definir la velocidad y el tiempo. Aparentemente está usando la memorización.
- Pregunta 6. La estudiante asocia la modelación a aspectos del modelado inductivo muy específicos, no logra reconocer aspectos más generales. Esto evidencia que este proceso implicó que las estudiantes concibieran situaciones específicas pero no globales o generales en muchos casos.
- Pregunta 7. Logra dar una respuesta bastante práctica a la pregunta y lo hace, muy probablemente, de acuerdo a su experiencia en experimentación realizada en este trabajo.
- Pregunta 8. A diferencia del pre-test la estudiante logra responder la pregunta de manera acertada usando el concepto de razón de cambio.
- Pregunta 9. En este punto se observan varios aspectos, la estudiante responde la mayoría de las preguntas de manera satisfactoria. Sin embargo, no logra responder aspectos que no tiene visualmente en la gráfica, nuevamente la dificultad del modelado inductivo hace que las estudiantes se limiten a dar respuestas de forma local pero no global.

8.3 Análisis de María Fernanda

A continuación se presentan todas las respuestas dadas por la estudiante en cada intervención, así mismo se realiza el análisis de cada una de ellas.

8.3.1 Pre-test (Saberes previos)

Pregunta 1 ¿Qué entiende por derivada?

R/ Nada

Pregunta 2 ¿Qué entiende por razón de?

R/ Nada

Pregunta 3 ¿Qué entiende por cociente de incrementos?

R/ Nada

Pregunta 4 En su vida diaria ¿Dónde se puede observar la aplicación del concepto de derivada?

R/ (No responde la estudiante)

Pregunta 5 ¿Qué entiende por posición, cambio de posición, velocidad, aceleración y tiempo?

R/ Es el lugar, cambiar de lugar, velocidad es cuando uno va moviéndose, aceleración es cuando se acelera el carro y tiempo se indica con el reloj, las horas, días, etc.

Pregunta 6 ¿Qué entiende por modelación matemática a nivel escolar?

R/ Nada

Pregunta 7 ¿Cómo puede identificar en una situación física las variables y constantes del problema, es decir la identificación de lo que varía y lo que permanece constante?

R/ Si cambia es variable y si no cambia es constante, creo que así

Pregunta 8 En la gráfica mostrada en la figura de abajo se presenta la distancia recorrida (y en unidades de longitud) por un vehículo contra el tiempo transcurrido (x en unidades de tiempo) para recorrer dicha distancia ¿Puede estimar la velocidad del vehículo cuando lleva 2, 4 o 6 (unidades de tiempo)? ¿Son iguales dichas velocidades? ¿Por qué?

R/ No sé.

Pregunta 9 Modelación: El tiempo total necesario para detener un automóvil después de percibir un peligro, se compone del tiempo de reacción (tiempo entre el reconocimiento del peligro y la aplicación del freno). La Tabla 3 muestra las distancias de parada en metros (distancia que necesita para detenerse totalmente) de un automóvil que viaja a las

velocidades V (m/s) desde el instante que se observa el peligro. Una compañía que fabrica autos realiza pruebas con carros manejados a control remoto y para garantizar que estos tienen distancia promedio de parada aceptables se plantean las siguientes cuestiones.

Velocidad V (m/s)	0	5	10	15	20	25	30	35
Distancia de parada d(m)	0	0,9	1,6	2,7	4,1	6,2	8,8	11,9

- ¿Es un comportamiento lineal? ¿Por qué?
- Si un automóvil viaja a una velocidad de 40 m/s y en esos momentos está colocado un obstáculo a 14.0 m. frente a él, al aplicar el freno ¿choca el auto contra el obstáculo? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el tiempo de frenado para valores comprendidos: a) entre los 20 y 30 m/s. b) de 30 a 35 m/s?
 - ¿Para qué velocidad el tiempo de frenado fue mayor y cuál fue?

R/ No sé cómo hacerlo

El caso de María Fernanda muestra diferentes aspectos (Pregunta 1 a Pregunta 9):

- Pregunta 1. Al parecer no sabe qué es una derivada, no da explicaciones sobre algo intuitivo que pueda ayudarla.
- Pregunta 2. No reconoce lo que es una razón de cambio, tampoco se logra evidenciar que lo relacione con la derivada para un caso en particular.
- Pregunta 3. No entiende que es cociente de incrementos, ni mucho menos logra relacionarlo con el concepto de derivada.
- Pregunta 4. La estudiante no responde la pregunta.
- Pregunta 5. La estudiante no logra definir los conceptos físicos muy bien, sin embargo trata de usar la intuición basada en experiencias propias para poder definir los conceptos. Esto se evidencia cuando dice: “*velocidad es cuando uno va moviéndose, aceleración es cuando se acelera el carro y tiempo se indica con el reloj*” Aunque las definiciones no son formales se puede reconocer que ella pudo dar una respuesta usando su entorno, experiencia y la intuición.
- Pregunta 6. La estudiante no sabe que es la modelación matemática.

- Pregunta 7. Logra dar una respuesta bastante práctica a la pregunta y lo hace, muy probablemente, de manera intuitiva.
- Pregunta 8. La estudiante no da respuesta a lo planteado en la pregunta, la carencia de saberes previos nuevamente es culpable de esta situación.
- Pregunta 9. La estudiante no puede realizar la actividad propuesta, ya que para ello requiere de unos conocimientos previos los cuales no posee. En este punto la intuición no es suficiente.

8.3.2 Experimentación cinemática

A continuación se presentan las gráficas realizadas por las estudiantes, es importante aclarar que ellas trabajaron en la construcción de las tablas y gráficos solicitados de forma colaborativa pero las respuestas a cada pregunta las hicieron de manera independiente.

En Figura 15, Figura 17 y Figura 19 se muestran las tablas realizadas y en Figura 16, Figura 18 y Figura 20 se muestran los gráficos de distancia vs tiempo, velocidad vs tiempo y aceleración vs tiempo realizados usando Excel por María Fernanda y Valeria. Dentro de la construcción hubo asesoría por parte del docente en lo correspondiente a lo procedimental, sin embargo, las estudiantes realizaron una construcción propia a partir de lo que ellas interpretaban y/o analizaban sin intervención del docente.

A continuación se presentan las respuestas dadas por María Fernanda a las preguntas planteadas.

Masa colgante ^m	250 g		
Distancia	Valor Utilizado (cm)	Tiempo	Valor Registrado (s)
d ₁	2	t ₁	1,41
d ₂	4	t ₂	2,00
d ₃	6	t ₃	2,45
d ₄	8	t ₄	2,83
d ₅	10	t ₅	3,16
d ₆	12	t ₆	3,46
d ₇	14	t ₇	3,74
d ₈	16	t ₈	4,00

(a)

Masa colgante= 500 g			
Distancia	Valor Utilizado	Tiempo	Valore Registrado
d ₁	2	t ₁	1,00
d ₂	4	t ₂	1,41
d ₃	6	t ₃	1,73
d ₄	8	t ₄	2,00
d ₅	10	t ₅	2,24
d ₆	12	t ₆	2,45
d ₇	14	t ₇	2,65
d ₈	16	t ₈	2,83

(b)

Masa colgante= 800 g			
Distancia	Valor Utilizado	Tiempo	Valore Registrado
d ₁	2	t ₁	0,71
d ₂	4	t ₂	1,00
d ₃	6	t ₃	1,22
d ₄	8	t ₄	1,41
d ₅	10	t ₅	1,58
d ₆	12	t ₆	1,73
d ₇	14	t ₇	1,87
d ₈	16	t ₈	2,00

(c)

Figura 15. Tablas construidas por María Fernanda y Valeria de distancia vs tiempo (a) masa colgante de 250g, (b) masa colgante de 500g y (c) masa colgante de 800g

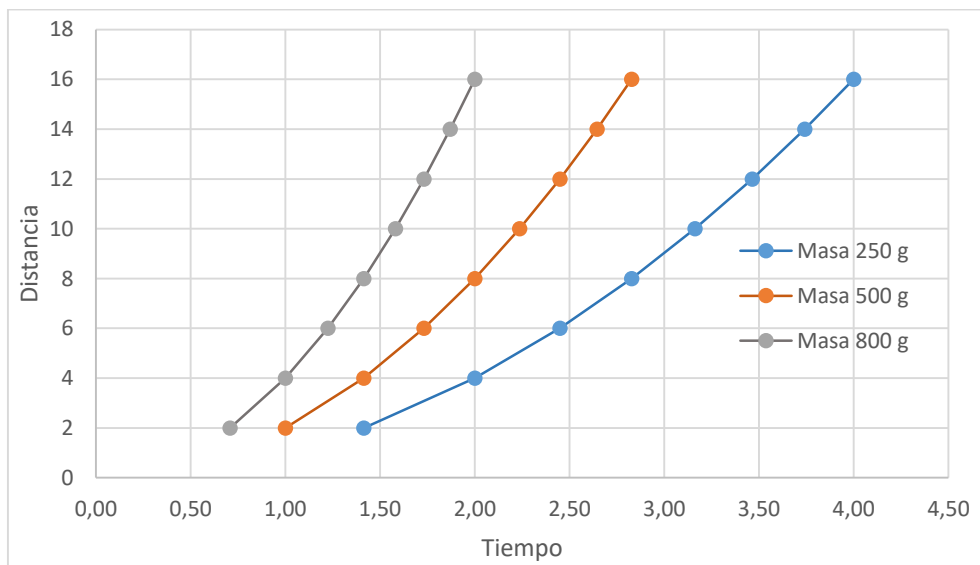


Figura 16. Gráficos distancia (cm) vs tiempo (s) realizados por María Fernanda y Valeria en Excel para las tres masas colgantes usadas en el experimento

Tablas y gráficas de posición:

- Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como distancia de los postes. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)
- ¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique

Las gráficas parecen ser parábolas.

La estudiante dice que las gráficas parecen ser parábolas, aunque no lo afirma ella acude a la visualización gráfica del fenómeno para dar la respuesta. Evidentemente estas gráficas, las tres parábolas, a diferencia de los gráficos construidos en internet por Brenda y Laura, son mucho más claros para asegurar que son parábolas. La respuesta de María Fernanda es acertada aunque se evidencia algo de duda, pero la duda puede estar más asociada a sus conceptos sobre parábolas que a una dificultad de visualización del fenómeno.

Masa colgante=	250 g	Incremento de	Valor
Razón de cambio (Cociente de incrementos)	Valor	Tiempo	
$\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$	$\frac{4 - 2}{2,00 - 1,41} = 3,4$	t_2	2,00
$\frac{d_3 - d_2}{t_3 - t_2}$	$\frac{6 - 4}{2,45 - 2,00} = 4,4$	t_3	2,45
$\frac{d_4 - d_3}{t_4 - t_3}$	$\frac{8 - 6}{2,83 - 2,45} = 5,3$	t_4	2,83
$\frac{d_5 - d_4}{t_5 - t_4}$	$\frac{10 - 8}{3,16 - 2,83} = 6,0$	t_5	3,16
$\frac{d_6 - d_5}{t_6 - t_5}$	$\frac{12 - 10}{3,46 - 3,16} = 6,6$	t_6	3,46
$\frac{d_7 - d_6}{t_7 - t_6}$	$\frac{14 - 12}{3,74 - 3,46} = 7,2$	t_7	3,74
$\frac{d_8 - d_7}{t_8 - t_7}$	$\frac{16 - 14}{4,00 - 3,74} = 7,7$	t_8	4,00

(a)

Masa colgante=	500 g	Incremento de	Valor
Razón de cambio (Cociente de incrementos)	Valor	Tiempo	
$\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$	$\frac{4 - 2}{1,41 - 1,00} = 4,8$	t_2	1,41
$\frac{d_3 - d_2}{t_3 - t_2}$	$\frac{6 - 4}{1,73 - 1,41} = 6,3$	t_3	1,73

$\frac{d_4 - d_3}{t_4 - t_3}$	$\frac{8 - 6}{2,00 - 1,73} = 7,5$	t_4	2,00
$\frac{d_5 - d_4}{t_5 - t_4}$	$\frac{10 - 8}{2,24 - 2,00} = 8,5$	t_5	2,24
$\frac{d_6 - d_5}{t_6 - t_5}$	$\frac{12 - 10}{2,45 - 2,24} = 9,4$	t_6	2,45
$\frac{d_7 - d_6}{t_7 - t_6}$	$\frac{14 - 12}{2,65 - 2,45} = 10,2$	t_7	2,65
$\frac{d_8 - d_7}{t_8 - t_7}$	$\frac{16 - 14}{2,83 - 2,65} = 10,9$	t_8	2,83

(b)

Masa colgante= Razón de cambio (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	de Valor
$\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$	$\frac{4 - 2}{1,00 - 0,77} = 6,8$	t_2	1,00
$\frac{d_3 - d_2}{t_3 - t_2}$	$\frac{6 - 4}{1,22 - 1,00} = 8,9$	t_3	1,22
$\frac{d_4 - d_3}{t_4 - t_3}$	$\frac{8 - 6}{1,41 - 1,22} = 10,6$	t_4	1,41
$\frac{d_5 - d_4}{t_5 - t_4}$	$\frac{10 - 8}{1,58 - 1,41} = 12,0$	t_5	1,58
$\frac{d_6 - d_5}{t_6 - t_5}$	$\frac{12 - 10}{1,73 - 1,58} = 13,3$	t_6	1,73
$\frac{d_7 - d_6}{t_7 - t_6}$	$\frac{14 - 12}{1,87 - 1,73} = 14,4$	t_7	1,87
$\frac{d_8 - d_7}{t_8 - t_7}$	$\frac{16 - 14}{2,00 - 1,87} = 15,5$	t_8	2,00

(c)

Figura 17. Tablas construidas por María Fernanda y Valeria de velocidad vs tiempo (a) masa colgante de 250g, (b) masa colgante de 500g y (c) masa colgante de 800g

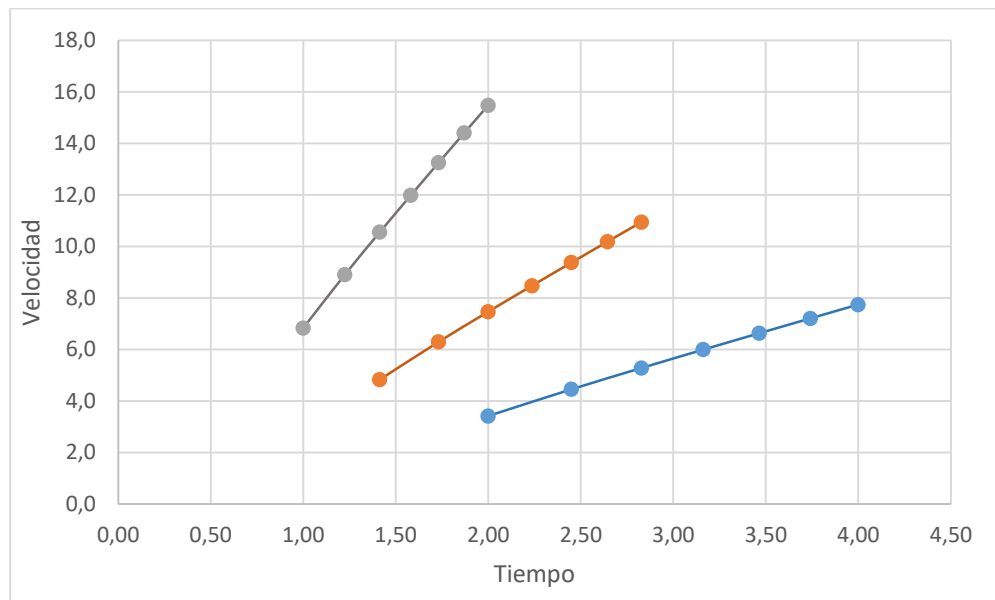


Figura 18. Gráficos velocidad vs tiempo realizados por María Fernanda y Valeria en Excel para las tres masas colgantes usadas en el experimento

Tablas y gráficas de velocidad:

- *¿Cómo se interpreta el cociente de incrementos que obtuvieron en las tablas anteriores? ¿Se puede estimar la velocidad con estos datos? ¿Por qué?*

Creo que si porque fue lo que hicimos.

Nuevamente de forma dudosa la estudiante da una respuesta acertada, en este caso supone que es correcto afirmarlo ya que fue el procedimiento que se siguió en la experimentación. No es una respuesta satisfactoria.

- *Es correcto afirmar que la velocidad es $v_{n+1} = \frac{d_{n+1}-d_n}{t_{n+1}-t_n}$ ¿Por qué?*

Sí, porque fue el procedimiento que seguimos.

La respuesta en términos generales es correcta, sin embargo, la explicación no es satisfactoria, ya que simplemente acude a la memorización del procedimiento realizado en la experimentación.

- *Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como velocidad. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)*
- *¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique*

Son líneas.

La respuesta corta de la estudiante no permite un análisis profundo, aunque permite destacar que la visualización le permitió decir que son líneas aunque su respuesta es incompleta ya que las líneas son rectas.

Masa colgante=	250 g		
Razón de cambio (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	de Valor
$\frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$	$\frac{4,4 - 3,4}{2,45 - 2,00} = 2,13$	t_3	2,45
$\frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3}$	$\frac{5,3 - 4,4}{2,83 - 2,45} = 2,12$	t_4	2,83
$\frac{v_5 - v_4}{t_5 - t_4}$	$\frac{6,0 - 5,3}{3,16 - 2,83} = 2,1$	t_5	3,16
$\frac{v_6 - v_5}{t_6 - t_5}$	$\frac{6,6 - 6,0}{3,46 - 3,16} = 2,1$	t_6	3,46
$\frac{v_7 - v_6}{t_7 - t_6}$	$\frac{7,2 - 6,6}{3,74 - 3,46} = 2,1$	t_7	3,74
$\frac{v_8 - v_7}{t_8 - t_7}$	$\frac{7,7 - 7,2}{4,00 - 3,74} = 2,1$	t_8	4,00

(a)

Masa colgante=	500 g.		
Razón de cambio (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	de Valor
$\frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$	$\frac{6,3 - 4,8}{1,73 - 1,41} = 4,6$	t_3	1,73
$\frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3}$	$\frac{7,5 - 6,3}{2,00 - 1,73} = 4,4$	t_4	2,00
$\frac{v_5 - v_4}{t_5 - t_4}$	$\frac{8,5 - 7,5}{2,24 - 2,00} = 4,3$	t_5	2,24

$\frac{v_6 - v_5}{t_6 - t_5}$	$\frac{9,4 - 8,5}{2,45 - 2,24} = 4,2$	t_6	2,45
$\frac{v_7 - v_6}{t_7 - t_6}$	$\frac{10,2 - 9,4}{2,65 - 2,45} = 4,2$	t_7	2,65
$\frac{v_8 - v_7}{t_8 - t_7}$	$\frac{10,9 - 10,2}{2,83 - 2,65} = 4,1$	t_8	2,83

(b)

Masa colgante=			
Razón de cambio (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	de Valor
$\frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$	$\frac{8,9 - 6,8}{1,22 - 1,00} = 9,2$	t_3	1,22
$\frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3}$	$\frac{10,6 - 8,9}{1,41 - 1,22} = 8,7$	t_4	1,41
$\frac{v_5 - v_4}{t_5 - t_4}$	$\frac{12,0 - 10,6}{1,58 - 1,41} = 8,5$	t_5	1,58
$\frac{v_6 - v_5}{t_6 - t_5}$	$\frac{13,3 - 12,0}{1,73 - 1,58} = 8,4$	t_6	1,73
$\frac{v_7 - v_6}{t_7 - t_6}$	$\frac{14,4 - 13,3}{1,87 - 1,73} = 8,3$	t_7	1,87
$\frac{v_8 - v_7}{t_8 - t_7}$	$\frac{15,5 - 14,4}{2,00 - 1,87} = 8,14$	t_8	2,00

(c)

Figura 19. Tablas construidas por María Fernanda y Valeria de aceleración vs tiempo (a) masa colgante de 250g, (b) masa colgante de 500g y (c) masa colgante de 800g

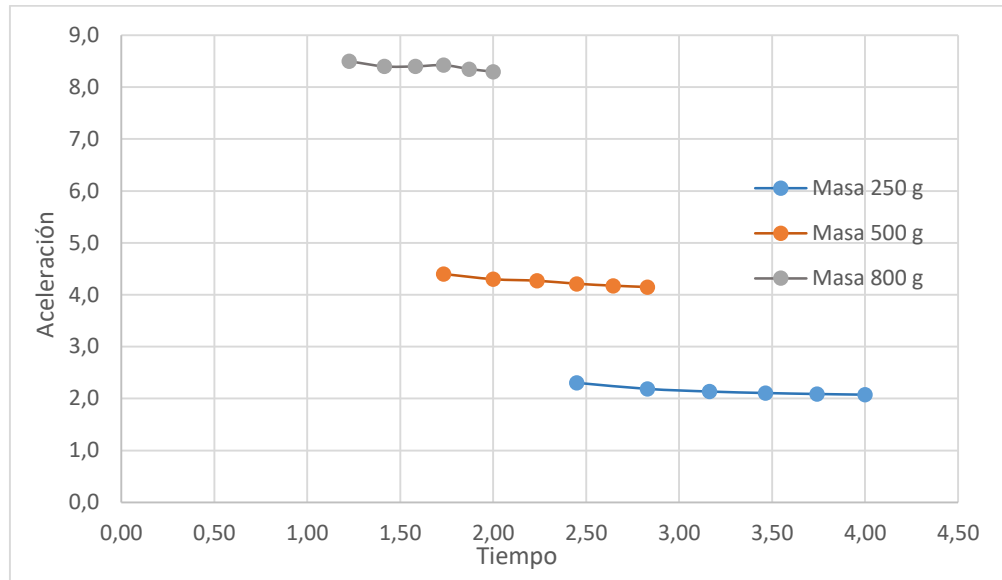


Figura 20. Gráficos distancia vs tiempo realizados por María Fernanda y Valeria en Excel para las tres masas colgantes usadas en el experimento.

Tablas y gráficas de aceleración:

- *¿Cómo se interpreta el cociente de incrementos que completaron en las tablas anteriores? ¿Se puede estimar la aceleración con estos datos? ¿Por qué?*

Si.

La respuesta de la estudiante no permite un análisis.

- *Es correcto afirmar que la aceleración es $a_{n+1} = \frac{v_{n+1}-v_n}{t_{n+1}-t_n}$ ¿Por qué?*

Si.

La respuesta es correcta pero al no dar una explicación no permite un análisis.

- *Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como aceleración. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)*

- *¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique*

Son diferentes a las otras, no sé qué sea.

Nuevamente la visualización no permite que la estudiante acierte en su respuesta. Los datos procesado tienen unas variaciones en sus decimales y no se logra establecer un valor fijo de aceleración por este motivo no logra definir un comportamiento haciendo uso de la visualización. Este problema se puede solucionar argumentando comportamientos aproximados, situación que a nivel físico se usa muy a menudo. Ante la pregunta realizada a la estudiante *¿Aproximadamente (en lenguaje común más o menos) en el eje de aceleración se tiene un valor fijo?*

La respuesta de la estudiante fue la siguiente:

Si.

Poder visualizar el fenómeno físico permite entender un comportamiento físico matemático a nivel escolar, en este caso la estudiante reconoce un valor constante de aceleración para el movimiento uniformemente acelerado fenómeno que se presentó en el experimento.

Conclusiones finales:

- *En términos prácticos ¿cómo modelaría la distancia vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?*

Una ecuación que tenga una figura parecida.

Aunque la respuesta de la estudiante no es del todo satisfactoria, en este punto se observa que el problema radica en una deficiencia de conceptos algebraicos ya que aunque reconoce que son parábolas no logra llegar a la respuesta de la ecuación de la parábola como ecuación algebraica.

- *En términos prácticos ¿cómo modelaría la velocidad vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?*

Una ecuación que tenga una figura parecida.

Aquí ocurre exactamente lo mismo del punto inmediatamente anterior.

- *En términos prácticos ¿cómo modelaría la aceleración vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?*

Una ecuación que tenga una figura parecida.

En este punto se confirma que la estudiante no logra reconocer expresiones algebraicas a partir de figuras en el plano, esto corrobora sus inconvenientes a nivel algebraico.

- *¿En dónde se puede apreciar el concepto de derivada en la experimentación cinemática realizada en laboratorio de física?*

Debe ser cuando se hacían las divisiones.

La estudiante reconoce la derivada como las divisiones usadas. Aunque la respuesta no está mal, ella pudo haber contestado: en la velocidad y en la aceleración.

- *¿Matemáticamente qué es la velocidad? Y ¿físicamente?*

Es la división de la distancia entre el tiempo.

La estudiante da una respuesta que corresponde a una definición física, no da una definición matemática haciendo uso del concepto de derivada como razón de cambio.

- *¿Matemáticamente qué es la aceleración? Y ¿físicamente?*

Es la división de la velocidad entre el tiempo.

Nuevamente la estudiante da una respuesta que corresponde a una definición física, no da una definición matemática haciendo uso del concepto de derivada como razón de cambio.

Consideraciones cinéticas:

- *¿Qué efecto tuvo la masa colgante sobre la velocidad y la aceleración del carrito?*

Aumentaba la velocidad y aceleración.

Haciendo uso solamente de la observación del experimento la estudiante logra responder la pregunta del efecto que producía, en la velocidad y aceleración, incrementar la masa colgante.

- *¿Se puede modelar dicho efecto? ¿Cómo?*

Haciendo lo mismo que para este trabajo.

La estudiante acude a resumir el proceso realizado de modelación que se usó en la experimentación cinemática en el carril de aire para responder. La respuesta de la estudiante no es satisfactoria.

8.3.3 Post-test (Aplicación nuevamente de saberes previos)

Pregunta 1 ¿Qué entiende por derivada?

R/ Es la razón de cambio con el tiempo

Pregunta 2 ¿Qué entiende por razón de cambio?

R/ Es la derivada

Pregunta 3 ¿Qué entiende por cociente de incrementos?

R/ Creo que es lo mismo que razón de cambio

Pregunta 4 En su vida diaria ¿Dónde se puede observar la aplicación del concepto de derivada?

R/ Cuando voy en carro o en bicicleta

Pregunta 5 ¿Qué entiende por posición, cambio de posición, velocidad, aceleración y tiempo?

R/ Es el lugar, cambiar de lugar, velocidad es la razón de cambio, aceleración es razón de cambio y tiempo se indica con el reloj, las horas, días, etc.

Pregunta 6 ¿Qué entiende por modelación matemática a nivel escolar?

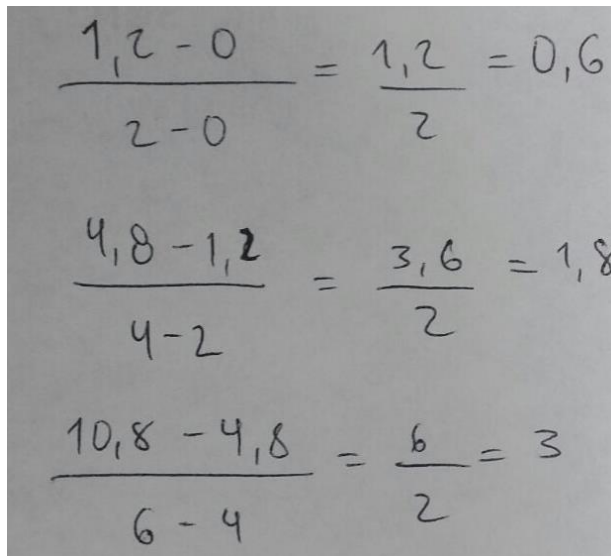
R/ Es usar las tablas y hacer los gráficos

Pregunta 7 ¿Cómo puede identificar en una situación física las variables y constantes del problema, es decir la identificación de lo que varía y lo que permanece constante?

R/ Se miden y se ve si cambian o no

Pregunta 8 En la gráfica mostrada en la figura de abajo se presenta la distancia recorrida (y en unidades de longitud) por un vehículo contra el tiempo transcurrido (x en unidades de tiempo) para recorrer dicha distancia ¿Puede estimar la velocidad del vehículo cuando lleva 2, 4 o 6 (unidades de tiempo)? ¿Son iguales dichas velocidades? ¿Por qué?

R/



The image shows three handwritten calculations for velocity (v) at different time intervals (t):

$$\frac{1,2 - 0}{2 - 0} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$
$$\frac{4,8 - 1,2}{4 - 2} = \frac{3,6}{2} = 1,8$$
$$\frac{10,8 - 4,8}{6 - 4} = \frac{6}{2} = 3$$

Figura 21. Respuesta de María Fernanda a la pregunta 8 del pos-test.

Haciendo lo de las divisiones de la razón de cambio parece que no pero no sé cuál sea la respuesta correcta porque cogí dos números siempre.

Pregunta 9 Modelación: El tiempo total necesario para detener un automóvil después de percibir un peligro, se compone del tiempo de reacción (tiempo entre el reconocimiento del peligro y la aplicación del freno). La Tabla 3 muestra las distancias de parada en metros (distancia que necesita para detenerse totalmente) de un automóvil que viaja a las velocidades V (m/s) desde el instante que se observa el peligro. Una compañía que fabrica autos realiza pruebas con carros manejados a control remoto y para garantizar que estos tienen distancia promedio de parada aceptables se plantean las siguientes cuestiones.

Velocidad V (m/s)	0	5	10	15	20	25	30	35
Distancia de parada $d(m)$	0	0,9	1,6	2,7	4,1	6,2	8,8	11,9

- ¿Es un comportamiento lineal? ¿Por qué?
- Si un automóvil viaja a una velocidad de 40 m/s y en esos momentos está colocado un obstáculo a 14.0 m. frente a él, al aplicar el freno ¿choca el auto contra el obstáculo? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el tiempo de frenado para valores comprendidos: a) entre los 20 y 30 m/s. b) de 30 a 35 m/s?
 - ¿Para qué velocidad el tiempo de frenado fue mayor y cuál fue?

R/

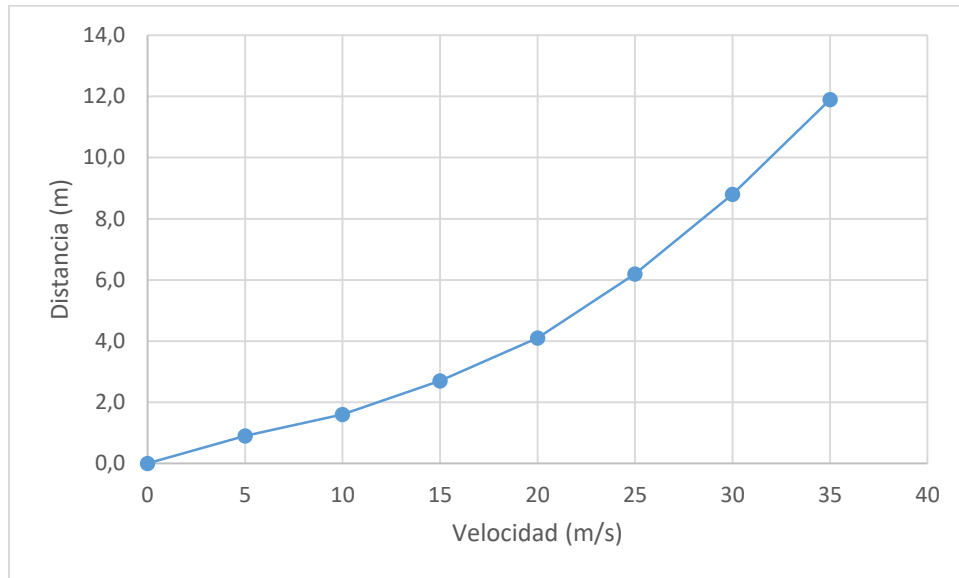


Figura 22. Gráfico distancia (m) vs velocidad (m/s) realizado por María Fernanda en Excel para dar respuesta a la última pregunta del post-test

- No es lineal, pero no sé si sea una parábola no parece mucho a las parábolas del laboratorio
 - No sé, no veo 40 en las tablas
 - No sé cómo encontrar el tiempo

Ante la respuesta inmediatamente anterior hubo una intervención adicional de parte del docente, en este caso se le preguntó a la estudiante si teniendo datos de velocidad y posición o distancia se puede hallar el tiempo, ella no lograba llegar a una respuesta, sin embargo haciendo un análisis de unidades se pudo lograr que la estudiante concluyera que la división entre distancia y velocidad era el tiempo. Con esta intervención la estudiante pudo responder las preguntas siguientes.

$$t = \frac{8,8 \text{ m} - 4,1 \text{ m}}{30 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}} = \frac{4,7 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} = 0,47 \text{ s}$$

$$t = \frac{11,9 \text{ m} - 8,8 \text{ m}}{35 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}} = \frac{3,1 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 0,62 \text{ s}$$

$$t_1 = \frac{0,9 - 0}{5 - 0} = \frac{0,9}{5} = 0,18 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{1,6 - 0,9}{10 - 5} = \frac{0,7}{5} = 0,14 \text{ s}$$

$$t_3 = \frac{2,7 - 1,6}{15 - 10} = \frac{1,1}{5} = 0,22 \text{ s}$$

$$t_4 = \frac{4,1 - 2,7}{20 - 15} = \frac{1,4}{5} = 0,28 \text{ s}$$

$$t_5 = \frac{6,2 - 4,1}{25 - 20} = \frac{2,1}{5} = 0,42 \text{ s}$$

$$t_6 = \frac{8,8 - 6,2}{30 - 25} = \frac{2,6}{5} = 0,52 \text{ s}$$

$$t_7 = \frac{11,9 - 8,8}{35 - 30} = \frac{3,1}{5} = 0,62 \text{ s}$$

R | El tiempo es 0,62 segundos y la velocidad es 30 o 35
No estoy segura

Figura 23. Respuesta de María Fernanda a las dos últimas preguntas del punto 9 del post-test.

El caso de María Fernanda muestra diferentes aspectos (Pregunta 1 a Pregunta 9) hubo una mejoría en sus respuestas respecto al pre-test:

- Pregunta 1. La respuesta de la estudiante se limita a dar la definición de derivada como razón de cambio respecto al tiempo, claramente este es un error ya que la definición se solicita de manera general, sin embargo, esto evidencia que al tratar temas específicos de conceptos generales las estudiantes tienden a quedarse con el específico y no llegar a un concepto global o general.
- Pregunta 2. La respuesta es acertada.
- Pregunta 3. Acierta a decir que es lo mismo que razón de cambio, su respuesta es satisfactoria.
- Pregunta 4. La estudiante da dos ejemplos cinemáticos de su vida diaria para explicar donde se puede observar una aplicación del concepto de derivada, este ejemplo es cinemático por ende ella está usando el aprendizaje proveniente de la experimentación para dar un ejemplo en su vida diaria.
- Pregunta 5. Las definiciones en este punto son intuitivas. Matemáticamente trata de responder para la velocidad y aceleración, sin embargo la definición es incompleta ya que decir solamente razón de cambio no es suficiente para definir la velocidad y el tiempo. Aparentemente está usando la memorización.
- Pregunta 6. La estudiante asocia la modelación a aspectos del modelado inductivo muy específicos, como hacer tablas y gráficas y no logra reconocer aspectos más generales. Esto evidencia que este proceso implicó que las estudiantes concibieran situaciones específicas pero no globales o generales en muchos casos.
- Pregunta 7. Logra dar una respuesta bastante práctica a la pregunta y lo hace, muy probablemente, de acuerdo a su experiencia en experimentación realizada en este trabajo.
- Pregunta 8. Aunque la estudiante logra responder la pregunta de manera acertada mostrando un avance en el manejo del concepto de derivada como razón de cambio a diferencia del pre-test no puede dar una respuesta con gran convicción ya que argumenta que siempre usó dos número, este pensamiento surge, aparentemente, porque ella en sus cálculos numéricos repite las velocidades en dos ecuaciones. El procedimiento es correcto pero esto produjo confusión en la estudiante.
- Pregunta 9. La estudiante responde la mayoría de las preguntas de manera satisfactoria. Presenta confusión en aspectos que no tiene visualmente en la gráfica, nuevamente la dificultad del modelado inductivo hace que las estudiantes se limiten a dar respuestas de forma local pero no global.

8.4 Análisis de Valeria

A continuación se presentan todas las respuestas dadas por la estudiante en cada intervención, así mismo se realiza el análisis de cada una de ellas.

8.4.1 Pre-test (Saberes previos)

Pregunta 1 ¿Qué entiende por derivada?

R/ Es algo que relaciona el cambio entre dos variables por medio de una división.

Pregunta 2 ¿Qué entiende por razón de cambio?

R/ Es cuando cambian dos variables y se dividen

Pregunta 3 ¿Qué entiende por cociente de incrementos?

R/ No se

Pregunta 4 En su vida diaria ¿Dónde se puede observar la aplicación del concepto de derivada?

R/ No lo tengo claro

Pregunta 5 ¿Qué entiende por posición, cambio de posición, velocidad, aceleración y tiempo?

R/ Posición se define como un lugar en el espacio, usando coordenadas, cambio de posición es cambiar esa posición, velocidad es el cambio de posición en el tiempo, aceleración es el cambio de velocidad en el tiempo y tiempo es lo que transcurre de un suceso a otro, se mide en segundo en el sistema internacional.

Pregunta 6 ¿Qué entiende por modelación matemática a nivel escolar?

R/ Es usar las ecuaciones para mostrar algo

Pregunta 7 ¿Cómo puede identificar en una situación física las variables y constantes del problema, es decir la identificación de lo que varía y lo que permanece constante?

R/ Las variables son las que cambian al pasar el tiempo y las constantes son las que no cambian

Pregunta 8 En la gráfica mostrada en la figura de abajo se presenta la distancia recorrida (y en unidades de longitud) por un vehículo contra el tiempo transcurrido (x en unidades de tiempo) para recorrer dicha distancia ¿Puede estimar la velocidad del vehículo cuando lleva 2, 4 o 6 (unidades de tiempo)? ¿Son iguales dichas velocidades? ¿Por qué?
R/ La velocidad no es igual, porque no es una recta entonces la velocidad no es igual en los puntos.

Pregunta 9 Modelación: El tiempo total necesario para detener un automóvil después de percibir un peligro, se compone del tiempo de reacción (tiempo entre el reconocimiento del peligro y la aplicación del freno). La Tabla 3 muestra las distancias de parada en metros (distancia que necesita para detenerse totalmente) de un automóvil que viaja a las velocidades V (m/s) desde el instante que se observa el peligro. Una compañía que fabrica autos realiza pruebas con carros manejados a control remoto y para garantizar que estos tienen distancia promedio de parada aceptables se plantean las siguientes cuestiones.

Velocidad V (m/s)	0	5	10	15	20	25	30	35
Distancia de parada d(m)	0	0,9	1,6	2,7	4,1	6,2	8,8	11,9

- ¿Es un comportamiento lineal? ¿Por qué?
- Si un automóvil viaja a una velocidad de 40 m/s y en esos momentos está colocado un obstáculo a 14.0 m. frente a él, al aplicar el freno ¿choca el auto contra el obstáculo? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el tiempo de frenado para valores comprendidos: a) entre los 20 y 30 m/s. b) de 30 a 35 m/s?
 - ¿Para qué velocidad el tiempo de frenado fue mayor y cuál fue?

R/ No sé cómo empezar

El caso de Valeria muestra diferentes aspectos (Pregunta 1 a Pregunta 9):

- Pregunta 1. La estudiante da una definición que podría relacionarse con un cociente de incrementos o razón de cambio, la respuesta no es intuitiva pero puede ser memorística.
- Pregunta 2. La estudiante da un concepto muy básico de razón de cambio. Esta muestra hasta estas dos preguntas una apropiación conceptual un poco más profunda que sus compañeras. La condición de saberes previos es diferente.
- Pregunta 3. Aunque la estudiante puede definir de forma básica derivada y razón de cambio se confunde con el término cociente de incrementos y dice no saber qué es.
- Pregunta 4. En este caso y a pesar de que la estudiante logra definir los conceptos de derivada, puede ser memorística, no logra reconocer una aplicación en su vida diaria.
- Pregunta 5. En este punto se observan varias cosas. La estudiante define formalmente los conceptos físicos. Existe una coherencia en sus respuestas, relaciona la velocidad de cambio de posición respecto al tiempo y así mismo lo hace con la aceleración, además hace referencia a sistema de coordenadas para definir posición y menciona el sistema internacional de unidades para referir la unidad de medida del tiempo.
- Pregunta 6. En términos generales su respuesta es acertada ya que un modelo matemático puede ser perfectamente una ecuación.
- Pregunta 7. La estudiante da una respuesta considerando el tiempo como la variable independiente en cualquier fenómeno y con base en este define las constantes y variables del problema. Este tipo de análisis puede aplicar en algunos casos particulares. Sin embargo, a nivel general la consideración puede ser errónea.
- Pregunta 8. La estudiante da un respuesta conceptual totalmente cierta, aunque no da valores numéricos logra identificar en el problema lo que está sucediendo, sin importante que su respuesta haya sido netamente conceptual.
- Pregunta 9. La estudiante al parecer podría responder de manera acertada alguna de las preguntas planteadas, sin embargo, manifiesta no saber por dónde empezar. Este punto es bastante dicente ya que muchos estudiantes que pueden dar respuestas destacadas en matemáticas no lo hacen porque no logran plantear la situación problema en matemáticas de forma clara.

8.4.2 Experimentación cinemática

A continuación se presentan las respuestas dadas por Valeria a las preguntas planteadas.

Tablas y gráficas de posición:

- *Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como distancia de los postes. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)*
- *¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique*

Es un comportamiento parabólico, porque las gráficas muestran parábolas.

La estudiante responde de manera acertada la pregunta. La visualización del comportamiento geométrico del fenómeno físico le permitió elaborar una respuesta totalmente correcta.

Tablas y gráficas de velocidad:

- *¿Cómo se interpreta el cociente de incrementos que obtuvieron en las tablas anteriores? ¿Se puede estimar la velocidad con estos datos? ¿Por qué?*

Sí, porque el cociente de incrementos es la razón de cambio y usando la posición y el tiempo se puede lograr la velocidad.

La estudiante lograr hacer una muy buena asimilación del concepto de razón de cambio que matemáticamente se expresa como cociente de incrementos para dar la respuesta a la pregunta que se plantea.

- *Es correcto afirmar que la velocidad es $v_{n+1} = \frac{d_{n+1}-d_n}{t_{n+1}-t_n}$ ¿Por qué?*

Sí, porque está dividiendo posición sobre tiempo.

La respuesta en términos generales es correcta, sin embargo, faltó incluir o visibilizar el concepto matemático de razón de cambio en la respuesta.

- *Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como velocidad. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)*
- *¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique*

Es un comportamiento lineal, porque las gráficas muestran líneas rectas.

La estudiante responde de manera acertada la pregunta. La visualización del comportamiento geométrico del fenómeno físico le permitió elaborar una respuesta totalmente correcta.

Tablas y gráficas de aceleración:

- *¿Cómo se interpreta el cociente de incrementos que completaron en las tablas anteriores? ¿Se puede estimar la aceleración con estos datos? ¿Por qué?*

El cociente de incrementos entre la velocidad y el tiempo es la razón de cambio de la velocidad sobre el tiempo y entonces es correcto afirmar que se puede hallar la aceleración de esta forma.

La respuesta y el análisis de la estudiante demuestran una gran apropiación del tema, es evidente que al tener unos conocimientos previos mucho más avanzados que sus demás compañeras puede lograr hacer un análisis más profundo y dar respuestas mucho más elaboradas pero sobre todo correctas como en este caso.

- *Es correcto afirmar que la aceleración es $a_{n+1} = \frac{v_{n+1}-v_n}{t_{n+1}-t_n}$ ¿Por qué?*

Sí, porque está dividiendo velocidad sobre tiempo.

La respuesta en términos generales es correcta, sin embargo, faltó incluir o visibilizar el concepto matemático de razón de cambio en la respuesta.

- *Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como aceleración. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)*
- *¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique*

Parece tener un comportamiento constante, pero varía en algunos puntos.

La respuesta de la estudiante es muy buena. Sin embargo, se evidencia un problema en la visualización ya que esta situación se presenta por las variaciones decimales debido al procesamiento matemático de los datos. Este problema se puede solucionar argumentando comportamientos aproximados, situación que a nivel físico se usa muy a menudo. Ante la pregunta realizada a la estudiante *¿Aproximadamente (en lenguaje común más o menos) en el eje de aceleración se tiene un valor fijo?*

La respuesta de la estudiante fue la siguiente:

Entonces es un comportamiento aproximadamente constante.

Poder visualizar el fenómeno físico permite entender un comportamiento físico matemático a nivel escolar, en este caso la estudiante reconoce un valor constante de aceleración para el movimiento uniformemente acelerado fenómeno que se presentó en el experimento.

Conclusiones finales:

- *En términos prácticos ¿cómo modelaría la distancia vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?*

Yo modelaría usando los datos de tiempo y posición para después graficarlos y ver que figura aparece. En este caso usaría la ecuación de la parábola.

La estudiante da una respuesta de un proceso de modelado inductivo usando una metodología propuesta en la presente estrategia didáctica y finaliza su respuesta diciendo

que usaría la ecuación de la parábola para representar el comportamiento entre posición vs tiempo en el problema del carril de aire. Este proceso que describe la estudiante muestra claramente un aprendizaje tanto metodológico como conceptual.

- *En términos prácticos ¿cómo modelaría la velocidad vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?*

Usando los datos de posición y tiempo, después hallando la razón de cambio de la posición con el tiempo y después graficando para ver el comportamiento. Yo usaría la ecuación de la recta.

Aquí ocurre exactamente lo mismo del punto inmediatamente anterior, pero además se destaca que en el procedimiento usa el concepto de derivada como razón de cambio para encontrar la velocidad. Además modela algebraicamente el problema de forma correcta usando la ecuación de la recta como modelo matemático para describir el comportamiento entre velocidad vs tiempo en el experimento de carril de aire.

- *En términos prácticos ¿cómo modelaría la aceleración vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?*

Usando los datos de posición para hallar con la razón de cambio la velocidad y después con la velocidad usar la razón de cambio para hallar la aceleración. En este caso usaría un número constante.

Nuevamente la estudiante hace una descripción correcta de un procedimiento de modelamiento inductivo. Hace una aplicación incompleta del concepto de derivada como razón de cambio ya que se le olvida decir que es la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo. Sin embargo, parece ser un tema de descuido a la hora de escribir más que un tema de aprendizaje ya que ella ha evidenciado una buena apropiación del concepto a lo largo de sus respuestas. Por otro lado, da una respuesta redundante al decir que modelaría con un número constante la aceleración, no obstante la respuesta es correcta ya que la redundancia no la invalida siendo este movimiento un movimiento uniformemente acelerado en el cual su principal característica es la aceleración constante.

- *¿En dónde se puede apreciar el concepto de derivada en la experimentación cinemática realizada en laboratorio de física?*

Cuando se halla la velocidad y a la aceleración usando el cociente de incrementos la razón de cambio

La respuesta de la estudiante es totalmente acertada.

- *¿Matemáticamente qué es la velocidad? Y ¿físicamente?*

Matemáticamente es la razón de cambio de la posición sobre el tiempo y físicamente es el cambio de posición en el tiempo.

La respuesta de la estudiante es totalmente acertada.

- *¿Matemáticamente qué es la aceleración? Y ¿físicamente?*

Matemáticamente es la razón de cambio de la velocidad sobre el tiempo y físicamente es el cambio de velocidad en el tiempo.

La respuesta de la estudiante es totalmente acertada.

Consideraciones cinéticas:

- *¿Qué efecto tuvo la masa colgante sobre la velocidad y la aceleración del carrito?*

Cuando se aumentaba la masa la velocidad aumentaba y la aceleración también.

Haciendo uso solamente de la observación del experimento la estudiante logra responder la pregunta del efecto que producía, en la velocidad y aceleración, incrementar la masa colgante.

- *¿Se puede modelar dicho efecto? ¿Cómo?*

Se puede modelar usando tablas, en una columna se usa la masa y en las otras la velocidad y aceleración. Después se grafica y se mira qué figura aparece.

La estudiante propone hacer tablas y usar como variables la masa y la velocidad y la masa y la aceleración. Claramente es una propuesta que nace después de ella haber tenido la experiencia de la experimentación realizada en la presente propuesta didáctica. La propuesta de la estudiante puede funcionar para el caso masa vs aceleración pero no funcionaría para el caso de masa vs velocidad ya que la velocidad está cambiando todo el tiempo y de este punto la estudiante no se percató.

8.4.3 Post-test (Aplicación nuevamente de saberes previos)

Pregunta 1 ¿Qué entiende por derivada?

R/ Es la razón de cambio de una variable respecto a otra.

Pregunta 2 ¿Qué entiende por razón de cambio?

R/ Es la derivada

Pregunta 3 ¿Qué entiende por cociente de incrementos?

R/ Es la fórmula que se usa para determinar la razón de cambio

Pregunta 4 En su vida diaria ¿Dónde se puede observar la aplicación del concepto de derivada?

R/ Cuando estoy en movimiento, cuando voy en carro y cambia de velocidad, cuando estoy caminando y después corro, en varias cosas.

Pregunta 5 ¿Qué entiende por posición, cambio de posición, velocidad, aceleración y tiempo?

R/ Posición se define como un lugar en el espacio, usando coordenadas, cambio de posición es cambiar esa posición, velocidad es el cambio de posición en el tiempo y es la derivada o la razón de cambio de la posición respecto al tiempo, aceleración es el cambio de velocidad en el tiempo y es la derivada o la razón de cambio respecto al tiempo y

tiempo es lo que transcurre de un suceso a otro, se mide en segundo en el sistema internacional.

Pregunta 6 ¿Qué entiende por modelación matemática a nivel escolar?

R/ Es usar ecuaciones, tablas, gráficas para decir comportamientos, lineal, parabólico u otros en movimientos físicos y también creo que puede ser para otros movimientos o cosas físicas.

Pregunta 7 ¿Cómo puede identificar en una situación física las variables y constantes del problema, es decir la identificación de lo que varía y lo que permanece constante?

R/ Se pueden medir y después determinar si cambian con el tiempo o no.

Pregunta 8 En la gráfica mostrada en la figura de abajo se presenta la distancia recorrida (y en unidades de longitud) por un vehículo contra el tiempo transcurrido (x en unidades de tiempo) para recorrer dicha distancia ¿Puede estimar la velocidad del vehículo cuando lleva 2, 4 o 6 (unidades de tiempo)? ¿Son iguales dichas velocidades? ¿Por qué?

R/

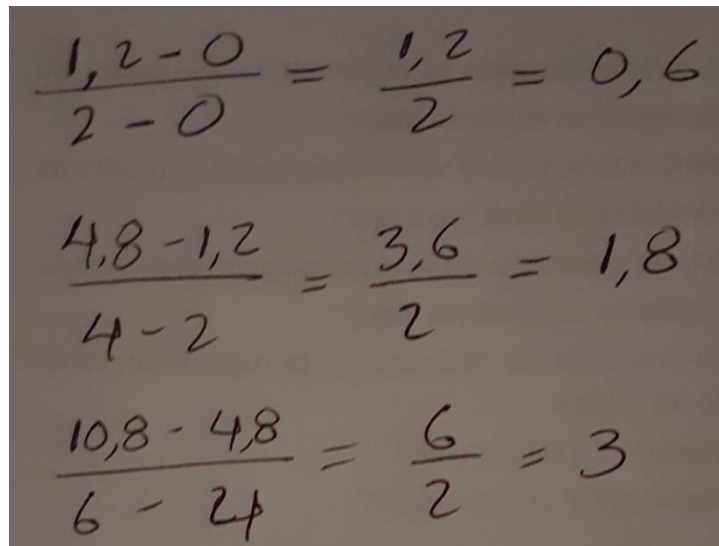

$$\frac{1,2 - 0}{2 - 0} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$
$$\frac{4,8 - 1,2}{4 - 2} = \frac{3,6}{2} = 1,8$$
$$\frac{10,8 - 4,8}{6 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

Figura 24. Respuesta de Valeria a la pregunta 8 del pos-test.

No son iguales las velocidades porque aplicando la razón de cambio da números diferentes.

Pregunta 9 Modelación: El tiempo total necesario para detener un automóvil después de percibir un peligro, se compone del tiempo de reacción (tiempo entre el reconocimiento del peligro y la aplicación del freno). La Tabla 3 muestra las distancias de parada en metros (distancia que necesita para detenerse totalmente) de un automóvil que viaja a las velocidades V (m/s) desde el instante que se observa el peligro. Una compañía que fabrica autos realiza pruebas con carros manejados a control remoto y para garantizar que estos tienen distancia promedio de parada aceptables se plantean las siguientes cuestiones.

Velocidad V (m/s)	0	5	10	15	20	25	30	35
Distancia de parada d (m)	0	0,9	1,6	2,7	4,1	6,2	8,8	11,9

- ¿Es un comportamiento lineal? ¿Por qué?
- Si un automóvil viaja a una velocidad de 40 m/s y en esos momentos está colocado un obstáculo a 14.0 m. frente a él, al aplicar el freno ¿choca el auto contra el obstáculo? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el tiempo de frenado para valores comprendidos: a) entre los 20 y 30 m/s. b) de 30 a 35 m/s?
 - ¿Para qué velocidad el tiempo de frenado fue mayor y cuál fue?

R/

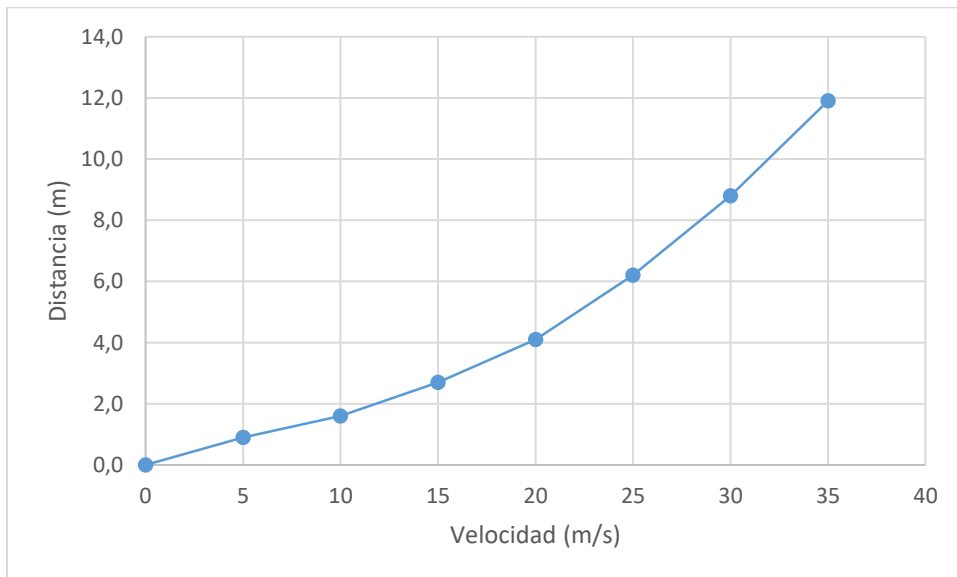


Figura 25. Gráfico distancia (m) vs velocidad (m/s) realizado por Valeria en Excel para dar respuesta a la última pregunta del post-test

- No es lineal, es un comportamiento parabólico
- No sé qué distancia recorre a 40 m/s no aparece en la gráfica

$$t = \frac{8,8 \text{ m} - 4,1 \text{ m}}{30 \text{ m/s} - 20 \text{ m/s}} = \frac{4,7 \text{ m}}{10 \text{ m/s}} = 0,47 \text{ s}$$

$$t = \frac{11,9 \text{ m} - 8,8 \text{ m}}{35 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}} = \frac{3,1 \text{ m}}{5 \text{ m/s}} = 0,62 \text{ s}$$

$$t_1 = \frac{0,9 - 0}{5 - 0} = \frac{0,9}{5} = 0,18 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{1,6 - 0,9}{10 - 5} = \frac{0,7}{5} = 0,14 \text{ s}$$

$$t_3 = \frac{2,7 - 1,6}{15 - 10} = \frac{1,1}{5} = 0,22 \text{ s}$$

$$t_4 = \frac{4,1 - 2,7}{20 - 15} = \frac{1,4}{5} = 0,28 \text{ s}$$

$$t_5 = \frac{6,2 - 4,1}{25 - 20} = \frac{2,1}{5} = 0,42 \text{ s}$$

$$t_6 = \frac{8,8 - 6,2}{30 - 25} = \frac{2,6}{5} = 0,52 \text{ s}$$

$$t_7 = \frac{11,9 - 8,8}{35 - 30} = \frac{3,1}{5} = 0,62 \text{ s}$$

El mayor tiempo es 0,62 s y la velocidad es entre 30 y 35

Figura 26. Respuesta de Valeria a las dos últimas preguntas del punto 9 del pos-test.

El caso de Valeria muestra diferentes aspectos (Pregunta 1 a Pregunta 9) aunque la apropiación conceptual de Valeria fue muy superior en el pre-test en comparación a sus compañeras hubo también en este caso una mejoría en sus respuestas respecto al pre-test:

- Pregunta 1. La estudiante da una respuesta totalmente acertada sin ningún tipo de error.
- Pregunta 2. La respuesta es correcta.
- Pregunta 3. En este punto la estudiante muestra el cociente de incrementos como una fórmula y dice que es la aplicación del concepto de razón de cambio. La respuesta totalmente acertada sin ningún tipo de error.
- Pregunta 4. La estudiante da varios ejemplos en donde se puede ver la aplicación del concepto de derivada para aspectos cinemáticos. Ella está usando el aprendizaje proveniente de la experimentación para dar un ejemplo en su vida diaria.
- Pregunta 5. En este punto se observan varias cosas. La estudiante define formalmente los conceptos físicos y matemáticos de velocidad y aceleración, es decir enriqueció su apropiación conceptual. Existe una coherencia en sus respuestas, relaciona la velocidad de cambio de posición respecto al tiempo y da su definición matemática de forma correcta y así mismo lo hace con la aceleración.
- Pregunta 6. La estudiante logra enriquecer su definición de modelación matemática después de tener una experiencia en el laboratorio de física. Un aspecto a destacar es que logra ir más allá de lo tratado en la experimentación situación que por lo regular no se presentó con sus demás compañeras.
- Pregunta 7. Logra dar una respuesta bastante práctica a la pregunta y lo hace, muy probablemente, de acuerdo a su experiencia en experimentación realizada en este trabajo.
- Pregunta 8. La estudiante pasa de dar una respuesta conceptual (en el pre-test) a una respuesta numéricamente correcta que le permite argumentar su respuesta. Se observa una adecuada aplicación del concepto de razón de cambio como derivada.
- Pregunta 9. Siguiendo el proceso de modelado inductivo, la estudiante logra responder de manera acertada casi la mayoría de las preguntas. Ella logró identificar sin intervención del docente la forma de estimar los tiempos de frenado. Sin embargo, no logró responder la pregunta para la velocidad de 40 m/s ya que no pudo identificar el valor en las tablas, aquí se observa que aunque no la afectó la forma localizada de llevar a cabo el proceso de modelado inductivo igual que al resto de sus compañeras, el no poder visualizar el valor numérico limitó la posibilidad de responder a la pregunta.

8.5 Consideraciones generales del análisis y evaluación de resultados

En la Tabla 2 se indican los niveles de desempeño para la evaluación de resultados. Estos niveles de desempeño son los recomendados por el Ministerio de Educación Nacional, además se le asignó una escala equivalente cuantitativa que permite el procesamiento de los datos desde su manipulación numérica.

Tabla 2. Niveles de desempeño para la evaluación de resultados

Niveles de desempeño				
Escala cualitativa	Bajo	Básico	Alto	Superior
Escala cuantitativa	1	2	3	4

Las estudiantes fueron evaluadas tanto en el pre-test como en el pos-test en cuatro aspectos fundamentales:

- Concepto de derivada (preguntas 1, 2 y 3)
- Reconocimiento de la derivada en su vida diaria (pregunta 4)
- Modelado matemático a nivel escolar (preguntas 5, 6 y 7)
- Aplicación de la derivada como razón de cambio usando la modelación matemática (preguntas 8 y 9)

Los resultados de la evaluación se muestran en la Figura 27 para el caso de Brenda, la Figura 28 para el caso de Laura, la Figura 29 para el caso de María Fernanda y la Figura 30 para el caso de Valeria. La consideración del nivel de desempeño en cada aspecto se basa en el análisis de las respuestas dadas por cada estudiante tanto en el pre-test como en el pos-test. En términos generales se observa que para todas las estudiantes hubo un avance en los cuatro aspectos evaluados. Esto quiere decir que la estrategia en términos generales fue exitosa. Sin embargo, hay que destacar que el avance no fue igual en todas las estudiantes. En el caso de Valeria se muestra una apropiación conceptual superior a las de sus compañeras, logro obtener un nivel de desempeño superior (numéricamente 4) en dos de los cuatro aspectos evaluados, situación que no ocurrió con las otras estudiantes. El caso contrario ocurrió con María Fernanda que obtuvo un nivel de desempeño básico (numéricamente 2) en tres de sus cuatro aspectos evaluados. Para las otras dos estudiantes se destaca que lograron tener un nivel alto en la mayoría de los aspectos evaluados.

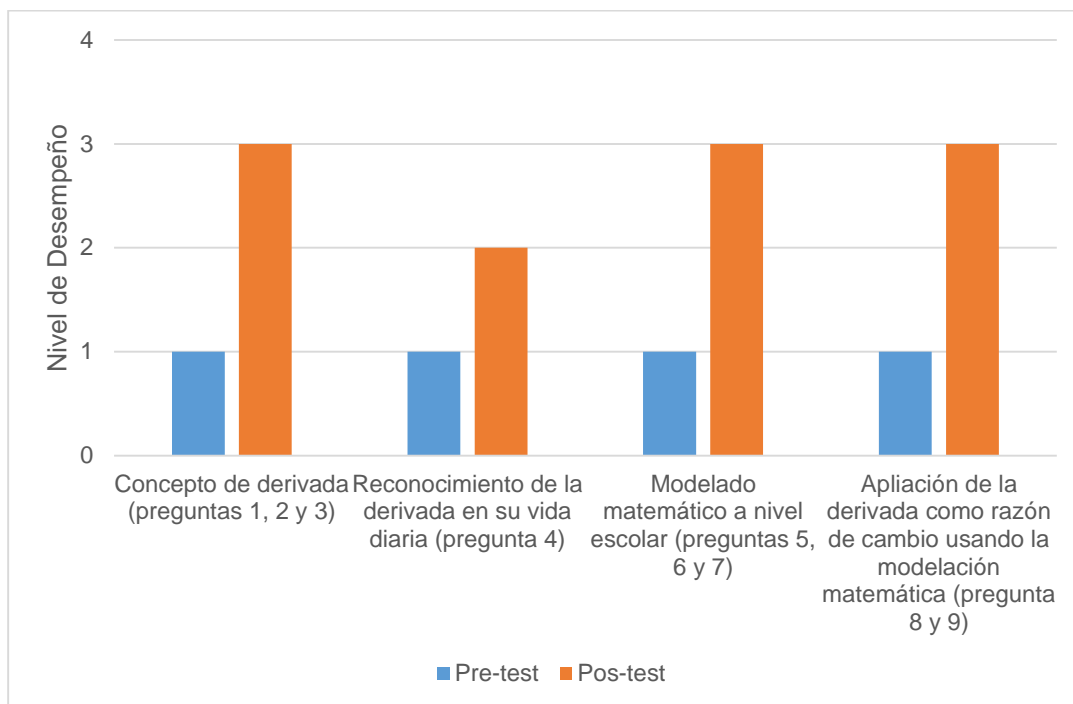


Figura 27. Evaluación de resultados de Brenda

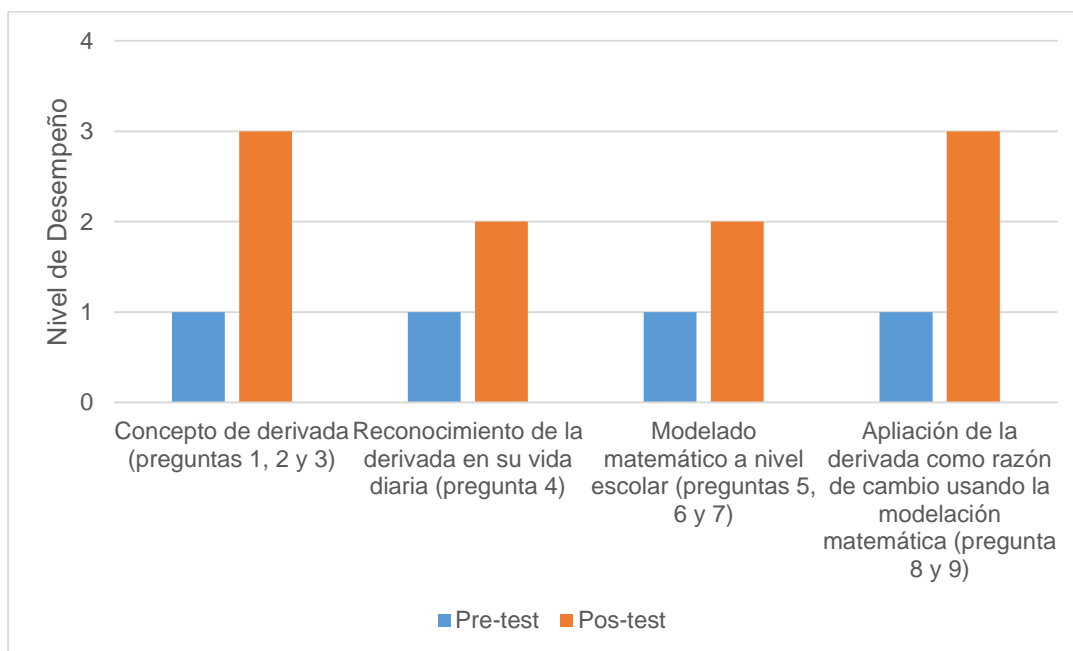


Figura 28. Evaluación de resultados de Laura

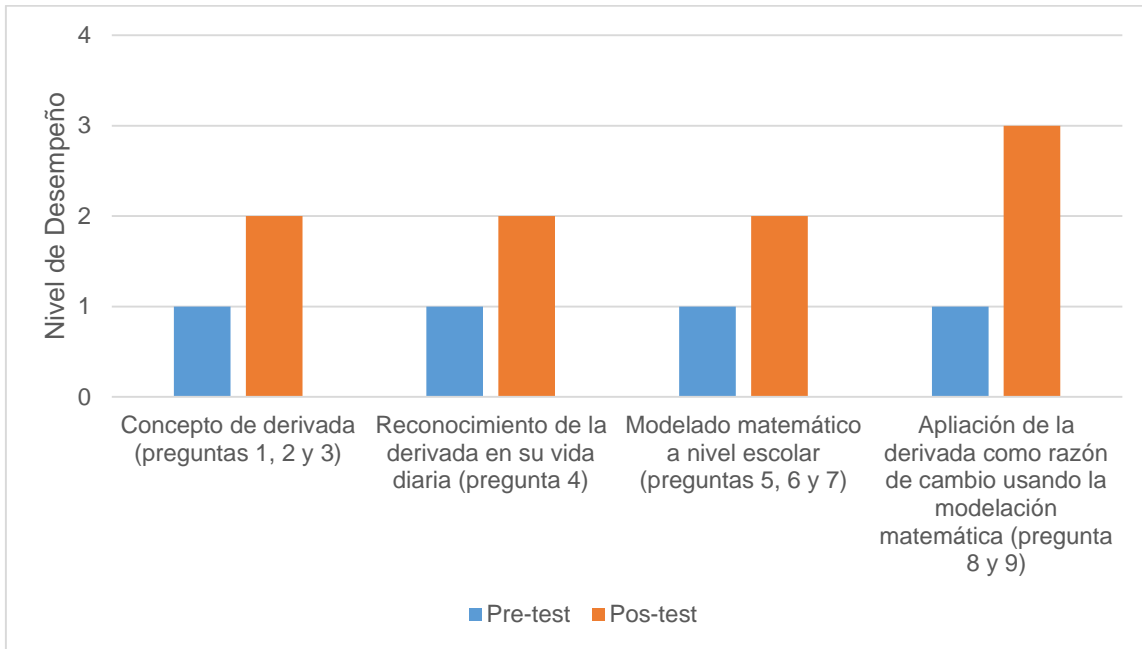


Figura 29. Evaluación de resultados de María Fernanda

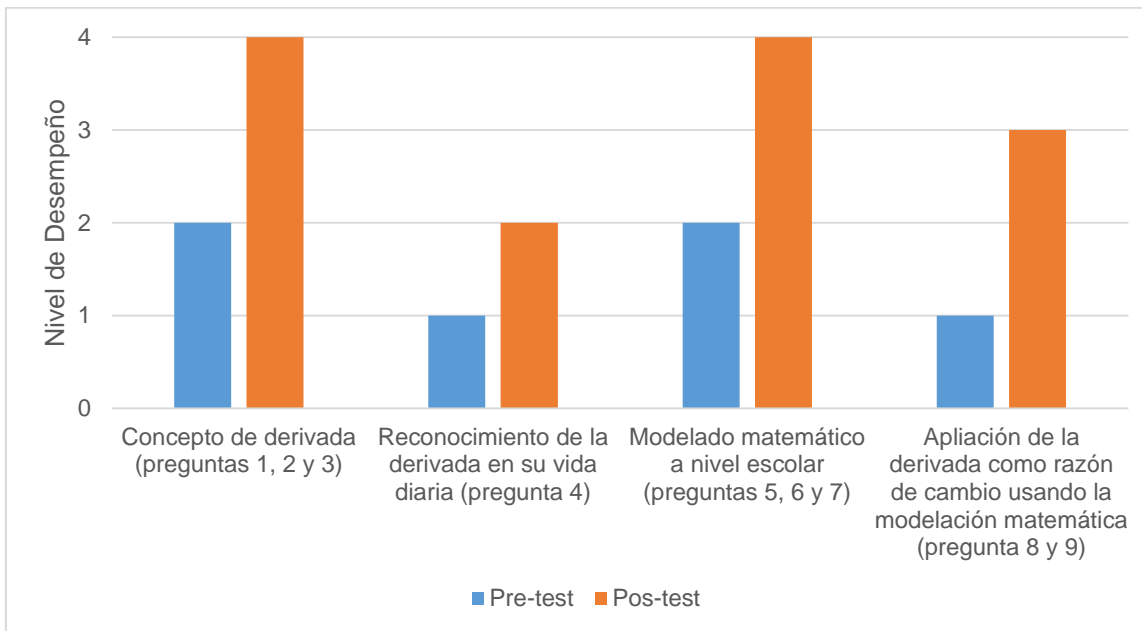


Figura 30. Evaluación de resultados de Valeria

La diferencia en el nivel de desempeño de las estudiantes se debe a que la estrategia didáctica desarrollada requiere un mayor trabajo en explorar saberes previos e identificar las falencias conceptuales y fundamentales a nivel matemático. Esto coincide con lo planteado por Herrera, Montenegro y Poveda (2012) en cuanto a que la modelación

matemática presenta un mayor desafío en desarrollar habilidades de pensamiento como identificar los puntos de control de error, transitar del lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa, aplicar heurísticas, identificar regularidades. Esta situación se evidenció principalmente en la estudiante María Fernanda debido a debilidades conceptuales a nivel de álgebra. Por esta razón, se requiere que el nivel matemático de las estudiantes sea adecuado para poder desarrollar la estrategia con un mayor éxito. No obstante, el avance de las estudiantes se da por la posibilidad que brindó la estrategia de aproximarse a fenómenos reales, analizar y describir y la significación de objetos simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos como lo plantea Herrera, Montenegro y Poveda (2012).

Poder describir el fenómeno recurriendo a la noción de representación fue esencial para poder asimilar los conceptos por parte de las estudiantes. Esto se da en concordancia con el planteamiento de Duval (1999) "No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación". Las estudiantes usando la visualización lograron asimilar parcialmente los conceptos tratados, sin embargo, la percepción visual es una de las vías de acercamiento a los objetos, pero en algunas ocasiones, ésta puede perturbar la aprehensión del objeto, el cual puede estar determinado por los tipos de imágenes mentales que tengan establecidas los individuos (Herrera, Montenegro y Poveda, 2012) y esta situación se presentó en el presente trabajo ya que en algunas oportunidades las estudiantes percibían los conceptos de manera local pero no de forma global.

Por otro lado, la motivación de las estudiantes fue mayor a la que se tiene en una clase tradicional de matemáticas, ya que el descubrir nuevas formas de la aplicación de las matemáticas a nivel de educación media permite despertar un mayor interés en ellas. Situación similar ocurrió en el trabajo de Zapata, Villa y Calderón (2015) donde el interés de las estudiantes fue superior en el proceso de aprendizaje cuando la estrategia de enseñanza se basa en la modelación matemática.

9. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se realizó una estrategia didáctica basada en la modelación matemática usando la experimentación cinemática para el aprendizaje del concepto de derivada. Las conclusiones que se desprenden son las siguientes:

- La estrategia en términos generales fue exitosa, todas las estudiantes lograron un avance conceptual en cuatro aspectos que involucraba la estrategia didáctica: concepto de derivada, reconocimiento de la derivada en su vida diaria, modelado matemático a nivel escolar, aplicación de la derivada como razón de cambio usando la modelación matemática.
- La apropiación del concepto de derivada de las estudiantes se da por la posibilidad que brindó la estrategia de aproximarse a fenómenos reales, analizar, describir y entender el significado de objetos simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos.
- Las estudiantes usando la visualización lograron asimilar parcialmente los conceptos tratados, sin embargo, la percepción visual puede ocasionar inconvenientes en cuanto al aprendizaje global de la temática, porque esta situación puede perturbar el aprendizaje ya que las estudiantes recurren únicamente a lo que observan y/o a las imágenes mentales que tengan preestablecidas de estos. Esta situación se presentó, en algunos casos, en el actual trabajo debido a que las estudiantes percibían los conceptos de manera local pero no de forma global.
- La motivación de las estudiantes fue mayor a la que se tiene en una clase tradicional de matemáticas, esto se debe a que el descubrir nuevas formas de la aplicación de las matemáticas a nivel de educación media permitió despertar un mayor interés en ellas.

10. ANEXOS

10.1 Anexo 1

Licenciatura en Matemáticas y Física – Universidad Católica de Manizales
Saberes Previos (Instrumento de investigación)
Concepto de Derivada y sus Aplicaciones

Nombre: _____ Fecha: _____

A continuación se presentan una serie de preguntas referentes al tema concepto de derivada y sus aplicaciones en la física y situaciones cotidianas. Es muy importante que en la respuesta explique lo que piensa, si no conoce lo que se le pregunta puede responder no sé.

1. ¿Qué entiende por derivada?

2. ¿Qué entiende por razón de cambio?

3. ¿Qué entiende por cociente de incrementos?

4. En su vida diaria ¿Dónde se puede observar la aplicación del concepto de derivada?

5. ¿Qué entiende por posición, cambio de posición, velocidad, aceleración y tiempo?

6. ¿Qué entiende por modelación matemática a nivel escolar?

7. ¿Cómo puede identificar en una situación física las variables y constantes del problema, es decir la identificación de lo que varía y lo que permanece constante?

8. En la gráfica mostrada en la Figura 31 de abajo se presenta la distancia recorrida (d en unidades de longitud) por un vehículo contra el tiempo transcurrido (t en unidades de tiempo) para recorrer dicha distancia ¿Puede estimar la velocidad del vehículo cuando lleva 2, 4 o 6 (unidades de tiempo)? ¿Son iguales dichas velocidades? ¿Por qué?

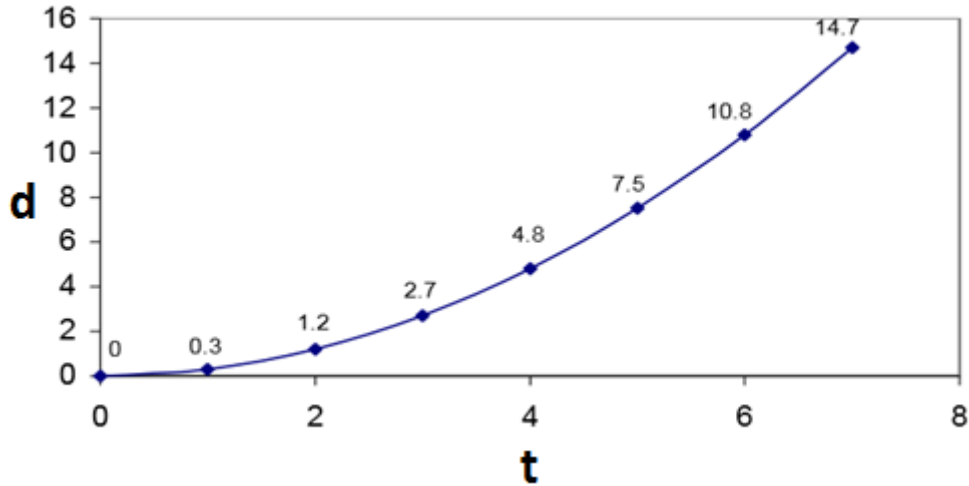


Figura 31 Distancia recorrida vs tiempo transcurrido

9. Modelación:

El tiempo total necesario para detener un automóvil después de percibir un peligro, se compone del tiempo de reacción (tiempo entre el reconocimiento del peligro y la aplicación del freno). La Tabla 3 muestra las distancias de parada en metros (distancia que necesita para detenerse totalmente) de un automóvil que viaja a las velocidades V (m/s) desde el instante que se observa el peligro. Una compañía que fabrica autos realiza pruebas con carros manejados a control remoto y para garantizar que estos tienen distancia promedio de parada aceptables se plantean las siguientes cuestiones.

Velocidad V (m/s)	0	5	10	15	20	25	30	35
Distancia de parada d (m)	0	0,9	1,6	2,7	4,1	6,2	8,8	11,9

Tabla 3 Distancia de parada para diferentes velocidades

- ¿Es un comportamiento lineal? ¿Por qué?

- Si un automóvil viaja a una velocidad de 40 m/s y en esos momentos está colocada un obstáculo a 14.0 m. frente a él, al aplicar el freno ¿choca el auto? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el tiempo de frenado para valores comprendidos: a) entre los 20 y 30 m/s. b) de 30 a 35 m/s?
- ¿Para qué velocidad el tiempo de frenado fue mayor y cuál fue?

10.2 Anexo 2

Licenciatura en Matemáticas y Física – Universidad Católica de Manizales
 Instrumento Didáctico (Experimentación cinemática)
 Concepto de Derivada y sus Aplicaciones

Nombre: _____ Fecha: _____

A continuación se realizará un experimento en el laboratorio de Experimentación Física. Se harán una serie de preguntas que buscan desarrollar el análisis, interpretación y justificación, complementados a través de representaciones gráficas a través del uso de tablas que completarán las estudiantes.

Cinemática – Carril de Aire

Objetivos

- Hacer gráficas para visualizar el comportamiento de la posición, velocidad y aceleración como función del tiempo resultante de un sistema de carril de aire.
- Identificar las variables y constantes del problema. Variables dependientes e independientes.
- Modelar los problemas cinemáticos, entender el comportamiento de la posición, velocidad y aceleración.
- Identificar en donde se aprecia el concepto de derivada

Material

- Carril de aire de aluminio, con una polea liviana y de baja fricción en uno de sus extremos
- Carrito de aluminio con once orificios y once postes metálicos cilíndricos
- Cronómetro programable
- Compresor de aire y manguera flexible
- Cuerda liviana y resistente (3 m)
- Pesas de 10 g y una pesa de 5 g.
- Fotodetector
- Portapesas liviano y discos de masa (m_1), (m_2), (m_n)
- Calibrador balanza

Montaje experimental

El sistema consta de un carrito de aire a , un fotodetector f , un cronómetro programable t , montado sobre una mesa como se ilustra en la figura de abajo. El carrito M , se coloca sobre el carril y uno de sus extremos se une a una cuerda liviana c , a una mesa m por medio de una polea p .

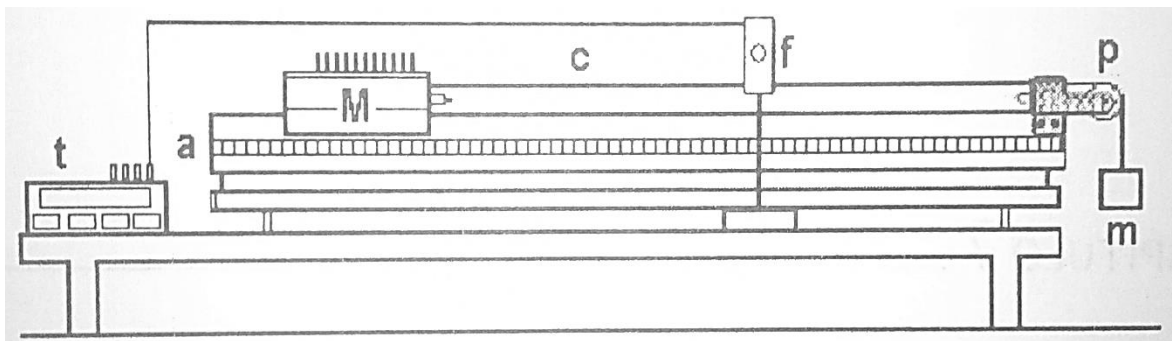


Figura 32 Esquema ilustrativo del montaje experimental y sus principales elementos

Consideración teórica

El sistema consta de cuatro cuerpos: el carrito de masa (M_c), la masa colgante m , la cuerda liviana y la polea liviana de baja fricción.

Una posible aproximación teórica al problema del movimiento de dicho sistema comienza con las siguientes consideraciones:

- La cuerda se asume inextensible y liviana, se desprecia su masa. Con esto su único papel es el de unir la masa M y m , haciendo que se muevan en una dirección.
- La polea por ser liviana y asumirse sin fricción* no tiene efecto en el movimiento del sistema.
- Como el carrito se desplaza sobre una “colchón de aire”, la fricción se reduce a niveles despreciables.

Con estas simplificaciones se puede modelar el sistema considerando sólo el carrito M y el objeto colgante m . La masa colgante m produce el movimiento del carrito.

Procedimiento

- Pesen M (carrito), m (portapesas) y m_1, m_2, \dots, m_n (discos que utilizará)
- Midan las distancias $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{10}$, distancias entre el primer poste y el frente delantero de los postes que utilizará.
- Definan la posición del fotodetector para determinar la distancia inicial entre el frente del primer poste y el fotodetector. El carro debe estar acelerado mientras los postes atraviesan el fotodetector.
- En el cronómetro se registran los tiempos cada vez que pasa un poste por el fotodetector.
- Haga el procedimiento para tres masas diferentes.

Análisis

- Registre los valores distancia de los postes vs. tiempo registrado en el cronómetro para cada masa utilizada. Use las tablas que se muestran abajo.

Masa colgante=			
Distancia	Valor Utilizado	Tiempo	Valore Registrado
d_1		t_1	
d_2		t_2	
d_3		t_3	

d ₄		t ₄	
d ₅		t ₅	
d ₆		t ₆	
d ₇		t ₇	
d ₈		t ₈	

Masa colgante=			
Distancia	Valor Utilizado	Tiempo	Valore Registrado
d ₁		t ₁	
d ₂		t ₂	
d ₃		t ₃	
d ₄		t ₄	
d ₅		t ₅	
d ₆		t ₆	
d ₇		t ₇	
d ₈		t ₈	

Masa colgante=			
Distancia	Valor Utilizado	Tiempo	Valore Registrado
d ₁		t ₁	
d ₂		t ₂	
d ₃		t ₃	
d ₄		t ₄	
d ₅		t ₅	
d ₆		t ₆	
d ₇		t ₇	
d ₈		t ₈	

- Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como distancia de los postes. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)

- ¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique
- Estime lo siguiente para todos los valores registrados en las tablas anteriores:

$$\frac{d_{n+1} - d_n}{t_{n+1} - t_n}$$

Complete las siguientes tablas:

Masa colgante=			
Razón de cambio (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	Valor
$\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$		t_2	
$\frac{d_3 - d_2}{t_3 - t_2}$		t_3	
$\frac{d_4 - d_3}{t_4 - t_3}$		t_4	
$\frac{d_5 - d_4}{t_5 - t_4}$		t_5	
$\frac{d_6 - d_5}{t_6 - t_5}$		t_6	
$\frac{d_7 - d_6}{t_7 - t_6}$		t_7	
$\frac{d_8 - d_7}{t_8 - t_7}$		t_8	

Masa colgante=			
Razón de cambio (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	Valor
$\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$		t_2	

$\frac{d_3 - d_2}{t_3 - t_2}$		t_3	
$\frac{d_4 - d_3}{t_4 - t_3}$		t_4	
$\frac{d_5 - d_4}{t_5 - t_4}$		t_5	
$\frac{d_6 - d_5}{t_6 - t_5}$		t_6	
$\frac{d_7 - d_6}{t_7 - t_6}$		t_7	
$\frac{d_8 - d_7}{t_8 - t_7}$		t_8	

Masa colgante=			
Razón de cambio (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	Valor
$\frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$		t_2	
$\frac{d_3 - d_2}{t_3 - t_2}$		t_3	
$\frac{d_4 - d_3}{t_4 - t_3}$		t_4	
$\frac{d_5 - d_4}{t_5 - t_4}$		t_5	
$\frac{d_6 - d_5}{t_6 - t_5}$		t_6	
$\frac{d_7 - d_6}{t_7 - t_6}$		t_7	
$\frac{d_8 - d_7}{t_8 - t_7}$		t_8	

- ¿Cómo se interpreta el cociente de incrementos que obtuvieron en las tablas anteriores? ¿Se puede estimar la velocidad con estos datos? ¿Por qué?
- Es correcto afirmar que la velocidad es $v_{n+1} = \frac{d_{n+1} - d_n}{t_{n+1} - t_n}$ ¿Por qué?

- Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como velocidad. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)
- ¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique
- Estime lo siguiente para todos los valores registrados en las tablas anteriores:

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n}$$

Masa colgante=			
Razón de cambio (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	Valor
$\frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$		t_3	
$\frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3}$		t_4	
$\frac{v_5 - v_4}{t_5 - t_4}$		t_5	
$\frac{v_6 - v_5}{t_6 - t_5}$		t_6	
$\frac{v_7 - v_6}{t_7 - t_6}$		t_7	
$\frac{v_8 - v_7}{t_8 - t_7}$		t_8	

Masa colgante=			
Razón de cambio (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	Valor
$\frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$		t_3	
$\frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3}$		t_4	
$\frac{v_5 - v_4}{t_5 - t_4}$		t_5	

$\frac{v_6 - v_5}{t_6 - t_5}$		t_6	
$\frac{v_7 - v_6}{t_7 - t_6}$		t_7	
$\frac{v_8 - v_7}{t_8 - t_7}$		t_8	

Masa colgante=			
Razón de cambio (Cociente de incrementos)	Valor	Incremento de Tiempo	Valor
$\frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$		t_3	
$\frac{v_4 - v_3}{t_4 - t_3}$		t_4	
$\frac{v_5 - v_4}{t_5 - t_4}$		t_5	
$\frac{v_6 - v_5}{t_6 - t_5}$		t_6	
$\frac{v_7 - v_6}{t_7 - t_6}$		t_7	
$\frac{v_8 - v_7}{t_8 - t_7}$		t_8	

- ¿Cómo se interpreta el cociente de incrementos que completaron en las tablas anteriores? ¿Se puede estimar la aceleración con estos datos? ¿Por qué?
- Es correcto afirmar que la aceleración es $a_{n+1} = \frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n}$ ¿Por qué?
- Grafique los puntos como pares ordenados usando la variable tiempo como independiente y la variable dependiente como aceleración. Una los puntos con líneas suavizadas para poder estimar un comportamiento. Puede usar un programa para graficar si lo prefiere (Excel, OriginPro, etc)
- ¿Qué comportamiento registra? ¿Lineal? ¿Parabólico? ¿Otro? Explique

Conclusiones finales

- En términos prácticos ¿cómo modelaría la distancia vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?
- En términos prácticos ¿cómo modelaría la velocidad vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?
- En términos prácticos ¿cómo modelaría la aceleración vs el tiempo para el problema de carril de aire? ¿Qué ecuación algebraica se ajustaría mejor?
- ¿En dónde se puede apreciar el concepto de derivada en la experimentación cinemática realizada en laboratorio de física?
- ¿Matemáticamente qué es la velocidad? Y ¿físicamente?
- ¿Matemáticamente qué es la aceleración? Y ¿físicamente?

Consideraciones cinéticas

- ¿Qué efecto tuvo la masa colgante sobre la velocidad y la aceleración del carrito?
- ¿Se puede modelar dicho efecto? ¿Cómo?

11. REFERENCIAS

Agudelo Marín, Y. M., y García Castro, L. I. (2014). La modelación: una posibilidad para desarrollar la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen en estudiantes de grado 9°.

Alsina, Á., y Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 7-32.

Alvarez Tamayo, O. D., y Tamayo Alzate, Ó. E. (2012). Incidencia de las representaciones múltiples en la formación del concepto Transporte celular en estudiantes universitarios.

Aragon Carabeo, E., Castro Ling, C., Gomez Heredia, B. A., y González Plasencia, R. (2009). Objetos de aprendizaje como recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas. *Apertura: Revista de Innovación Educativa*, (11), 100-111.

Arredondo, G. M., Pérez, R. G., y Aguirre, L. M. (2006). *Didáctica general* (3 ed.). México: Limusa.

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Que nos ofrece hoy la didáctica de las matemáticas para afrontarlos? *Educación Matemática*, 6(3), 5-28.

Barrón López, J. V., Luna González, J., Estrada Cabral, J., Flores García, S., Estrada Saldaña, F., y Ramos, M. A. (2009). La ecuación de la línea recta en la modelación de fenómenos físicos. *CULCyT Educación* (31), 26-34.

Baruch, I., Hernández, L. A., y Barrera, C. J. (2005). Control neuronal adaptable con término integral para un proceso biotecnológico de fermentación por lote alimentado. *Científica ESIME*, 111-118.

Biembengut, M. S., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125.

Cabrerizo Lorite, F. J. (2008). Nuevos modelos de toma de decisión en grupo con información lingüística difusa. España: Universidad de Granada

Camarena Gallardo, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa*, 9 (46), 15-25.

Capacitaciones Talleres y Seminarios [CAPTAS]. (2009). Planeación didáctica en el aula: construcción de experiencias didácticas en el aula. Recuperado del sitio de Capacitaciones Talleres y Seminario: www.captas.org.mx, www.slideshare.net/mercmerk/enseanza-aprendizaje-didctica

Castorina, J. A. (1994). Problemas epistemológicos de las teorías del aprendizaje en su transferencia a la educación. *Perfiles Educativos* (65).

De León Mojarro, B., Prado Hernández, J. V., Verdier, J., y Fuentes Ruiz, C. (2007). Simulación numérica del movimiento de estructuras de control en canales de riego. *Agrociencia*, 75-86.

De Zubiría, S. M. (2004). Enfoques pedagógicos y didácticas contemporáneas. Bogotá: Fundación Internacional de Pedagogía Conceptual Alberto Merani.

Díaz García, A. A., y Sotolo, J. A. (2009, 5-Febrero). Modelación matemática de una planta para la producción de biodiesel. Recuperado de: <http://www.cubasolar.cu/biblioteca/Ecosolar/Ecosolar22/HTML/articulo05.htm>

Díaz, J. (2009). Aplicación de nuevas técnicas y estrategias del aprendizaje cooperativo y significativo en la enseñanza de la matemática: dos alternativas que sustentan la capacitación y/o preparación del joven del siglo XXI en el continuo devenir humano. Argentina: El Cid.

Díez Palomar, J., y Molina, S. (2010). Contribuciones de la educación matemática de las familias a la formación del profesorado. *PNA*, 4(2), 63-72.

Duval R., (1999). Registros de representación, comprensión y aprendizaje. Duval, R., (Ed). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (pp. 25 - 79). Santiago de Cali; Universidad del Valle.

Domínguez Calle, E. A. (30 de Marzo de 2015). Modelación matemática una introducción al método. Recuperado el 4 de Mayo de 2015 de: <http://www.mathmodelling.org/>

García Figueroa, L. G. (2004). La modelación matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial (Doctoral dissertation, Universidad Autónoma de Nuevo León).

Gómez Urgellés, J. V., Garcia Rafi, L., Sierra Galdón, L., y Blanco, J. (2011). Estrategias de aprendizaje basadas en la modelización matemática en Educación Secundaria Obligatoria. In XV JAEM (pp. 1-20).

Hernández Sampieri R., Fernández Collado C., Baptista Lucio P., (2006). Metodología de la Investigación (4ª Ed.). McGraw Hill.

Herrera Villamizar, N. L., Montenegro Velandia, W., y Poveda Jaimes, S. (2012). Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 1(35), 254-287.

Izquierdo, L. R., Galán, J. M., Santos, J. I., y Del Olmo, R. (2008). Modelado de sistemas complejos mediante simulación basada en agentes y mediante dinámica de sistemas. Empiria. Revista de Metodología de Ciencias Sociales (16), 85-112.

Jaramillo, P. J. (2005). La enseñanza como práctica. Caracterizaciones desde la educación superior. Revista Internacional Magisterio. Educación y Pedagogía, 65-67.

Jimeno, M. (2006). ¿Por qué las niñas y los niños no aprenden matemáticas? Barcelona: Ediciones Octaedro

López, L. E., y Toro Alvarez, C. (2008). Formación de docentes en la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas en la Red de Comprensión Lectora y Matemáticas- CCyM, segunda etapa. *Universitas Psychologica*, 7(3), 753-765.

Lozano, D. A. (2003). Factores personales, familiares y académicos que afectan al fracaso escolar en la educación secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 43-66.

Maldonado, M. B., y Zuritz, C. A. (2003). Modelación matemática del proceso de tratamiento con hidróxido sódico de aceitunas verdes de mesa. *Grasas y Aceites*, 52 (2), 180-187.

Marín, I. D. (2005). La enseñanza de las teorías de la administración: limitantes epistemológicos y posibilidades pedagógicas. *Revista de Ciencias Administrativas y Sociales*, 15(26), 43-58.

Millán, G. A. (2003). La aplicación de las matemáticas en los problemas de administración y organización: antecedentes históricos. *ILUIL*, 26, 929-961.

Mora, C. D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de pedagogía*, 24(70), 181-272.

Moreno, C. L. (2014, 23-Mayo). Dificultades de aprendizaje en matemáticas. Recuperado de la Universidad de Costa Rica Centro de Investigación en matemáticas: http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2901/1199

Muñoz Hernández, H. M., y García Castro, L. I. (2015). Modelos conceptuales de profesores de educación básica sobre las matemáticas y su enseñanza.

Oliveros, S. (2011). La enseñanza de la matemática para los docentes de educación integral. *Revista Iberoamericana de Educación* (55), 1-15.

Ordoñez, P. (2006). Estudio exploratorio sobre las prácticas de enseñanza-aprendizaje adecuadas de las/los docentes. Una mirada a partir de las/los estudiantes. *Revista de Investigación. Universidad de la Salle*, 271-279.

Parra Mesa, C. M., Pérez Rave, J. I., y Torres Franco, D. (2006). Modelación y simulación computacional de un proceso productivo de una pequeña empresa. *Ingeniería y Desarrollo* (20), 151-171.

Peñalva, R. L. (2010). Las matemáticas en el desarrollo de la metacognición. *Política y Cultura* (33), 135-151.

Peña-Páez, L. M., y Morales-García, J. F. (2016). La modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje: El caso del área bajo la curva. *Revista Educación en Ingeniería*, 11(21), 64-71.

Pérez, O. (2006). ¿Cómo diseñar el sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 267-297.

Planchart, M. O. (2005, Junio). La modelación matemática: alternativa didáctica en la enseñanza del precálculo. Recuperado de la Revista de investigación en Ciencias y Matemáticas: <http://cremc.ponce.inter.edu/1raedicion/modelacion.htm>

Quiceno, H. (2002). Educación tradicional y pedagogía crítica. *Educación y Cultura* (59), 6-13.

Ramírez, A. M., Contreras, F., y González, C. G. (2006). Modelación matemática del mezclado en ollas (cucharas) de aluminio equipadas con la técnica de desgasificación rotor-inyector. *Revista de metalurgia*, 42(3), 185-202.

Rivas, P. J. (2005). La educación matemática como factor de deserción escolar y exclusión social. *Red Revista Educere* (9), 165-170.

Riveros, F. O. (2015). La descontextualización de las matemáticas en la educación profesional universitaria (Bachelor's thesis, Universidad Militar Nueva Granada).

Robayo, Y. A. L., & Lorenz, F. U. K. (2011) Desarrollo del concepto de la derivada sin la noción del límite.

Romo, A., y Oktaç, A. (2007). Herramientas metodológicas para el análisis de los conceptos matemáticos en el ejercicio de la ingeniería. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 117-143.

Sandoval, T. S. (2009). Modelación matemática del secado convencional de madera. *Madera y Bosques*, 75-89.

Santiuste Bermejo, V. (2011 3-Enero). OTEC-EDUCREA. Recuperado de: http://www.educra.cl/documentacion/articulos/aprendizaje/07_aproximacion_al_concepto_aprendizaje_constructivista.html

Schubring, G. (2008). Gauss y la junta de logaritmos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11 (3), 383-412.

Suriani, B. (2003). Las prácticas de la enseñanza en contextos de cambio: características, tensiones y dilemas. Congreso latinoamericano de educación superior en el siglo XXI.

Universidad del Valle. (2016). Departamento de Matemáticas. Recuperado de <http://matematicas.univalle.edu.co/pregrado/>

Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., et al. (2001, 4Abril). La educación matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. Recuperado de *Revista Iberoamericana de Educación*: <http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF>

Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A., y Ocampo, D. (2008). El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los lineamientos curriculares colombianos.

Zapata Vargas, J. F., Villa Monsalve, L. C., y Calderón García, L. (2015). Modelización de la realidad como estrategia didáctica para la enseñanza de ecuaciones lineales en el grado noveno.

Universidad del Valle. (2016). Departamento de Matemáticas. Recuperado de <http://matematicas.univalle.edu.co/pregrado/>