

**Las herramientas tecnológicas, una mediación para la enseñanza y
aprendizaje de las Funciones Trigonómicas.**

Juliana Arango Arias

Universidad Católica de Manizales.

Caldas, Colombia

Noviembre de 2017

**Las herramientas tecnológicas, una mediación para la enseñanza y aprendizaje de las
Funciones Trigonométricas.**

Trabajo de Grado Presentado Para obtener el título de
Licenciada en Matemáticas y Física.

Juliana Arango Arias

Director de trabajo de grado:

Mg. Paula Andrea Osorio Gutiérrez.

Universidad Católica de Manizales.

Caldas, Colombia

Noviembre de 2017

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi familia por ayudarme en este proceso formativo,
por acompañarme en cada uno de mis proyectos y en especial a mi madre
por sus oraciones y apoyo constante en la distancia.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primero a Dios por brindarme la fortaleza necesaria para vencer cada obstáculo. Doy gracias a mis estudiantes por permitirme realizar las actividades para cumplir con el trabajo investigativo, a los docentes de la licenciatura y a mis compañeros docentes. De manera especial le agradezco a la docente Mg. Paula Andrea Osorio por sus asesorías para la realización de este trabajo.

RESUMEN

La investigación busca documentar las particularidades del proceso enseñanza y aprendizaje para las funciones trigonométricas, utilizando la herramienta tecnológica GeoGebra y diferentes registros de representaciones semióticas con estudiantes de educación media del Colegio Seminario Redentorista San Clemente María Hofbauer de Manizales.

La metodología empleada incluyó análisis cuantitativos y descriptivos. El análisis cuantitativo fue realizado mediante la prueba de Hake, para medir el factor de ganancia del aprendizaje. El análisis descriptivo fue empleado para describir la utilidad de las herramientas tecnológicas, el aporte en la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas y las dificultades que presentan los estudiantes para abordar las funciones desde distintos tipos de registros.

La población la conformaron 32 estudiantes de la zona urbana, se realizó como fase inicial una prueba diagnóstica (pre-test), luego se implementaron las hojas de trabajo con apoyo de los Applets diseñados y construidos por la investigadora, con el fin de favorecer la visualización en la enseñanza de la trigonometría, además conjeturar y generar comunicación de ideas matemáticas como elementos fundamentales de las competencias generales del área. Se emplearon dos hojas de trabajo con GeoGebra, asimismo, se implementó una prueba final (pos-test). Tanto en la prueba de pre-test y post-test, se emplearon dos clases de registros de representación semiótica: *algebraico* y *gráfico* que

fueron posteriormente comparados con la prueba de Hake para determinar el factor de ganancia de aprendizaje.

Los resultados permitieron concluir que el proceso de enseñanza y aprendizaje con la ayuda de herramientas tecnológicas GeoGebra es más efectiva, los alumnos aprenden matemáticas a partir de la experiencia y la reflexión de las acciones que realiza con la herramienta, la cual les propicia elaborar hipótesis, ensayar diferentes formas y estrategias para resolver los problemas y disponer de maneras para darse cuenta de los errores y corregirlos. El proceso también permitió desarrollar las competencias generales de la matemática como la resolución de problemas, la modelación y la comunicación de ideas, lo cual también responde al modelo pedagógico pluridimensional por competencias del Colegio Seminario Redentorista San Clemente María Hotbauer.

ABSTRACT

The research seeks to document the particularities of the teaching and learning process for trigonometric functions, using the GeoGebra technological tool and different registers of semiotic representations with middle school students of the Seminario Redentorista San Clemente María Hofbauer School of Manizales.

The methodology used, included quantitative and descriptive analyzes. The quantitative analysis was performed using the Hake test, to measure the profit factor of learning. The descriptive analysis was used to describe the usefulness of the technological tools, the contribution in the teaching and learning of the trigonometric functions and the difficulties that the students present to approach the functions from different types of registers.

The population consisted of 32 students from the urban area, a diagnostic test (pre-test) was carried out as an initial phase, then the worksheets were implemented with the support of the Applets designed and built by the researcher, in order to favor the visualization in the teaching of trigonometry, in addition, to conjecture and generate communication of mathematical ideas as fundamental elements of the general competences of the area. Two worksheets with GeoGebra were used, and a final test (post-test) was also implemented. Both, in the pre-test and the post-test, two classes of

semiotic representation registers were used: algebraic and graphic, that were later compared with the Hake test to determine the learning profit factor.

The results allowed us to conclude that the teaching and learning process with the help of GeoGebra technological tools is more effective; students learn maths from experience and reflection of the actions they carry out with the tool, which allows them to elaborate hypotheses, try different ways and strategies to solve problems and have ways to notice mistakes and correct them. The process also allowed developing the general competences of maths, such as problem solving, modeling and the communication of ideas, which also responds to the multidimensional pedagogical model by the Seminario Redentorista San Clemente Maria Hotbauer School.

TABLA DE CONTENIDO

CAPITULO I.....	15
1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.....	15
1.1 Introducción:.....	15
1.2 Antecedentes.....	16
1.2.1 Antecedentes investigativos.....	16
1.2.2 Antecedentes curriculares.....	19
1.3 Justificación.....	21
1.4 Objetivo general.....	23
1.4.1 Objetivos específicos.....	23
1.5.1 Contextualización.....	24
1.5.2 Pregunta problema.....	27
CAPITULO II.....	29
2. MARCO REFERENCIAL.....	29
2.1 Introducción.....	29
2.2 Marco disciplinar.....	29
2.3 Marco teórico.....	44
CAPÍTULO III.....	56
3. DISEÑO METODOLÓGICO.....	56
3.1 Introducción.....	56
3.2.1 Enfoque.....	56
3.2.1 Tipo de investigación.....	57
3.2.2 Diseño de la investigación.....	57
3.2.3 Sujetos.....	58
3.5 Fases del estudio.....	58
3.5.1 Encuesta inicial (Pretest).....	59
3.5.2 Diseño de las hojas de trabajo.....	60
3.5.3 Encuesta de Salida (Postest).....	60
CAPITULO IV.....	61
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	61
4.1 Introducción.....	61

4.2 Análisis de diagnóstico o pre-test	62
4.3 Análisis de los applets aplicados a las hojas de trabajo	69
4.3.1. Hoja de trabajo # 1. Graficas de las funciones Seno y Coseno	69
4.3.2. Hoja de trabajo # 2. Amplitud y Desfase	72
CAPITULO V	74
5. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS	74
5.1 Introducción.....	74
5.2 Respuestas a las preguntas investigativas	75
5.2.1 Respuesta a la pregunta central	75
5.2.2 Respuestas a las preguntas auxiliares.....	76
5.3 Resultados de la investigación en la trigonometría.....	77
5.4 Sugerencias para futuras investigaciones.....	79
REFERENCIAS	81

- Oteysa, E. (2001) Geometria Analitica y Trigonometria. Editorial Person. (pp, 191)

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Fases de la investigación	59
Tabla 2: Análisis del Pretest.	63
Tabla 3: Análisis del Postest.....	65
Tabla 4: Análisis de la hoja de trabajo # 1	71
Tabla 5: Análisis del diagnóstico la hoja de trabajo # 1	72
Tabla 6: Análisis de la hoja de trabajo # 2	73

LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Vista dinámica de Geogebra.....	39
Ilustración 2: Aplicación de pretest.....	64
Ilustración 3: Errores conceptuales de los estudiantes	65

LISTA DE GRAFICAS

Gráficas 1: Análisis del Pretest.....	64
Gráficas 2: Análisis del Postest	66
Gráficas 3: Análisis Pretest v/s Postest.....	67
Gráficas 4: Diagnóstico hojas de trabajo	70

CAPITULO I

1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

1.1 Introducción:

El paradigma que tienen la mayoría de estudiantes frente al área de matemáticas por la carencia de metodologías creativas se ha reflejado en durante la historia, ya que en ella han prevalecido las metodologías tradicionales, es por ello, que en la actualidad la matemática requiere de estrategias activas que contribuyan a la formación integral del educando. Encontrar estrategias didácticas que cautiven al estudiante permitirá al docente apoyar el proceso de aprendizaje y así motivar al educando a explorar sus capacidades y aportar para su propia formación.

Al realizar un diagnóstico de los estudiantes del grado 10° de Colegio Seminario Redentorista, la problemática observada lleva a establecer un camino de mejoramiento para la enseñanza-aprendizaje de las funciones trigonométricas, mediante el uso de herramientas tecnológicas con el propósito de desarrollar estrategias cognitivas en los estudiantes y mejorar de esta manera el desempeño académico de los mismos.

Por lo tanto, nace la necesidad de reajustar los contenidos de la trigonometría con estrategias metodológicas más activas, didácticas y participativas para los estudiantes, las herramientas tecnológicas causa en los estudiantes un gran interés para explorar y hacer del aprendizaje algo dinámico y enriquecedor. Según Raymond Duval (2004) el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la

comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión.

1.2 Antecedentes.

1.2.1 Antecedentes investigativos

Durante una exploración rigurosa, es preciso manifestar en la presente investigación, la necesidad que ha tenido el ser humano y en especial las academias e instituciones por querer evolucionar en el concepto y la forma de llevar al escenario una transposición didáctica en la trigonometría, que permita abordarlo desde un interés que tenga la sociedad y, finalmente dar una solución a un problema real.

En este ítem, se realiza una indagación a nivel mundial, nacional y regional, del cómo se abordan actualmente los conceptos de la trigonometría y su enseñanza, específicamente con el tema de identidades trigonométricas, ya que frecuentemente, se enseña el tema, pero no teniendo en cuenta que el mismo estudiante puede deducir y conjeturar a través de unos conocimientos adquiridos, permitiendo descubrir algunos elementos que lo llevan a encontrar igualdades y posteriormente aplicarlo.

***ESTRATEGIA DIDACTICA COMO APOYO AL APRENDIZAJE DE LA
TRIGONOMETRIA EN ALUMNOS TERCER AÑO DE ENSEÑANZA MEDIA***

(Donoso, 2012)

En esta tesis de maestría el autor da a conocer la elaboración de una estrategia didáctica para el proceso de enseñanza - aprendizaje de la trigonometría en el grado decimo con la ayuda de las Tics para evaluar su efecto, orientado al desarrollo de los contenidos de dicha unidad, apoyándose de una página interactiva y uso del internet, para los alumnos logren mejores resultados de una manera más didáctica.

***ENSEÑANZA DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TRIGONOMETRÍA
MEDIANTE EL USO DE TECNOLOGÍA INFORMÁTICA (Herrera, 2013)***

En el presente trabajo el autor claramente da a conocer el proceso realizado y los resultados obtenidos sobre el diseño e implementación de herramientas didácticas realizadas en GeoGebra y la plataforma Moodle, para el desarrollo de unidades básicas de aprendizaje en trigonometría, el propósito fundamental de este trabajo consistió en facilitar la enseñanza de la graficación de las funciones trigonométricas, permitiendo la asimilación de los conceptos básicos de la trigonometría (radian, longitud de la circunferencia y ángulos notables), y así optimizar la comprensión y utilización del conocimiento matemático en los estudiantes.

***COMPRESIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS MEDIANTE EL
SOFTWARE GEOGEBRA EN EL CONTEXTO DEL MODELO VAN HIELE***

(Rios, Olaya 2016)

En esta tesis de maestría los autores tienen como propósito analizar la comprensión de las razones trigonométricas, en el contexto del modelo de Van Hiele, utilizando el software de GeoGebra en los estudiantes del grado decimo. Planteando a partir de unos descriptores hipotéticos de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la comprensión de las razones trigonométricas, basadas en las fases de aprendizaje, en la temática particular y en la experiencia del docente.

***EL USO DE GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS IDENTIDADES
TRIGONOMÉTRICAS, UNA APROXIMACIÓN DESDE MÚLTIPLES
REPRESENTACIONES. (Carmona, 2016)***

En esta tesis de Maestría el autor busco describir las características que debe tener un proceso de enseñanza para que contribuya al aprendizaje de las identidades trigonométricas, utilizando diferentes registros de representaciones semióticas (RRS) con estudiantes de educación media. Para realizar éste trabajo tuvo en cuenta las teorías descritas por Raymond Duval, sobre la utilización de los RRS y realizo el análisis mediante la prueba de Hake, la cual midió el factor de ganancia del aprendizaje. El proceso metodológico conto con el uso de objetos virtuales de aprendizaje (OVA) para favorecer la

visualización, conjetura y comunicación de ideas matemáticas como elementos fundamentales de las competencias generales de matemáticas.

1.2.2 Antecedentes curriculares

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas siempre han estado rodeado de paradigmas que la caracterizan como una de las ciencias más difíciles de abordar, siendo a su vez un conocimiento estratégico y fundante para el desarrollo de capacidades cognitivas que empoderan de competencias necesarias a las personas y que dan cuenta de la calidad de la propia educación. En Colombia la educación no es ajena al contexto que le ha condicionado su evolución y al mismo tiempo la hace única en sus particularidades. Al respecto se puede observar que el currículo Colombiano en educación matemática presenta retrasos que se han venido tratando de subsanar desarrollando nuevas y mejores competencias para la enseñanza y el aprendizaje e incorporando el uso de herramientas tecnológicas que medien el proceso y agregan nuevas dinámicas acordes a las demandas que la sociedad y el propio desarrollo humano exigen; para ello el estado a través de políticas y programas educativos, como “Colombia aprende” y el programa de “Computadores para educar”. (MinTic, 2003). Le ha permitido enfilar esfuerzo para robustecer el sistema educativo con tecnologías y nuevos conocimientos que sus docentes en su proceso de formación vienen incorporando para disminuir la brecha de la calidad en la enseñanza de las matemáticas.

Con dicho propósito el Ministerio de Educación Nacional (MEN) estableció directrices para que los lineamientos curriculares y los estándares de matemáticas. (MEN 2008), fueran desplegados en los diferentes niveles educativos. Al respecto hace un llamado de atención para que en el proceso de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se reconozca la importancia de desarrollar las estrategias que permita a los estudiantes generar las competencias para formular distintas representaciones de un mismo problema. En pocas palabras que puedan plantear, comprender y explicar los problemas de forma diversa y al mismo tiempo generar diferentes soluciones a un mismo problema.

1.3 Justificación

En el proceso de aprendizaje de la trigonometría y en general de las matemáticas, los estudiantes afrontan una gran desmotivación por el grado de dificultad y estigmatización que afronta dicha área, lo cual se convierte en un reto para el docente para procurar hacer de la enseñanza un proceso interesante, útil y motivador.

Es allí donde el docente debe dotarse de estrategias didácticas, como las herramientas tecnológicas que en este caso permitan cautivar la atención de sus estudiantes y llevarlos al maravilloso mundo de las matemáticas, y gestionar el proceso enseñanza - aprendizaje mediante prácticas pedagógicas interesantes y versátiles, que conserven y garanticen la propuesta curricular permitiendo dar paso a la innovación mediante el eje articulador de la ciencia y la tecnología.

Con el presente proyecto se busca dar prioridad al uso de herramientas tecnológicas que faciliten la comprensión de las temáticas, el desarrollo de competencias básicas para la solución de problemas planteadas en contexto.

Posibles actores potenciales que favorecen los procesos académicos en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría en el grado 10° de bachillerato.

- Docentes, para la enseñanza de la trigonometría usando tecnología computacional.
- Estudiantes, porque aplican a través de herramientas tecnológicas

- Futuras investigaciones que impliquen usar herramienta tecnológica computacional y material en concreto en la enseñanza de la trigonometría, como una mediación pedagógica para conjeturar y deducir matemáticamente.

1.4 Objetivo general

Documentar las particularidades de un proceso de enseñanza aprendizaje de las funciones trigonométricas con el uso de tecnología computacional para estudiantes del Colegio Seminario Redentorista.

1.4.1 Objetivos específicos

1. Diagnosticar la comprensión de los estudiantes en el uso de la tecnología computacional para el análisis de las funciones trigonométricas.
2. Registrar el impacto del uso de la tecnología computacional para el aprendizaje de las funciones trigonométricas en grado 10°.
3. Analizar el efecto que establecen los estudiantes al desarrollar múltiples representaciones semióticas en el aprendizaje de las funciones trigonométricas.
4. Validar el uso de la herramienta tecnológica computacional diseñada través de los “*applets*”.

1.5.1 Contextualización.

Desde la observación del contexto de formación de los docentes de matemáticas en Colombia, el Ministerio de Educación Nacional manifiesta en las evaluaciones del índice sintético de calidad, la deficiente formación en cuanto al conocimiento matemático y la metodología de su enseñanza, atribuyendo a los modelos didácticos predominantes y a la poca evolución de los modelos pedagógicos que se enfocan en la enseñanza pasiva del estudiante, igualmente, por la comparación de los resultados de las diferentes pruebas nacionales e internacionales a las cuales el ministerio somete al sistema educativo, se hace evidente en el comportamiento de los estudiantes la urgencia en la mejora de los contenidos curriculares de las enseñanzas de las matemáticas.

Para el interés de este proyecto, se enfoca la necesidad de adaptar los contenidos curriculares de la trigonometría a contextos más reales y fáciles, que permitan de manera innovadora generar dinámicas de aprendizaje que amplíen las posibilidades de los estudiantes; para ello se ve una oportunidad en la implementación metodologías activas apoyadas en las herramientas tecnológicas por medio de didácticas que den más participación al estudiante en su proceso de aprendizaje de manera más contextualizada y vinculada a los intereses y a la necesidad de construcción de significados simbólicos compartidos, que deriven en el desarrollo de competencias individuales y colectivos.

Al respecto el Ministerio de Educación Nacional en los lineamientos curriculares plantea a los docentes de matemáticas un cambio de concepción para las nuevas generaciones mediante la elaboración de resultados simbólicos con significado para la creación de nuevos conocimientos matemáticos teniendo en cuenta los intereses de los niños. En cuanto

a la tarea social ofrecer múltiples respuestas a los intereses de la actualidad que se encuentra en constante cambio. Es por este motivo que la tarea del profesor de matemáticas lleva a la adquisición de una enorme responsabilidad, puesto que la matemática da privilegios y ventajas intelectuales

Tras la observación de las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante las evaluaciones internas como externas realizadas según los estándares y competencias del Ministerio de Educación Nacional, en el Colegio Seminario Redentorista tradicionales se detecta algunos problemas cómo:

- La deficiente formación y capacitación de los profesores en el área de las matemáticas y la física, especialmente en contenidos y estrategias metodológicas para su enseñanza.
- Dificultad para cumplir o desarrollar todos los contenidos curriculares, por su densidad provocando retrasos.
- Débil cultura para la innovación y el cambio que permitan responder a las necesidades de aprendizaje y la adaptación al contexto.
- Las guías de matemáticas elaboradas según los lineamientos curriculares del ministerio de educación nacional y el material bibliográfico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Funciones trigonométricas) están descontextualizados.
- Desconocimiento, poca elaboración y manejo de materiales y recursos didácticos para el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas (Funciones trigonométricas)

- Poca articulación de las tics para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (trigonometría...).
- Escasa problematización y motivación para el pensamiento crítico.
- Insuficiente participación e interés de los estudiantes en los procesos de aprendizaje al percibir el proceso como algo estático, aburrido, mecánico y repetitivo y que se enfoca en contenidos que deben ser aprendidos de memoria y no admiten cambios metodológicos

Lo anterior tiene un efecto enorme en el desempeño y eficacia del docente, pero más aún y de manera radical en la formación matemática de los estudiantes. Ante las necesidades para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y del contexto anteriormente establecido, se considera necesario adelantar estudios que contribuyan a la construcción de conocimientos permitiendo desarrollar y usar nuevas estrategias para lograr aprendizajes cada vez más eficaces en las matemáticas.

Dicho reto, invita a repensar el papel que puede desarrollar las herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas y las implicaciones de su uso, asumiendo que éstas tienen la cualidad de servir de medio para la praxis que desde la experiencia (trabajo activo) del estudiante, permite mediar entre la experimentación, la comprensión y la conceptualización de manera más práctica e interesante. Según Guzmán (2000): “ha llegado el momento de que las formas de enseñanza y los mismos contenidos deben experimentar cambios drásticos.” este planteamiento invita a que el estudiante tenga una participación activa en el proceso formativo en los contenidos matemáticos para darle la

oportunidad de dialogar e interactuar con herramientas tecnológicas ya existentes para olvidar todas las ejecuciones rutinarias que no le permiten pensar y reflexionar sobre su quehacer.

Ante dicha necesidad se considera pertinente la **formulación, implementación y desarrollo de modelos didácticos activos para el proceso enseñanza - aprendizaje de la trigonometría**, apoyados en el uso de herramientas tecnológicas computacionales, que ayuden a subsanar las dificultades entorno al aprendizaje eficaz de las ciencias de las matemáticas en estudiantes de la media vocacional, aprovechando el contexto para aplicarlo a soluciones de problemas reales, enfocados a un saber hacer en contexto.

De esta manera, se formula la siguiente pregunta, que apoyará el proceso de la investigación en una fase inicial

1.5.2 Pregunta problema

¿Qué particularidades influyen en el aprendizaje de la trigonometría, al implementar una mediación pedagógica apoyada de un software matemático libre para la enseñanza de las funciones trigonométricas en grado 10°?

Del anterior cuestionamiento, emergen algunas preguntas auxiliares:

- ¿Al inicio del estudio cuáles son los conocimientos y habilidades que tienen los estudiantes para el aprendizaje de la trigonometría?
- ¿Los estudiantes abordan los pensamientos matemáticos geométrico – variacional para la solución de problemas de tipo geométrico?
- ¿Qué tan dispuestos están los estudiantes para el uso de la tecnología computacional?

CAPITULO II

2. MARCO REFERENCIAL

2.1 Introducción

En este capítulo se abordan los conceptos desde diferentes autores sobre la importancia y origen de la trigonometría, herramientas tecnológicas como GeoGebra, las diferentes formas de enseñar y aprender, teoría de los registros de representación semiótica y las competencias específicas del área de matemáticas, con el fin de dar sustento a la pregunta problema de trabajo investigativo.

2.2 Marco disciplinar

La trigonometría es una de las rama más interesante de las matemáticas, ésta permite estudiar las distancias sin la necesidad de tener que recorrerlas, para ello hace uso de triángulos, circunferencias y otras figuras geométricas, lo que la caracteriza como materia útil y agradable de estudiar por la relación visual, estética, su lógica y lenguaje que permiten comprender el mundo de forma práctica. Por ejemplo, cuando el ser humano busco entender y explicar las dinámicas y ciclos de universo para predecir el movimiento de los planetas y las estrellas y comprender cómo estos afectan los patrones de la naturaleza para los momentos de la siembra, la caza, la navegabilidad e incluso la lógica y conveniencia de las construcciones, así lo hicieron los antiguos Egipcios, quienes calcularon distancias no medibles por métodos tradicionales, cómo distancias entre planeta, estrellas, lunas, resolviendo cálculos trigonométricos en el que los triángulos jugaron un

papel fundamental, tanto así que quedaron reflejado en la agricultura y la forma y ubicación de las pirámides, las cuales guardan una simetría con las estrellas, e internamente poseen un diseño matemático fundado en el número áureo, el cual se obtiene de la relación de longitudes y que establece la correlación y simetría entre el tamaño, la altura y la proporcionalidad de las mismas. También usaron los obeliscos como relojes solares, por medio de ángulos y el tamaño de las sombras que les permitían calcular el momento preciso en cual se encontraban.

Evidentemente la trigonometría es muy útil y aun es importante estudiarla pues permea mucha de los desarrollos que el hombre usa y debe entender, de allí la urgencia de encontrar mejores medios y formas de enseñarla, para cambiar los paradigmas que hacen difícil que muchos se enamoren de su estudio; el ayudar a descubrir la magia que guarda esta ciencia es un reto que hoy tienen los docentes y para ello surgen nuevas posibilidades y apuestas pedagógicas mediadas por herramientas tecnológicas que abren un campo de acción interesante pero que muy pocos aprovechan. La relación didáctica y académica para el aprendizaje de las matemáticas (trigonometría) por medio de nuevas herramientas tecnológicas es la preocupación de este proyecto, que para su inicio demanda establecer una aproximación teórica, la cual se enmarcara en las siguientes categorías: Funciones trigonométricas, enseñanza y aprendizaje, herramienta tecnológica (GeoGebra), representaciones semióticas.

Funciones trigonométricas: para poder establecer el concepto de función trigonométrica primero se debe entender que es una función, al respecto se puede decir que el concepto ha madurado en el tiempo. Por un lado Spivak (1978), plantea que: “El

concepto más importante de las matemáticas es el concepto de función”. Y es que en la mayoría de las ramas de la matemática, la investigación se centra en el estudio de funciones y por tal motivo el concepto se asume muy generalizado, al respecto Farfan y Garcia en su artículo El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico (1989), plantean que “En libros clásicos de matemáticas de nuestros tiempos, es observable cómo se intenta favorecer más la relación que guarda este concepto con el intento por describir fenómenos naturales” y que por lo mismo desde esa perspectiva citando a Dieudonné expresa que: “en la actualidad se prefiere considerar el concepto de función como aplicación” Dieudonné, (1989, p.187).

Podría pensarse que la noción original de función era mucho más intuitiva en sus inicios; la actual tiene un alto grado de conceptualización que la hace mucho más abstracta. En palabras de Freudenthal (1983): “aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático”. Freudenthal (1983, p.497).

A nivel general se observa que la función es una noción de correspondencia, cómo lo explica Swokowski, Earl & Jeffery A. Cole (2011): “una función f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D exactamente un elemento de E ”. Por lo que es lógico que en relación con la trigonometría se usen para encontrar dichas correspondencias.

Las funciones pueden ser de diferentes tipos dependiendo el número de variables y/o en relación a lo que se va a establecer la correspondencia: cuadráticas, polinomiales, racionales, inversas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Ahora bien, las funciones trigonométricas precisamente son esas nociones de correspondencia que permiten por medio del cálculo de los ángulos de los triángulos, establecer distancias. Sin embargo una definición epistemológica es difícil de encontrar especialmente porque la mayoría de los textos dan respuesta en orden a su uso y no en su sentido estricto. Al respecto De Oteyza plantea que: “la trigonometría se basa en la semejanza de triángulos; esto es, si dos triángulos tienen sus lados proporcionales entonces sus ángulos deben ser iguales”. (De Oteyza, Elena et al, 2007).

Las funciones trigonometrías se calculan por medio de formas simplificadas llamadas identidades trigonométricas que se representan siempre a partir de letras griegas como alfa, beta, omega, etc; y utilizan elementos como los grados centígrados para establecer las variables de cada una de ellas, en ese sentido “las funciones trigonometrías permiten el análisis y estudio de los triángulos, especialmente en las formas, significados y valores de los diferentes ángulos que pueden existir”. (Bembibre 2010).

Cómo se mencionó anteriormente, la complejidad del cálculo de las funciones trigonométricas que demandan operaciones aritméticas y la conceptualización teórica necesaria para establecerlos análisis de los valores variables de los ángulos, junto con el lenguaje y los procedimientos de graficación que representan dichos cálculos, son en muchos casos procesos que pedagógicamente revisten de dificultad para el aprendizaje

matemático, más aun si su uso está fuera de contexto y desarticulado de las nuevas herramientas tecnológicas. El lenguaje matemático en la mayoría de las ocasiones tiende a ser complejo, de allí que la aproximación a la comprensión de la trigonometría desde las herramientas tecnológicas pueda aportar al proceso y descubrir de manera más lúdica y sencilla su sentido y utilidad, llevando a integrar la formación por competencias en esta disciplina.

Herramienta tecnológica: La incorporación de la tecnología en la educación ha abierto un universo de posibilidades para la enseñanza y aprendizaje de la matemática, su uso busca permitir a los estudiantes procesos académicos que agregar más valor, actualmente los adelantos técnicos y las innovaciones en los ambientes computacionales e informáticos proporcionan condiciones para que los estudiantes puedan identificar, analizar, diseñar, resolver y comunicar distintas soluciones matemáticas. De allí que “El uso de la tecnología puede llegar a ser una poderosa herramienta para que los estudiantes logren crear diferentes representaciones de ciertas tareas y sirve como un medio para que formulen sus propias preguntas o problemas”. (Barrera & Santos, 2001)

La preocupación por establecer qué tipo de herramientas tecnológicas son las más indicadas para fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es generalizada dentro de la disciplina, especialmente por la posibilidad de potencializar el proceso y dinamizar la didáctica, igualmente no se puede desconocer que dichos logros permiten impactar los resultados académicos sujetos constantemente a procesos evaluativos.

Comprender las implicaciones de las herramientas tecnológicas y describir los procesos necesarios para una interacción adecuada que permita el desarrollo de competencias matemáticas es un trabajo útil para avanzar en el diseño y aplicación en la enseñanza de esta ciencia, y por lo mismo “la comprensión de conceptos matemáticos mediante una herramienta tecnológica, también permite evaluar las ventajas y desventajas de la misma”. (Gamboa R, 2007)

Es evidente entonces la necesidad de incorporar las herramientas tecnológicas como uno de los elementos más efectivos para superar la desmotivación estudiantil lo que demanda pensar en qué metodologías son las más indicadas de tal forma que “involucren herramientas virtuales para el aprendizaje de las matemáticas, aplicaciones llamativas, prácticas, interesantes, versátiles que capturen la atención de los estudiantes y los involucren en el manejo de opciones diferentes a las ya manejadas habitualmente”. (Herrera, 2013)

El estudio de la trigonometría para algunos estudiantes puede convertirse en algo rutinario y memorístico por no contar con las herramientas necesarias para lograr una comprensión a profundidad y que centre la atención para el aprendizaje, así como también mejore la dinámica y utilidad para cada uno de los conceptos. Por tal motivo, es fundamental que las temáticas además de tener conceptos y formulas, también incluyan una serie de herramientas que permitan explorar, relacionar, conjeturar y concluir sobre lo que se desea aprender y enseñar, e igualmente contribuir a identificar según el contexto de aplicación si con el uso de la herramienta tecnológica se logra alcanzar una mejor

comprensión de los conceptos matemáticos, así como identificar las ventajas y desventajas que se presentan al trabajar con la herramienta seleccionada.

Para la enseñanza de la matemáticas es necesario fijar entonces objetivos de aprendizaje que permitan dirigir el proceso por el cual se guía al estudiante, lo cual implica el pensar en el diseño de los objetos de aprendizaje que contengan los diferentes momentos y procesos, entre ellos los saberes previos, los momentos investigativos y evaluativos. En dicho proceso se debe considerar la implementación de las herramientas tecnológicas como medio estratégico que responden a las exigencias del contexto cada vez más globalizado, rápido y tecnológico, para de esta manera disminuir las brechas y generar más facilidades en la enseñanza y el aprendizaje.

GeoGebra: Para lograr el objetivo de este proyecto se ha identificado una herramienta que ha sido diseñada para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas llamada GeoGebra, ésta es una herramienta tecnológica que combina el álgebra, la geometría, el análisis y la estadística en un único y sencillo proceso operativo, además cuenta con una interfaz gráfica de gran capacidad que permite generar diferentes representaciones de los objetos de trabajo con múltiples posibilidades de presentación: algebraicas, estadísticas, gráficas, organización en tablas, matrices, planillas y hojas de datos dinámicamente integradas. En su presentación web GeoGebra (2017) se plantea como:

Un software de matemática dinámica, que busca apoyar la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering &

Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo.

Busca:

- Conectar geometría, álgebra y hoja de cálculo de forma completamente dinámica
- Suministrar una interfaz muy fácil de usar, contando a su vez con poderosas herramientas
- Ofrece una herramienta de autoría para crear materiales de aprendizaje interactivos como páginas web
- Está disponible en varios idiomas
- Es un software de código abierto. GeoGebra (2017)

El rastreo del origen de esta herramienta permite decir que GeoGebra es fruto de un trabajo investigativo de Markus Hohenwarter un austriaco que en el año 2002 cursaba su maestría en Ciencias de la Computación Aplicada y Enseñanza de las Matemáticas en la universidad de Salzburgo en Austria y que para optar por su título decidió investigar sobre una herramienta tecnológica basada en software matemático que fuese interactivo y de libre acceso para la educación en colegios y universidades. Las herramientas más parecidas a su desarrollo son software de geometría dinámica, pero según el sumario del Seminario de actualización en Matemáticas de la Universidad de la Rioja en 2008 plantea que Geogebra “supera ampliamente las limitaciones de esa categoría”. Al respecto el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España en el 2012 en su plataforma de formación en red con el documento GeoGebra en la Enseñanza de las Matemáticas indica que con esta herramienta se puede diseñar de manera sencilla: “...puntos, segmentos, polígonos, rectas, vectores, cónicas, lugares geométricos, gráficas de funciones, curvas paramétricas e

implícitas, distribuciones de probabilidad y diagramas estadísticos. Todo ello dinámicamente, de forma que cualquier objeto puede sufrir modificaciones con un simple movimiento del ratón”. O con el teclado, “y todo eso modificable en forma dinámica: es decir que si algún objeto depende B de otro A, al modificar A, también se actualiza B. Pero también puedes definir funciones reales de variable real, calcular y graficar sus derivadas, integrales, etc...” Anónimo (2008)

Hohenwarter continuó el desarrollo de su herramienta desde la Universidad de Boca Ratón, Florida en Estados Unidos y desde entonces viene actualizándola y ya va por la versión 6.0. Cabe recalcar la mentalidad Colaborativa de su desarrollo que lo llevo a crear el Instituto internacional GeoGebra (IGN) en el 2007, “con el propósito de mejorar la ayuda a la comunidad ofreciendo capacitación y apoyo a los maestros; desarrollando materiales de enseñanza y el software; realizando investigación y promoviendo el alcance del conocimiento y la tecnología a comunidades menos pudiente”. Hohenwarter (2010).

¿Por qué usar Geogebra?, ésta herramienta tecnológica permite a docentes y estudiantes encontrar foros de ayuda en español, abordar la geometría y otros aspectos matemáticos a través de las representaciones graficas de varias modelaciones que admite ser observadas desde diferentes grados escolares. Así como experimentar y manipular distintos elementos teórico - prácticos, facilitando la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa de diversas modelaciones matemáticas.

Una de las ventajas que tiene la herramienta además de ser gratuita es la posibilidad de brindar facilidad para el aprendizaje. Gonzales quien recopila en si sitio web (Iniciación al GeoGebra) diferentes trabajos elaborados por otros profesores en el desarrollo de su labor docente plantea que:

La característica más destacable de GeoGebra es la doble percepción de los objetos, ya que cada objeto tiene dos representaciones, una en la Vista Gráfica (**Geometría**) y otra en la Vista Algebraica (**Álgebra**). De esta forma, se establece una permanente conexión entre los símbolos algebraicos y las gráficas geométricas. Todos los objetos que vayamos incorporando en la zona gráfica le corresponderán una expresión en la ventana algebraica y viceversa...Posee características propias de los programas de Geometría Dinámica (DGS) pero también de los programas de Cálculo Simbólico (CAS). Incorpora su propia Hoja de Cálculo, un sistema de distribución de los objetos por capas y la posibilidad de animar manual o automáticamente los objetos. González (2017)

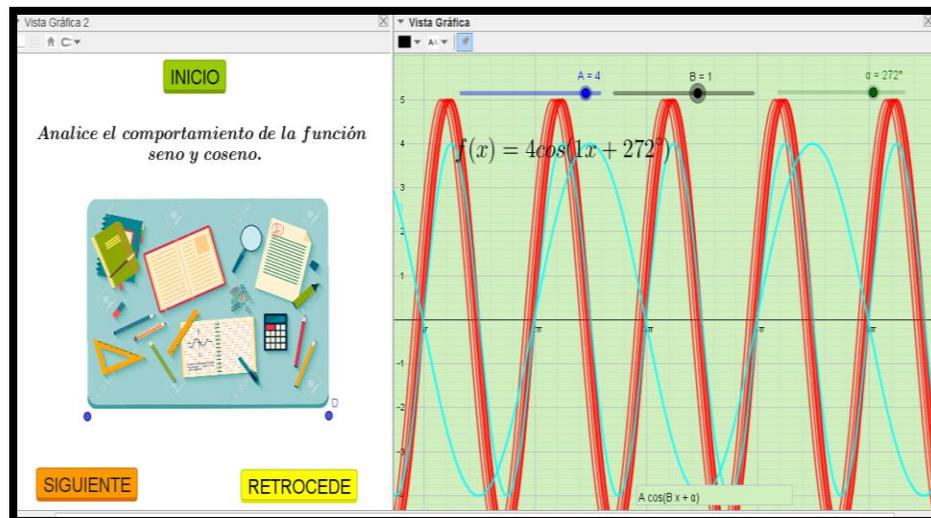


Ilustración 1: Vista dinámica de Geogebra.

La Enseñanza y el aprendizaje: las matemáticas como acción humana que usa un lenguaje simbólico propio de las ciencias y que se enmarcan dentro de un sistema conceptual propio, es afectado por la forma en cómo las concibe el profesor y esto a su vez influye en la forma en que éste las enseña. Ahora bien, si “el docente es quien decide las funciones y tareas que considera más efectivas para el aprendizaje de sus estudiantes” (Godino et al., 2003), se hace evidente el reto del docente para adoptar modelos didácticos coherentes con dicho propósito y que permitan incorporar el rol y la participación simultánea del estudiante que también es responsable y capaz de construir su proceso de aprendizaje demandando nuevas comprensiones y dinámicas.

Ahora bien, teniendo en cuenta que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas poseen en si un fin compartido que se sirve de la comprensión instrumental como relacional para el desarrollo de las competencias o capacidades matemáticas, es importante ver que dicho dialogo de procesos debe responder a dos cuestiones básicas descrito por Godino:

1. ¿Qué comprender? ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que queremos que nuestros alumnos lleguen a dominar? La respuesta a estas preguntas es el eje descriptivo, que indicará los aspectos o componentes de los objetos a comprender. Definir la “buena” comprensión y la “buena competencia” matemática requiere definir previamente las “buenas” matemáticas.
2. ¿Cómo lograr la comprensión y la competencia por parte de nuestros alumnos? La respuesta a esta pregunta es el eje procesual que indicará las fases o momentos necesarios para el logro tanto de la “buena” comprensión como de la “buena” competencia. (Godino et al., 2003, p 64)

Se puede observar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como proceso pedagógico que demanda destrezas que permitan comunicar y poner en práctica las lógicas y el lenguaje de manera pertinente para lograr dichos propósitos. Por tal motivo “La persona que sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas... relacionando los objetos o fórmulas matemáticas con las situaciones problemas que surgen en la cotidianidad como aplicación de dicho conocimiento matemático”. (Godino et al., 2003, Pag.66)

Otro aspecto a considerar para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es la construcción de los significados de los diferentes conceptos que utiliza la matemática en procura de que sea un aprendizaje significativo, para el logro de esta construcción (Ortiz

2001) propone como estrategia didáctica la resolución de problemas y recomienda la posibilidad de que el alumno participe en su planteamiento, con la condición de que: “estas situaciones tengan sentido para ellos y les permita generar conjeturas y comunicarlas. Dado el problema, el alumno debe involucrarse activamente en todas las fases hasta la solución: planteamiento, producción de conjeturas y discusión, y redacción de la solución”. (Ortiz, 2001, p45).

Dicho planteamiento reviste aún más de valor la posibilidad de incorporar herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas, pues estas se convierten en medio idóneo al contar con elementos visuales y técnicos que los estudiantes valoran y motivan para apropiarse del conocimiento y asumen el reto en su aplicabilidad lo cual les exige comprensión de los significados y destreza en la trasposición didáctica que desde la comprensión del problema hasta la argumentación de la solución requiere el desarrollo de las competencias de aprendizaje, en función de ello los estudiantes pueden dar cuenta de las competencias que la propia Ortiz describe:

- Adquirir seguridad y destreza en el ejemplo de técnicas y procedimientos básicos a través de solución de problemas.
- Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema
- Elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas.
- Reconocer situaciones análogas (es decir que desde un punto de vista matemático, tienen estructura equivalente).
- Escoger y adaptar las estrategias adecuadas para la resolución de un problema.

- Comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.
- Predecir y generalizar resultados.
- Desplegar gradualmente el razonamiento deductivo. ”. (Ortiz, 2001, p51)

El diseño de estrategias didácticas apoyadas en herramientas tecnológicas que permita resolver problemas abre las posibilidades a aprendizajes significativos al ofrecer al estudiante herramientas para dicho proceso, como el desarrollo de habilidades comunicativas entre el docente y el estudiante, propiciando operaciones mentales distintas. No es adecuado pensar que el modelo tecnológico por si solo va a dar solución a los viejos procesos, es conveniente como lo plantea Ausubel (2010) tener en cuenta que “El aprendizaje reside en que las ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario, sino sustancial con lo que el estudiante ya sabe”.

En lo que compete al proyecto, es de suma importancia comprender y llevar a la práctica que los materiales, en este caso las herramientas tecnológicas y los registros de representación semiótica con los cuales aprende el estudiante sea propio para él. Dicha importancia lo advierte Ausubel cuando dice que:

Todo material de aprendizaje tiene dos criterios, el de la significatividad lógica (lo realmente significativo, lo que quiere y sabe que va a usar cuando aprenda) y lo significativamente psicológico que hace referencia a la comprensibilidad de los contenidos de enseñanza, donde la persona que es sujeta a ser enseñada debe

disponer de elementos motivacionales, actitudinales, emocionales; que están presentes en todo aprendizaje. (Ausubel, 2000).

Por lo tanto, es indispensable que la estrategia didáctica sea motivacional para que el estudiante tenga ese deseo por aprender y explorar hasta llegar a resultados que mejore su desempeño académico y le permitan ser más competentes en cuanto a las Funciones trigonométricas. Para que al estudiante se le facilite su aprendizaje es necesario que él encuentre la utilidad de dicha temática, así como de la herramienta, que la relacione con el entorno pero sobre todo que vea útil, es por esto que se hace necesario un medio de aprendizaje, entendido éste como: “un conjunto de recursos digitales, auto contenibles y reutilizable” Ministerio de Educación Nacional (2015). Este mismo organismo estipula que el propósito educativo debe estar constituido por 3 componentes internos que son:

- **Contenidos:** Estos están directamente relacionados con el aprendizaje, con la parte teórica, pero los contenidos deben ser didácticos, interactivos, amigables y entendibles.
- **Actividades de aprendizaje:** Estas están orientadas a prácticas, trabajo colaborativo y propuestas de trabajo académico elaboradas por el docente.
- **Elementos de contextualización:** Es la forma de mostrar el entorno del objeto como la introducción, el objetivo de aprendizaje, el resumen, las preguntas generadoras, los créditos y derechos de autor. (Ministerio de Educación Nacional, 2015).

Dentro del proceso enseñanza aprendizaje de la trigonometría es imperativo que surja el aprendizaje gracias a las actividades que emanen del uso de las herramientas tecnológicas garantizando la asimilación del nuevo conocimiento que junto con los saberes previos posibilitan se dé una nueva significación en contexto.

2.3 Marco teórico

2.3.1 Teoría de registros de representación semiótica

Las matemáticas han acompañado al ser humano en su desarrollo, jugando un papel crucial en el despliegue de sus capacidades para resolver problemas, esta ciencia hace parte de su cotidianidad y aunque este la use de manera consciente o inconsciente, siempre ha

estado presente en su vida. La búsqueda de soluciones que demandan procesos de cálculo, análisis de problemas y lógica matemática han ido de la mano con la evolución del lenguaje el cual ha emergido como elemento esencial de la comunicación para hacer social el conocimiento y como cualidad intrínseca del mismo ser humano que es social por naturaleza. En esta evolución del intelecto que le ha permitido pasar de calcular y usar recursos para sobrevivir de la caza y la agricultura en climas extremos a generar misiones espaciales para explorar el universo, la transferencia del conocimiento matemático y su aprendizaje ha dependido significativamente de su enseñanza que como proceso de comunicación demanda representaciones, signos, símbolos y todo un lenguaje que configuran un sistema que a nivel científico llaman representaciones semióticas.

El uso y enseñanza de las matemáticas requiere por tanto de registros de representaciones semióticas que permitan aproximarlos a la lectura de las realidades. Al respecto Godino & Batanero (1994) explican que:

Las funciones semióticas dan la idea de que un sujeto entiende un concepto matemático cuando es capaz de usarlo en distintas prácticas, es por eso que las matemáticas son consideradas como una actividad de “resolución de problemas” que es compartida socialmente, donde el lenguaje es simbólico y a su vez, es un sistema conceptual lógicamente organizado. Batanero (1994)

La semiótica como rama de la lingüística que estudia los sistemas de los signos como: códigos, lenguas y señales, juega un papel clave desde la perspectiva de la matemática, podría decirse que guardan una relación intrínseca e indisoluble porque mediante la

semiótica se modela la actividad matemática, tanto en los procesos de resolución de problemas, como en los procesos comunicativos de enseñanza y aprendizaje de dicha ciencia. Al respecto Bruno de D'Amore et al., (2013) en su libro "La semiótica en la didáctica de las matemáticas" afirma que la semiótica comenzó a formar parte explícita de la didáctica a mediados de los años 90 del siglo pasado con el trabajo de Raymond Duval (1999) y plantea que aun conociéndose los beneficios y utilidad de la semiótica para la enseñanza las matemáticas la importancia que le dan tanto maestros como la propia escuela es aún muy incipiente y advierte que "aunque existen muchas investigaciones en este campo, no se han visualizado y materializado aún en las clases regulares". Bruno de D'Amore et al., (2013)

Para comprender la importancia de la semiótica en las matemáticas recurrimos de nuevo a Godino partiendo del concepto de la naturaleza de los objetos matemáticos el cual él desarrolla a partir de su análisis de la didáctica, argumentando que ésta tiene como propósito: "identificar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como explicar la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción". Godino (2003, p28) y recalca que:

El análisis de la noción de significado utilizada con frecuencia de modo informal en los estudios didácticos de las matemáticas puede ayudar a comprender las relaciones entre las distintas formulaciones teóricas en esta disciplina y permitir estudiar bajo una nueva perspectiva las cuestiones de investigación, particularmente las referidas a la evaluación de los conocimientos y la organización de los procesos instruccionales.

Es necesario entonces comprender que la enseñanza de las matemáticas no es un asunto solo del contenido científico sino también del abordaje de las representaciones y significados que se usan en la evaluación de los conocimientos así como también en el diseño y gestión de los procesos explicativos que configuran las instrucciones, procedimientos y conceptos matemáticos, los cuales son incorporados por medio de transposición didáctica. Así pues lo que significa para un estudiante una representación matemática, lo que éste comprende, explica, usa y concluye está influenciado por la didáctica que media en su aprendizaje. Dicha situación ya la advertía Balacheff (1990) cuando cita el significado como palabra clave de la problemática de investigación de la Didáctica de la Matemática: "Un problema pertenece a una problemática de investigación sobre la enseñanza de la matemática si está específicamente relacionado con el significado matemático de las conductas de los alumnos en la clase de matemáticas" Balacheff (1990, p. 258).

Es interesante observar que este autor incorpora un nuevo elemento en la didáctica y es la conducta del estudiante frente a ella, lo que obliga a repensar el papel de la comunicación y el lenguaje matemático (semiótica). Y más aún la incidencia en el aprendizaje mediado por herramientas tecnológicas.

El rastreo teórico de la relación de la semiótica con la matemática muestra que es un campo muy importante para la enseñanza, un campo estratégico que demanda mucha atención en especial si se relaciona con las herramientas tecnológicas, estudiar sus implicaciones, comprender su alcances y condiciones podrá potenciar el aprendizaje y la

gestión del conocimiento en matemáticas, más aun cuando el contexto actual se desarrolla cada vez más por medios de las tics. En el caso específico de este proyecto la herramienta GeoGebra permite a estudiantes y profesores descubrir las diferentes representaciones matemáticas que le rodean de manera natural y se benefician de su utilidad para la comprensión del mundo y la solución de problemas. Por lo mismo El uso de recursos tecnológicos debe ser un proceso pensado y recreado con el objetivo de lograr las intencionalidades de formación y de aprendizaje que. Ya lo explicaba Hitt:

“El diseño de nuevos materiales es imperativo en donde sea notorio el uso reflexivo y creativo de la tecnología existente. El profesor de matemáticas sentirá la necesidad del cambio cuando se le presenten materiales y estudios que muestren su efectividad en el aula, en donde la visualización matemática promueva la elección correcta de un sistema semiótico de representación, relacionado con el concepto inmerso en la situación problémica, y donde la aplicación de aspectos sobre los sistemas semióticos de representación sea clara. La visualización matemática promoverá entonces una visión global, integradora, holística, que articule representaciones de varios sistemas”. (Hitt, 1998)

2.3.2 Competencias matemáticas

La aplicación y uso de las matemáticas es una acción que pasa esencialmente por un proceso de comprensión y aprensión del conocimiento tanto actitudinal como intelectual que permita a la persona que las aprende desarrollar las habilidades y adquirir los conocimientos necesarios para hacerlo. El ser competente es algo que se forja con la

formación de la persona en los diferentes aspectos de su desarrollo, lo que quiere decir que no es una condición innata, al contrario el potencial está allí para ser desarrollado de manera constante y dinámico. Si se parte de dicho criterio las competencias en matemáticas se pueden generar, potenciar o completar, pero esto exige que se haga de manera integral desde una visión que asuma el sujeto en su totalidad.

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) por medio de su portal Colombia aprende entiende como competencia matemática: "un saber hacer flexible que relaciona conocimientos matemáticos, habilidades, valores y actitudes que permite formular, resolver problemas, modelar, comunicar, razonar, comparar y ejercitar procedimientos para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido en un contexto determinado". Desde esta perspectiva el presente trabajo busca preparar a los estudiantes y docentes para que asuman competencias que les permitan responder tanto dentro como fuera del aula, de tal forma que sean conscientes de su capacidad y lo hagan con suficiencia. Para ello se refuerza el concepto de competencia matemática desde la perspectiva de Villada cuando plantea que: "Si una competencia es una capacidad en acción demostrada con suficiencia, es porque el que pretende ser competente tiene conciencia de su capacidad, de sus acciones y de la calidad en ésta. Villada (2007). Y se hace énfasis en la condición de tener conciencia pues es lo que faculta al aprendiz de poder dirigir su capacidad y dar cuenta de ello, más cuando está sujeto a un proceso de formación que exige mostrar las aptitudes por la calidad en lo que se hace y lo que tienen por objetivo demostrar, en pocas palabras pasar del dicho al hecho.

El proceso de desarrollo de las competencias matemáticas lleva a tener en cuenta las motivaciones de los estudiantes para que exploren el conocimiento, se arriesguen a equivocarse, experimenten soluciones y aprendan de sus errores, para ello se apuesta por el cambio del paradigma de prevención y dificultad que los aleja de dicho saber, por medio del apalancamiento del aprendizaje de las matemáticas mediado por el uso de herramientas tecnológicas para facilitar la práctica del análisis, el planteamiento de conceptos, la argumentación y la experimentación de forma que puedan resolver situaciones problema utilizando diversos métodos que cuentan con diferentes registros de representación semiótica, abriendo así opciones de aprendizaje para que el estudiante descubra la belleza y dinámica que caracteriza la aplicación de la matemáticas su utilidad y se logre identificar con ellas.

El ser capaz de realizar tareas matemáticas, comprender y argumentar por qué pueden ser utilizadas las funciones, teoremas, principios, fundamentos y demás contenidos y propiedades matemáticas, el identificar y construir con ello procesos para resolver problemas o adaptarlos a situaciones nuevas generando o estableciendo relaciones o simplemente aprendiendo nuevos conceptos matemáticos, es lo que se busca fortalecer con el uso de GeoGebra para el estudio de las Funciones trigonométricas.

El despliegue de las competencias matemáticas es pues un proceso estructurado, intencionado y evaluado que demanda una mirada integral, para ello el MEN establece 7 competencias básicas las cuales son:

1. Comprensión conceptual de las nociones, propiedades y relaciones matemática
2. Formulación, tratamiento y resolución de problemas.

3. Actitudes positivas en relación con las propias capacidades matemáticas.
4. Razonamiento.
5. Comunicación
6. Modelación
7. Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

Más allá de las competencias a desarrollar subsiste una preocupación por el dominio, enfoque o intencionalidad de los lineamientos Curriculares que pueden orientarse a lo que llaman pragmatismo e instrumentalismo del conocimiento matemático, “en el cual se utilizan los conceptos, proposiciones, sistemas y estructuras matemáticas como herramientas eficaces mediante las cuales se llevaban a la práctica determinados tipos de pensamiento lógico y matemático dentro y fuera de la institución educativa”. MEN Estándares Matemáticas. (2003).

Al respecto el propio Ministerio de educación con el proceso de definir los estándares de matemáticas analiza y reflexiona que:

También pueden reinterpretarse como potentes precursores del discurso actual sobre las competencias la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, Novak y Gowin³, y la de la enseñanza para la comprensión de Perkins, Gardner, Wiske y otros . En la primera, la significatividad del aprendizaje no se reduce a un sentido personal de lo aprendido, sino que se extiende a su inserción en prácticas sociales con sentido, utilidad y eficacia. En la segunda, la comprensión se entiende explícitamente como relacionada con los desempeños de comprensión, que son

actuaciones, actividades, tareas y proyectos en los cuales se muestra la comprensión adquirida y se consolida y profundiza la misma. En las dimensiones de la comprensión se incluye no sólo la más usual de los contenidos y sus redes conceptuales, sino que se proponen los aspectos relacionados con los métodos y técnicas, con las formas de expresar y comunicar lo comprendido y con la praxis cotidiana, profesional o científico-técnica en que se despliegue dicha comprensión.

Dicha preocupación por encontrar un concepto integral de competencia matemática deriva en reconocer que todas las dimensiones que las componen se articulan claramente con una noción amplia de competencia como: “conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores”. MEN (2003).

Entendiendo entonces que las competencias matemáticas no se desarrollan automáticamente y que estas requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema, significativas y comprensivas, se encuentran más argumentos para incorporar el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra para establecer si por medio de estas es posible avanzar a niveles de competencia más y más complejos en matemáticas

Para efectos del presente proyecto, se focalizará en las competencias matemáticas propuestas por el Ministerio de educación nacional que se explican a continuación:

1. “Comprensión conceptual de las nociones, propiedades y relaciones matemática”:

Es decir conocer el significado, su funcionamiento, el porqué del concepto o los procesos matemáticos y su relación. Según los estándares curriculares del MEN los conocimientos básicos que se deben desarrollar son:

- Pensamiento numérico y sistemas numéricos.
- Pensamiento espacial y sistemas geométricos.
- Pensamiento métrico y sistemas de medidas.
- Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.
- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. (MEN 2006).

2. “Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos”: En este aspecto se busca establecer si se tienen el conocimiento sobre los procedimientos matemáticos como por ejemplo técnicas, métodos, estrategias, algoritmos entre otros; si se sabe el cómo y cuándo usarlos pertinentemente y si se tienen la flexibilidad para adaptarlos a diferentes problemas.

3. “Modelación”: Entendida ésta como la manera de describir, representar y explicar la relación entre el mundo real y las matemáticas, es la habilidad de detectar esquemas que se repiten en situaciones de la cotidianidad, la ciencia, la naturaleza o la propia matemáticas para ser reconstruidas mentalmente. Es pues un factor estratégico para resolver problemas de la realidad, al construir modelos matemáticos que representen adecuadamente las condiciones propuestas o permitan hacer predicciones.

4. “Comunicación”: El poseer esta competencia implica ser capaz de reconocer el lenguaje matemático y sus diferentes representaciones semióticas, sabe usar los conceptos, las ideas y procesos matemáticos, construye y presenta argumentos; reconoce los significados, expresa, interpretar y evaluar las nociones matemáticas y se es capaz de diseñar, interpretar y ligar representaciones.
5. “Razonamiento”: es la habilidad para ordenar ideas en la mente y llegar a una conclusión pertinente, para ellos puede justificar estrategias y procedimientos, formular hipótesis, hacer conjeturas, deducciones e inducciones, identificar problemas, construir argumentos y exponer ideas.
6. “Formulación, tratamiento y resolución de problemas”: Está competencia hace referencia a la capacidad para identificar factores relevantes en situaciones específicas que permitan identificar, definir, y plantear problemas así cómo dar solución a los mismos de manera novedosa e innovadora.
7. “Actitudes positivas en relación con las propias capacidades matemáticas”: Esta última competencia no menos importante se enfoca en habilidades blandas o del ser como lo es la confianza en sí mismo y en su capacidad matemática, el sentir y saber que se es capaz pasa por el pensar que se es capaz de resolver los problemas matemáticos, esta competencia hace relación con la actitud frente al aprendizaje de las matemáticas; También implica el reconocer que el conocimiento matemático es útil, tiene sentido y adquiere valor e interés (se identifica con él).

El desarrollo de las anteriores competencias se debe hacer de manera sistémica, en contexto, integrando los saberes previos de los estudiantes, acoplando la didáctica y leyendo las interacciones que se dan en los diferentes escenarios de aprendizaje. Por ello en el presente estudio al incorporar la herramienta GeoGebra se parte de una planificación del proceso de enseñanza - aprendizaje y se consideran los factores a medir y acompañar para que al interpretar los resultados de los estudiantes se establezca el nivel de competencia matemática y así establecer las condiciones que potencial en ellos las aptitudes y actitudes que los llevan a tener mejores desempeños.

CAPÍTULO III

3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Introducción

En este apartado se describe la metodología utilizada para el desarrollo de la investigación, permitiendo responder con cada una de las acciones pensadas en los objetivos que se plantean en el capítulo I, asimismo, teniendo como mediación el uso de herramienta tecnológica computacional apoyado en el software geogebra con el fin de impactar en la enseñanza aprendizaje de las funciones trigonométricas en grado 10° I.

En términos generales refiere al tipo de estudio, el diseño de la investigación, también se mencionará la población y los sujetos que intervinieron en la indagación y por último las fases con la descripción general para dar cumplimiento a los objetivos propuestos.

3.2 Descripción general del estudio

3.2.1 Enfoque

Este trabajo se inscribe en el campo de las didácticas de las matemáticas como una investigación de enfoque descriptivo, buscando establecer las particularidades del proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas con el uso de tecnología computacional (GeoGebra) para estudiantes del Colegio Seminario Redentorista. En su análisis se utilizaron herramientas analíticas tanto cualitativas como cuantitativas, desde el punto de vista cuantitativo por que se obtiene datos susceptibles de análisis estadístico que permite medir los resultados y desde el punto de vista cualitativo por que se analiza las intervenciones y el comportamiento de los participantes sometidos al estudio desde su entorno natural y su contexto, ambos análisis aportan elementos que permite caracterizar

los factores que aporta el uso de las tecnologías para la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría.

3.2.1 Tipo de investigación.

La investigación es de tipo cualitativo descriptivo, pues la investigación se enfoca en describir y comprender el fenómeno de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría por medio de la herramienta tecnológica geogebra partiendo desde el análisis del comportamiento de los estudiantes, el desarrollo de los contenidos y los resultados obtenidos. La intención es describir los resultados y la perspectiva de la población objeto de estudio acerca del impacto de la tecnología en la enseñanza de las funciones trigonométricas en el aula.

3.2.2 Diseño de la investigación

Para esta investigación se utilizaron herramientas cuantitativas y cualitativas bajo un diseño descriptivo. El plan de trabajo con el que se pretende estudiar la incidencia del uso de la herramienta Geogebra y los procesos de cambio en una población objeto de estudio que no son asignados de acuerdo con un criterio aleatorio se realiza mediante la aplicación de un pre test que permite diagnosticar los errores conceptuales y procedimentales de los estudiantes, posteriormente el desarrollo de hojas de trabajo que permitan orientar por medio de geómetra el abordaje conceptual y un postest para mirar si con el uso de las herramientas tecnológicas se corrigieron los errores detectados en el inicio del estudio.

3.2.3 Sujetos

El grupo seleccionado fue un grado décimo del Colegio Seminario Redentorista San Clemente María Hofbauer, de la ciudad de Manizales, con un modelo pedagógico de desarrollo humano Pluridimensional por competencias, con enfoque humanista de la educación. Lo conformaron 33 estudiantes, 5 chicas y 28 chicos entre las edades de 15 y 16 años con estratos económicos entre 4 y 5. Es importante aclarar, que la investigadora de este trabajo, también es a la vez la docente de los estudiantes de grado 10°.

3.5 Fases del estudio

En la siguiente tabla se presenta de forma resumida las fases que componen el trabajo y la descripción general correspondiente a cada una objetivos propuestos para la investigación:

<i>Fases</i>	<i>Descripción de las acciones</i>
<i>Fase inicial</i>	<ul style="list-style-type: none">• Rastreo a través de los antecedentes y referencias bibliográficas que apoyan los procesos de la trigonometría, herramientas tecnológicas, enseñanza y aprendizaje, registros de representación semiótica y competencias matemáticas.
<i>Diagnóstico</i>	<ul style="list-style-type: none">• Diseño de la actividad inicial (Pretest)• Evaluar las competencias que se tienen en el conocimiento de las funciones trigonométricas
<i>Diseño y construcción del Applet</i>	<ul style="list-style-type: none">• Reconocimiento de elementos puntuales para la caracterización en el diseño de los applets• Construcción de applets dinámicos mediado por el software geogebra para la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas con el uso de tecnología computacional
<i>Implementación</i>	<ul style="list-style-type: none">• Diseño y construcción de las hojas de trabajo para cada applet

	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicación de las hojas de trabajo al grupo seleccionado con mediación de los applets
<i>Validación de instrumento</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Análisis de la información que suministraban los estudiantes de manera escrita o verbal en el diagnóstico y en las hojas de trabajo. • Organización y análisis de los datos obtenidos de las hojas de trabajo y el postest. • Registros fotográficos
<i>Análisis y resultados</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Análisis de la actividad inicial • Análisis de las hojas de trabajo • Análisis de Postest

Tabla 1: Fases de la investigación

3.5.1 Encuesta inicial (Pretest)

A través de una encuesta inicial, se podrá tener un diagnóstico de los estudiantes; es fundamental para la presente investigación ya que, allí se puede identificar las fortalezas, los errores, dificultades y conceptos que manejan los estudiantes sobre la temática, en este caso de funciones trigonométricas. Para la elaboración de este pretest se tuvo en cuenta la teoría de los diferentes registros de representación semiótica.

El cuestionario elaborado estuvo compuesto por 3 ítems, cada uno propuesto para cumplir una competencia matemática así: (Anexo#1):

Registro verbal. (Preguntas 1 a 6 y 11)

Registro algebraico y gráfico. (Pregunta 7 y 8)

Resolución de problemas y cambio de registro. (Pregunta 9)

Modelación. (Pregunta 10).

3.5.2 Diseño de las hojas de trabajo

A partir de la información recolectada en el pre test se elaboraron unas hojas de trabajo con el objetivo de que sirvieran para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas usando un applet de geogebra con el fin de trabajar diferentes registros de representación semiótica. Cada hoja de trabajo estuvo compuesta por:

- Objetivos generales y específicos: Hacía referencia a lo que se pretendía alcanzar con el desarrollo de las hojas de trabajo.
- Secuencia Metodológica: Narración del proceso que debía seguir el estudiante para desarrollar la hoja de trabajo.
- Diagnostico: Conocimiento de los saberes previos de los estudiantes
- Motivación: invitación agradable del tema desde una perspectiva cotidiana sobre el uso de las funciones trigonométricas.
- Conceptos básicos: Teoría que se debía abordar para el desarrollo de las hojas de trabajo.
- Desarrollo de las hojas de trabajo: en este punto e tuvieron en cuenta las competencias matemáticas como la resolución de problemas y la modelación.

Las hojas de trabajo, permite desarrollar una mejor comprensión de los aprendizajes y posibilitan observar el avance de los estudiantes frente al tema para luego crear una nueva hoja de trabajo.

3.5.3 Encuesta de Salida (Postest)

La encuesta de salida o pos test permitió medir los avances de los estudiantes de acuerdo al trabajo realizado con las hojas de trabajo. Para el diseño de este test se tuvo en cuenta sugerencias de docente del área de matemáticas, la teoría de los registros de representación semiótica y las competencias matemáticas que se pretendían desarrollar (Anexo # 2):

CAPITULO IV

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1 Introducción

En este capítulo se realiza un análisis de los resultados de cada uno de las actividades que componen este proceso investigativo. Este estudio, busca evaluar el progreso del aprendizaje de los estudiantes con las funciones trigonométricas utilizando herramientas tecnológicas.

El capítulo está distribuido de la siguiente manera: en primer lugar, se muestran los resultados de la prueba diagnóstica (pre test), posteriormente se analizan cada una de las hojas de trabajo y después se exponen los alcances de la encuesta de salida (Pos test). En todos los casos la información es presentada en tablas y gráficas, y, además, se incluyen evidencias de las respuestas de los estudiantes a las actividades planteadas.

Finalmente, se realiza un análisis comparativo del pre test y del pos test para tener una noción clara del impacto de la propuesta, así como la pertinencia de las actividades y del uso de las herramientas tecnológicas para la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas.

4.2 Análisis de diagnóstico o pre-test

El objetivo primordial del pre-test era analizar el efecto que establecen los estudiantes al desarrollar múltiples representaciones semióticas en el aprendizaje de las funciones trigonométricas, para luego desarrollar las hojas de trabajo partiendo de las debilidades o fortalezas que éstos presentaban. El cuestionario elaborado estuvo compuesto por 4 ítems, cada uno propuesto para cumplir una competencia matemática así (Anexo#1):

- *Registro verbal*: Cuyo objetivo era justificar a respuesta verdadera de cuatro opciones demostrando por qué la afirmación es correcta. La pregunta empleada fue la 1.
- *Registro algebraico y gráfico*: El objetivo de estas preguntas era determinar lo que los estudiantes recordaban el valor de los ángulos en radianes
- *Resolución de problemas y cambio de registro*: Su objetivo trataba en la capacidad de los estudiantes para resolver problemas sobre la medida de los ángulos en una circunferencia con una rotación indicada.
- *Modelación*: con esta se pretendía que los alumnos realizaran un problema sencillo de la vida cotidiana, para ello se empleó las preguntas 4 y 5.

Cada pregunta fue considerada con un mismo valor o peso dentro del modelo, pero se le podían adjudicar 3 valores diferentes, esto es :

Correcta Incorrecta, No contesta = Valor Cuantitativo.

Para el análisis cuantitativo en este grupo solo se analizó el porcentaje (%) de respuestas correctas e incorrectas, las preguntas que no fueron contestadas, se asumen como incorrectas.

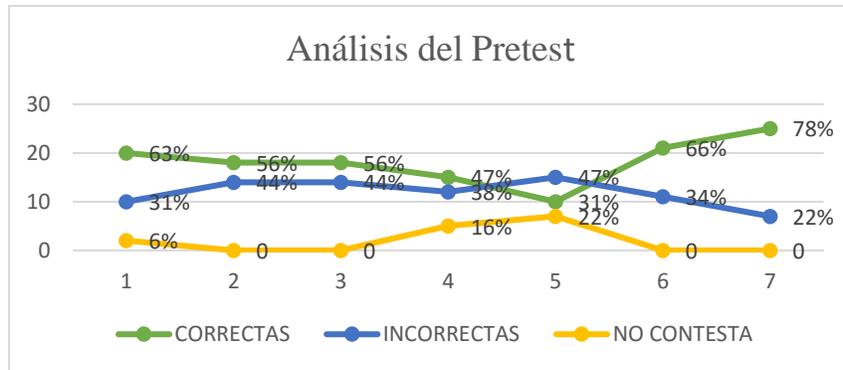
<i>Análisis del pretest</i>						
PREGUNTA	CORRECTAS	%	INCORRECTAS	%	NO CONTESTA	%
1	20	62,5%	10	31,3%	2	6,3%
2	18	56,3%	14	43,8%	0	0,0%
3	18	56,3%	14	43,8%	0	0,0%
4	15	46,9%	12	37,5%	5	15,6%
5	10	31,3%	15	46,9%	7	21,9%
6	21	65,6%	11	34,4%	0	0,0%
7	25	78,1%	7	21,9%	0	0,0%
TOTAL	127	56,7%	83	37,1%	14	6,3%

Tabla 2: Análisis del Pretest.

$$C = \frac{127}{224} * 100 = 57\%$$

Donde C es el porcentaje de respuestas correctas.

Con el cuestionario del pretest se pudo identificar en los estudiantes algún temor por responder las preguntas que les exigían dar una justificación o que les pedían pasar de un registro a otro, debido a que siempre estaban acostumbrados a trabajar mediante una pedagogía tradicional donde solo se fijaban del resultado, pero no pedían realizar conjeturas sobre lo que se realiza. Esto evidencia que se pueden apoyar procesos escolares enfocados en las competencias del colegio asumiendo su modelo pedagógico que permita a la vez desarrollar las competencias generales de la matemática.



Gráficas 1: Análisis del Pretest

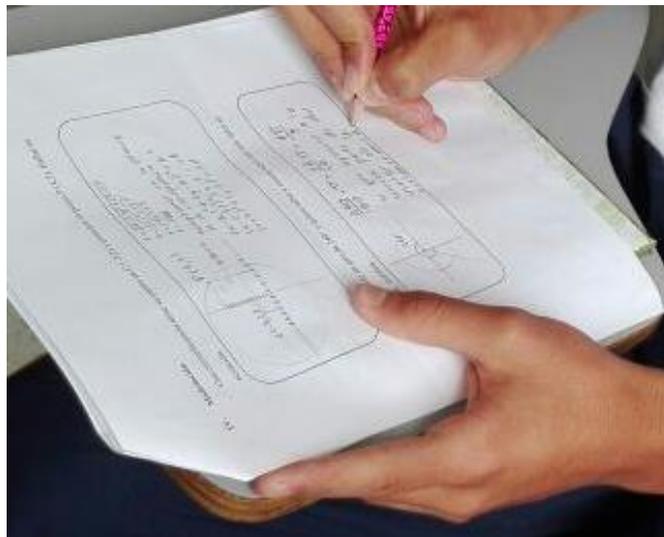


Ilustración 2: Aplicación de pretest.

III. Resolución de problemas. Cambio de registros algebraicos y gráficos.

- Hallar la medida del ángulo para la rotación indicada y dibújela en posición normal.

a. $\frac{1}{2}$ de rotación en el mismo sentido de las agujas del reloj

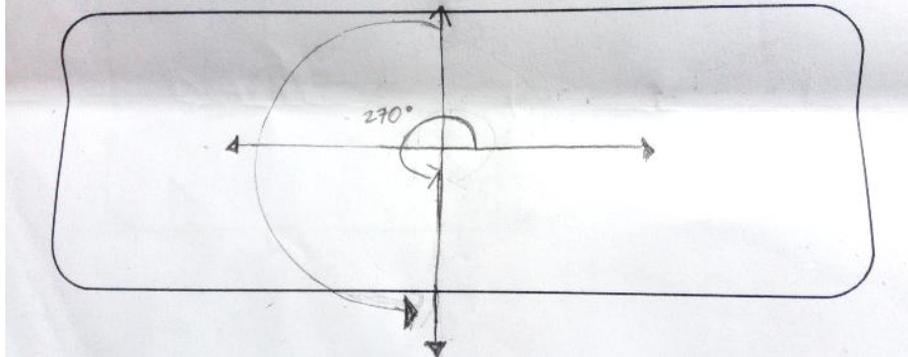
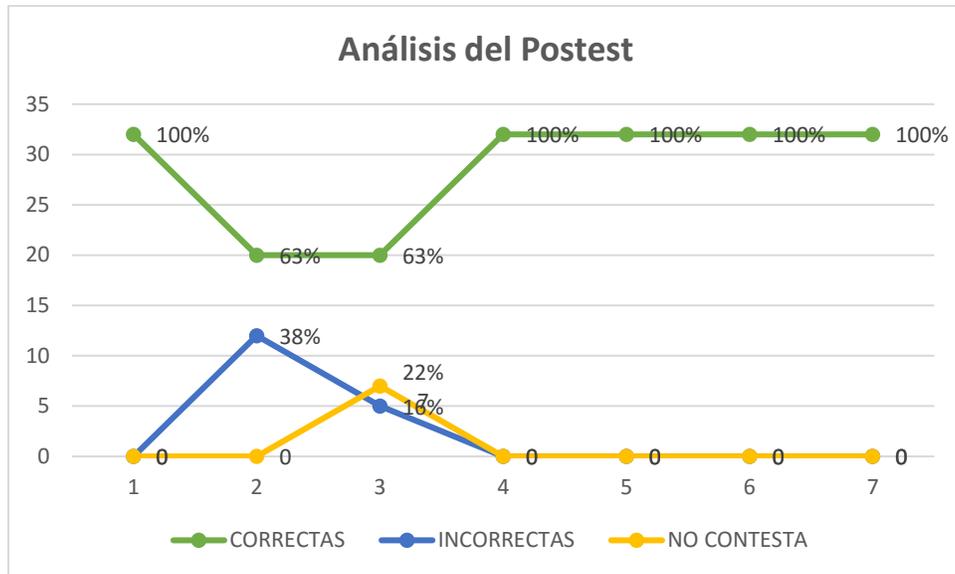


Ilustración 3: Errores conceptuales de los estudiantes

El cuestionario aplicado de salida o postest fue realizado con los mismos interrogantes del cual surgió un nuevo análisis donde los estudiantes solo presentaron errores en el registro algebraico.

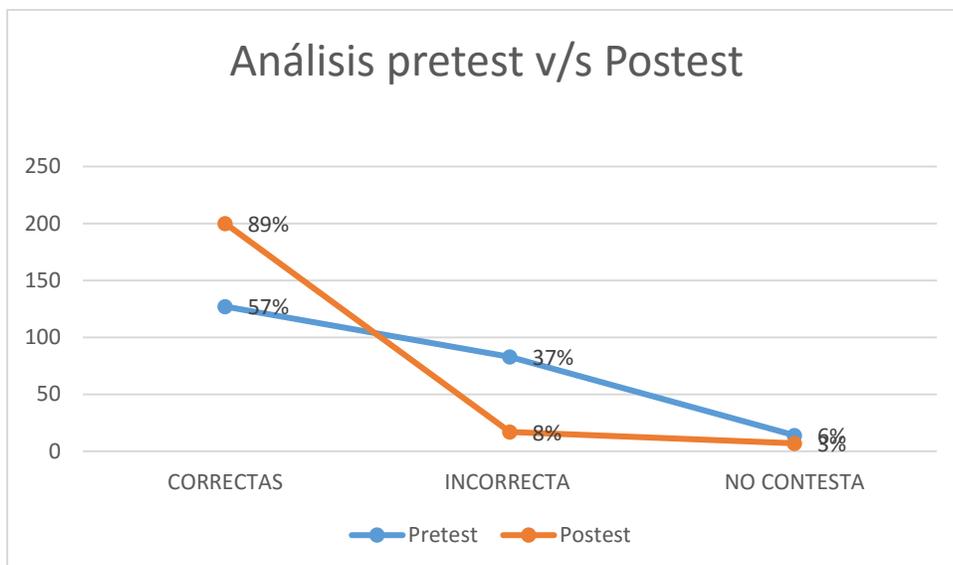
<i>Análisis del postest</i>						
PREGUNTA	CORRECTAS	%	INCORRECTA	%	NO CONTESTA	%
1	32	100%	0	0%	0	0%
2	20	62,5%	12	38%	0	0%
3	20	62,5%	5	16%	7	21,9%
4	32	100%	0	0%	0	0%
5	32	100%	0	0%	0	0%
6	32	100%	0	0%	0	0%
7	32	100%	0	0%	0	0%
TOTAL	200	89,3%	17	7,6%	7	3,1%

Tabla 3: Análisis del Postest.



Gráficas 2: Análisis del Postest

A continuación, se muestra un gráfico comparativo con los datos del pretest y el postest con el objetivo analizar y evidenciar las diferencias entre ellos y observar la ganancia de aprendizaje.



Gráficas 3: Análisis Pretest v/s Posttest

El presente trabajo hace uso del factor Hake para establecer la ganancia de aprendizaje, dicho factor es relevante por la referencia frente al tipo de estudios que este teórico adelantó. Hake plantea que las asignaturas en los que se utiliza algún método interactivo - basado en una herramienta tecnológica aplicada Investigación Educativa en Física o, de sus siglas en inglés, PER (Physics Education Research) lograron ganancias de aprendizaje en comparación con cursos tradicionales. Halló también que “en diferentes instituciones con diferentes resultados en exámenes de opción múltiple estandarizados, los cursos de Física con estructuras similares, alcanzan proporciones similares de ganancia de aprendizaje” Hake (1998). Para medir esta ganancia de aprendizaje Hake define el factor g (y lo denomina ganancia de aprendizaje normalizada) de la siguiente forma:

$$g = \frac{\text{posttest}(\%) - \text{pretest}(\%)}{100 - \text{pretest}(\%)}$$

En donde el postest (%) y pretest (%) corresponden promedio del % de respuestas correctas de todo el curso para el pretest y postest, respectivamente. La ganancia normalizada permite comparar el grado de logro de la estrategia educativa en distintas poblaciones, independientemente del estado inicial de conocimiento. Es una medida intensiva de la ganancia obtenida y muy útil para comparar, por ejemplo, estudiantes secundarios con universitarios o de distintas instituciones. (...) Propone: categorizar en tres zonas de ganancia normalizada: baja ($g \leq 0,3$), media ($0,3 < g \leq 0,7$) y alta ($g > 0,7$). Hake (1998. P).

Desde esta perspectiva para el presente estudio se determina la ganancia de aprendizaje mediante el factor de Hake:

$$g = \frac{\text{postest}(\%) - \text{pretest}(\%)}{100 - \text{pretest}(\%)}$$

$$g = \frac{\text{postest}(89,3\%) - \text{pretest}(56,7\%)}{100 - \text{pretest}(56,7\%)}$$

$$g = 0,74$$

El factor de Hake aplicado al estudio da una ganancia de aprendizaje del 0,7 lo que indica que hubo un alto impacto en el aprendizaje de los estudiantes con la ayuda de las herramientas tecnológicas.

Es preciso reconocer que en algunos aspectos el progreso de los estudiantes es apenas perceptible, sin embargo, en otros es completamente notorio. Por lo tanto, se puede afirmar que se registró un avance importante en la adquisición de las nociones básicas de funciones trigonométricas, considerando como parámetros de referencia los resultados del pretest y el postest; en otros términos, el impacto de las hojas de trabajo y los applets desarrollados en

función del desempeño de los estudiantes, tanto al inicio y al final del presente trabajo de investigación, da apertura para mejorar y actualizar los procesos de aprendizaje a través de la implementación de actividades que impliquen el uso de la tecnología computacional y herramientas como software dinámicos.

4.3 Análisis de los applets aplicados a las hojas de trabajo

4.3.1. Hoja de trabajo # 1. Graficas de las funciones Seno y Coseno

En la respectiva hoja de trabajo se introdujeron tres preguntas que daban cuenta del proceso de aprendizaje, estos iban desarrollando de manera secuencial y los estudiantes respondían de acuerdo con lo que aprendían y construían con el uso de applets de geogebra y empleando los múltiples registros de representación semiótica y sus respectivos tratamientos.

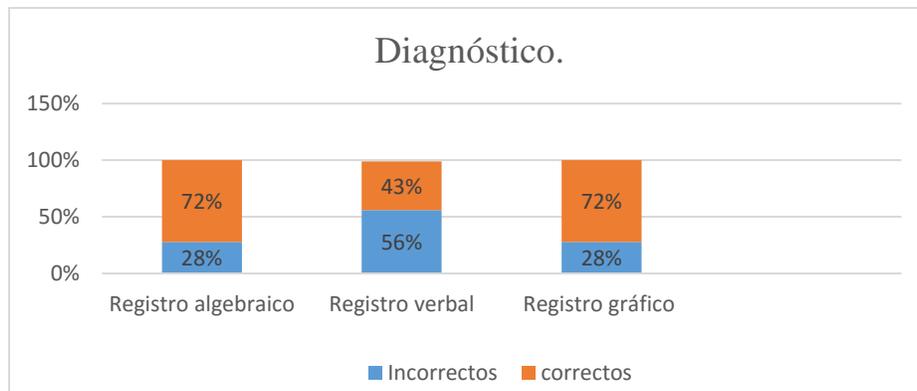
A continuación se realiza el análisis de la hoja # 1:

I -Diagnóstico: Para conocer los saberes previos de los estudiantes.

Las preguntas iniciales o de partida sobre los saberes previos fueron las siguientes

1. Realiza una tabulación entre 0 a 2π . (Registro algebraico)
2. Descripción de la gráfica seno y coseno (Registro verbal)
3. Dibujar la gráfica seno y coseno con la información tabulada (Registro gráfico)

En la gráfica 1 se sintetiza la información así:



Gráficas 4: Diagnóstico hojas de trabajo

El 72% de los estudiantes responde correctamente el registro algebraico y el 28% de ellos lo responde incorrectamente presentando dificultades para convertir grados sexagesimales a radianes, en el registro verbal más de la mitad de los estudiantes no sabían describir por qué la tabulación de la gráfica seno era diferente a la de coseno y en el registro grafico el 28% de los estudiantes no graficaron correctamente las gráficas del seno y coseno debido a que no relacionaron correctamente grados sexagesimales con radianes.

II. Desarrollo y aplicaciones de la hoja de trabajo: con este punto se registrar el impacto del uso de la tecnología computacional para el aprendizaje de las funciones trigonométricas en grado 10°. Se trabajaron dos competencias disciplinares de la matemática: la resolución de problemas y la modelación. Estaba compuesto por ocho preguntas que se iban desarrollando al mismo tiempo con el applet de geogebra para ir reforzando al tiempo los registros de representación semiótica.

En la siguiente tabla se muestran los respectivos resultados.

HOJA DE TRABAJO # 1					
COMPETENCIAS	ACTIVIDADES	CORRECTAS	INCORRECTAS	NO RESPONDE	TOTAL
Razonamiento, comunicación y representación.	1	30(94%)	2(6%)	0(0%)	32(100%)
	2	32(100%)	0(0%)	0(0%)	32(100%)
	3	18(56%)	14(44%)	0(0%)	32(100%)
Modelación	4	22(69%)	10(31%)	0(0%)	32(100%)
	5	32(100%)	0(0%)	0(0%)	32(100%)
Resolución y planteamiento de problemas	6	32(100%)	0(0%)	0(0%)	32(100%)
	7	21(65%)	6(19%)	5(16%)	32(100%)
	8	21(65%)	6(19%)	5(16%)	32(100%)
	TOTAL	208(81,2%)	38(14,8%)	10(3,9%)	32(100%)

Tabla 4: Análisis de la hoja de trabajo # 1

Se evidencia de manera significativa el avance que los estudiantes tuvieron con la ayuda de GeoGebra ya que el 81, 2 % de ellos respondieron correctamente la hoja de trabajo teniendo una buena disposición por el ejercicio y curiosidad por conocer más afondo lo que el applet les podía ofrecer.

4.3.2. Hoja de trabajo # 2. Amplitud y Desfase

En esta hoja de trabajo se desarrollan dos actividades como lo son el diagnóstico y las actividades de modelación sobre los conceptos de amplitud desfase de las funciones seno y coseno.

i. Diagnóstico: La tabla muestra los resultados pertinentes.

DIAGNÓSTICO					
Competencias	PREGUNTA	CORRECTAS	INCORRECTAS	NO RESPONDE	TOTAL
<i>Razonamiento y Argumentación</i>	1	32(100%)	0(0%)	0(0%)	32(100%)
	2	30(93.7%)	2(6.2%)	0(0%)	32(100%)
	3	31(96.8%)	1(3.1%)	0(0%)	32(100%)
	4	32(100%)	0(0%)	0(0%)	32(100%)
<i>Total</i>	4	125(97,6%)	3(2.3%)	0(0%)	32(100%)

Tabla 5: Análisis del diagnóstico la hoja de trabajo # 1

En la siguiente tabla se evidencian los resultados del desarrollo de la hoja de trabajo fortaleciendo los diferentes registros de representación semiótica y las competencias matemáticas:

DESARROLLO HOJA DE TRABAJO # 2					
COMPETENCIAS	DESARROLLO	CORRECTAS	INCORRECTAS	NO RESPONDE	TOTAL
<i>Razonamiento y representación.</i>	1	32(100%)	0(0%)	0(0%)	32(100%)
	2	25(78%)	7(22%)	0(0%)	32(100%)
	4	28(87%)	4(12%)	0(0%)	32 (100%)
	5	32(100%)	0(0%)	0(0%)	32(100%)
<i>Resolución de problemas</i>	6	29(91%)	2(6%)	1(3%)	32 (100%)
	7	26(81%)	4(12%)	2(6%)	32(100%)
<i>Modelación</i>	8	28(87%)	4(12%)	0(0%)	32(100%)
	9	29(91%)	0(0%)	3(9%)	32(100%)

<i>Comunicación</i>	<i>10</i>	<i>30(94%)</i>	<i>0(0%)</i>	<i>2(6%)</i>	<i>32(100%)</i>
	<i>Total</i>	<i>259(90%)</i>	<i>21(7%)</i>	<i>8(3%)</i>	<i>32(100%)</i>

Tabla 6: Análisis de la hoja de trabajo # 2

Al estudiar los resultados del diagnóstico con un 97,6% y el desarrollo de la hoja de trabajo con un 90% de las respuestas correctas, dan razón del aprendizaje de los estudiantes a través del uso de herramientas tecnológicas y los registros de representación semiótica que permitieron el fortalecimiento de unas competencias matemáticas para llegar a un aprendizaje significativo de las funciones trigonométricas.

Para finalizar podemos inferir que las hojas de trabajo (ver anexos #2 y #3), permitieron la comprensión de los aprendizajes determinando motivación y avance en los estudiantes para el estudio de las funciones trigonométricas respondiendo a unas competencias específicas del área.

CAPITULO V

5. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1 Introducción

El planteamiento inicial de algunas preguntas de investigación, relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas en estudiantes de grado décimo propició el interés en implementar este trabajo de investigación respondiendo características influyen en el aprendizaje de la trigonometría, al implementar una mediación pedagógica apoyada de un software matemático libre. Tales interrogantes se convirtieron en el eje primordial de las actividades que aquí se documentan. Precisamente en este capítulo se da respuesta a los cuestionamientos que dieron pie al presente trabajo.

Por otro lado, además de responder las preguntas de investigación, se proponen algunas sugerencias tanto de instrucción como para investigaciones subsecuentes.

5.2 Respuestas a las preguntas investigativas

En el primer capítulo del presente trabajo (apartado 1.5.2.) se mencionaron las preguntas que guiaron la investigación, de las cuales una es considerada como central, y tres más son auxiliares o complementarias. A continuación se da respuesta a cada una de ellas.

5.2.1 Respuesta a la pregunta central

La pregunta central es la siguiente: **¿Qué particularidades influyen en el aprendizaje de la trigonometría, al implementar una mediación pedagógica apoyada de un software matemático libre para la enseñanza de las funciones trigonométricas en grado 10°?**

Al observar el aprendizaje y la enseñanza de las funciones trigonométricas mediadas por GeoGebra muestra que los alumnos aprenden matemáticas a partir de la experiencia y mediante la reflexión de las acciones que realiza con la herramienta, la cual les propicia elaborar hipótesis, ensayar diferentes formas y estrategias para resolver los problemas y disponer de maneras para darse cuenta de los errores y corregirlos.

Para el aprendizaje de las funciones trigonométricas por medio de GeoGebra es importante valorar los saberes previos tanto disciplinares como tecnológicos y brindar la libertad y confianza para expresar sus ideas, explicar sus experiencias, ensayar con la herramienta sin temor a equivocarse para poder modelar sus representaciones mentales, de tal manera que intente armar procedimientos, se pueda equivocarse y corregir y en vez de sentirse abrumados por el error se sientan estimulados y motivados para organizar sus descubrimientos y demostrar sus logros.

El aprendizaje y la enseñanza apalancada con Geogebra, debe ser mediado y facilitado por un docente que asuma el rol de orientador, que se disponga al dialogo y proporciones los conocimientos adecuados para sacar el mayor provecho a la herramienta, pero sobre todo que llene al estudiante de confianza en las capacidades de aprender y de dialogar con otros para confrontar sus puntos de vista, intercambiar procedimientos y para que aprenda de los otros.

5.2.2 Respuestas a las preguntas auxiliares

¿Al inicio del estudio cuáles son los conocimientos y habilidades que tienen los estudiantes para el aprendizaje de la trigonometría?

Antes de realizar el proceso de investigación los estudiantes poseían pocos aprendizajes sobre la trigonometría y manejaban nociones sobre su relación con la geometría, asociaban la complejidad de su estudio por la percepción de dificultad de las fórmulas matemáticas manejadas por anteriores estudiantes. Desconocían de herramientas tecnológicas para el estudio de dicha ciencia y se evidenciaba poca referencia con la modelación matemática en otros campos de estudio.

¿Los estudiantes abordan los pensamientos matemáticos geométrico –variacional para la solución de problemas de tipo geométrico?

Los aprendizajes de geometría analítica permitían en un principio a los estudiantes aplicar algoritmos para la resolución de problemas, pero dichos procesos no pasaban de los desarrollos teóricos tradicionales los cuales no contaban con el uso de registros de

representación semiótica que les permitieran a ellos pasar de lo teórico a lo práctico para alejarse del proceso memorístico y rutinario para generar argumentos y conjeturas sobre los fenómenos matemáticos.

¿Qué tan dispuestos están los estudiantes para el uso de la tecnología computacional?

A los estudiantes les llama la atención la propuesta de la enseñanza y aprendizaje mediante las herramientas tecnológicas como Geogebra por el grado de novedad que subyace en las tecnologías a fines a los gustos prácticos de ellos. La posibilidad de interactuar y cotejar los hallazgos con otros compañeros a través de la herramienta tecnológica y el hecho de poder reformular procedimientos genera en ellos motivación y disposición para la adquisición de nuevos conocimientos.

En general se puede afirmar que la utilización de diferentes registros de representación influye determinantemente en el éxito de la resolución de problemas de trigonometría. Esto se confirma al verificar que en el pos test se incrementó notablemente la cantidad de respuestas correctas así como el tipo de representaciones utilizadas, e igualmente en la disposición para u aprendizaje.

5.3 Hallazgos de la investigación en la trigonometría

Los resultados que arroja esta experiencia del trabajo investigativo necesariamente inducen a conclusiones desde la perspectiva cualitativa descriptiva de cada uno de los procesos evidenciados por la docente y los estudiantes.

Se producen efectos positivos en el desarrollo los aprendizajes mediados por las herramientas tecnológicas y las hojas de trabajo durante el proceso de enseñanza y

aprendizaje de las funciones trigonométricas, logrando así mejores resultados en los conocimientos de los contenidos relacionados con la unidad de trigonometría. Con el recurso de las herramientas tecnológicas permitió articular la enseñanza tradicional que realizaba las gráficas mediante hojas milimetradas que no permitían establecer semejanzas y diferencias entre funciones, caso contrario que ocurre con la ayuda de las herramienta tecnológicas que involucran al estudiante para realizar conjeturas sobre lo que visualiza de forma dinámica.

En el punto de vista del estudiante que llevó a cabo un proceso de aprendizaje con las herramientas tecnológicas muestran mayor motivación y predisposición para abordar los temas desarrollados como lo evidencia el pretest y el postest obteniendo un factor de ganancia de aprendizaje alto.

5.4 Sugerencias para futuras investigaciones

Es importante reconocer el rol del profesor de matemáticas y el grado de consciencia en el proceso para acompañar el pensamiento matemático de los estudiantes, el proceso de enseñanza y aprendizaje debe empoderarse por medio de la generación de confianza para el abordaje de las temáticas y el uso de la herramienta como factor clave en la desmitificación de las dificultades y las creencias erróneas que alejan el gusto por el razonamiento matemático aplicado en la trigonometría, los cuales son obstáculos cognoscitivos que demandan acciones específicas e integrales para superarlo. Para ello es importante identificar dichas creencias mediante diagnósticos apropiados que permitan tomarlas de referencias para el diseño didáctico de las diferentes hojas de trabajo y la capacitación en el uso de la herramienta tecnológica.

La implementación de herramientas tecnológicas como GeoGebra es una buena opción como apoyo en la enseñanza de la trigonometría al permitir combinar las representaciones algebraicas y gráficas, así como establecer variados experimentos en corto tiempo para trabajar con los estudiantes, haciendo de la actividad algo más agradable y brindando la posibilidad de enfocar los esfuerzos en hacer de los ejercicios experiencias de aprendizaje más significativas. Al ser GeoGebra es una herramienta de uso libre abre las posibilidades a estudiantes y profesores para fortalecer el estudio y la práctica de las matemáticas tanto en el colegio como en la casa, además dicha herramienta cuenta con la capacidad de trabajar con diferentes registros de representación

Se sugiere hacer uso de la metodología empleada en la investigación partiendo de los diagnósticos y del diseño de hojas de trabajo dinámicas que faciliten la interacción con los Applets permitiendo simultáneamente realizar los registros gráficos y algebraicos por medio de la herramienta GeoGebra y así estimular el desarrollo de las competencias matemáticas que no depende solo de la idoneidad tecnológica sino también de la dinámica interna de la clase, del trabajo individual y de equipo, de la participación y socialización de las inquietudes, de los hallazgos o dificultades.

También es importante diseñar hojas de trabajo vinculadas a problemas matemáticos que tengan relación con el contexto que permitan ver la matemática aplicada a situaciones reales y útiles para que el estudiante encuentre significado y valor la modelación y así busque desplegar sus conocimientos a la vida y el trabajo cotidiano.

REFERENCIAS

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2011). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*, 1(13), 29-36.

- Rios, J., & Oyola, A. (2016) Comprensión de las razones trigonométricas mediante el software GeoGebra en el contexto del modelo de Van Hiele. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. Recuperado de www2.udelarroba.co
- Donoso, G. (2012) Estrategias didácticas como apoyo al aprendizaje de la trigonometría en alumnos de tercero de enseñanza media. (Tesis de maestría). Universidad de la Frontera, Temuco, Chile. Recuperado de www.ufro.cl
- Herrera, H. (2013) Enseñanza de los conceptos básicos de la trigonometría mediante el uso de tecnología informática. (Tesis de maestría). Universidad nacional de Colombia, Manizales, Colombia. Recuperado de www.bdigital.unal.edu.co/11900/1/8411509.2013.pdf
- Niño, J & equipo. Serie lineamientos curriculares. Recuperado de www.mineduacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf
- Guzman, M. Tendencias innovadoras en educación matemática. Recuperado de www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/tendenciasInnovadoras.
- Villada, D. (2007) Competencias. Sintagma Editorial. Colombia. (pp. 84 – 85)

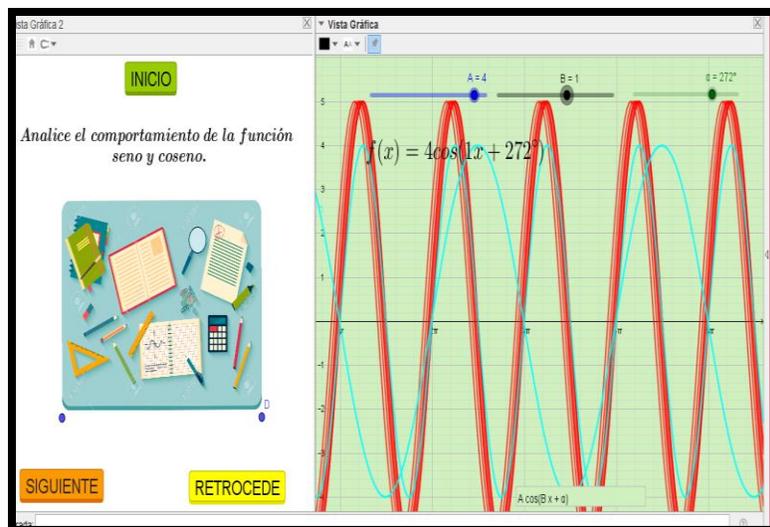
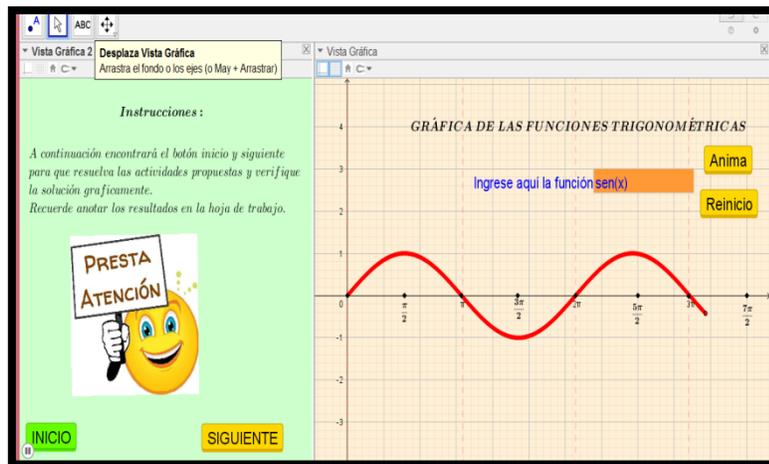
- Oteyza, E. (2001) Geometría Analítica y Trigonometría. Editorial Person. (pp, 191)
- Bembibre, C (2010). Identidades trigonométricas. Sitio: Definición ABC. Fecha: 07/10/2010. URL: <https://www.definicionabc.com/ciencia/identidades-trigonometricas.php>
- Arnau Jaime; Metodología de la investigación en ciencias del comportamiento (Metodología experimental). Universidad de Murcia. EDITUM, 1990.pag, 9 – 124. Consultado de: <https://books.google.com.co/books?id=TQtBbnk1LSoC>
- De Oteyza, Elena et al. Conocimientos Fundamentales de Matemáticas Trigonometría y Geometría Analítica. Pearson Educación, Mexico. 2007.
- Swokowski, Earl & Jeffery A. Cole. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Decimo tercera edición. Cengage Learning. México 2011.
- De Oteyza, Elena et al., Geometría Analítica. México, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1994.
- Spivak, M..Cálculo Infinitesimal. Barcelona, España: Reverté. 1978
- Dieudonné, J. En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy. Madrid, España: Alianza Editorial. 1989.
- Freudenthal, H. Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht, Holland: Riedel. 1983.

- Montalvo, R. Tesis: Historia de la Trigonometría y su enseñanza. Benemérita universidad Autónoma de Puebla. México. 2012.
- Gamboa, R. Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. cuadernos de investigación y formación en educación matemática, Número 3. Universidad Nacional de Costa Rica, pp. 11-44. 2007.
- Barrera, F. y Santos, M. El uso y comprensión de los estudiantes de diferentes representaciones matemáticas de las tareas en la instrucción de resolución de problemas. Actas de la 23 Reunión Anual del Capítulo Norteamericano del Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática. Vol. 1, pp. 450-466. ERIC Centro de intercambio de información sobre ciencias, matemática y educación ambiental 2001. Tomado de: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED476613.pdf>.
- Hohenwarter, Markus; Lavicza, Zsolt. GeoGebra, its community and future. Asian Technology Conference in Mathematics. 2010. Consultado el 6 de noviembre de 2017.
- Anónimo. Geogebra como recurso didáctico. Sumario Seminario de Actualización en Matemáticas, Universidad de la Rioja, 20 de Febrero de 2008. Tomado de: <http://www.unirioja.es/cu/jofernh/charla/>
- Godino, J; Batanero, C & Font, V. Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Revista: matemática y su didáctica para maestros –

Manual para el estudiante. Proyecto Edumat-Maestros. Edición Julio. Universidad de Granada. 2003.

- Hitt F. Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. Educación Matemática Vol. 1 O No. 2 Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, CONACyT, pp. 23-45. México 1998.
- Ortiz, F. Matemáticas estrategias de enseñanza y aprendizaje. Pedagogía dinámica Editorial Pax. México. 2001.
- MEN, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!. Ministerio de educación Nacional de Colombia, 2003. Consultado de:
<http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf>.
- Hake R.R. Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. American Journal of physics, 66 (1). 65 p.

Apéndice A: Applets implementados para la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas.



Apéndice B: registro fotográfico





Anexo # 1: Pretest y postest

	COLEGIO SEMINARIO REDENTORISTA SAN CLEMENTE MARÍA HOFBAUER.	 SC-CER328855		Código	GDDC10-5
				Versión	1
				Página	88 de 3

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICO SOBRE TRIGONOMETRÍA

NOMBRE:

_____ FECHA: _____

La siguiente evaluación diagnóstico tiene como objetivo conocer sobre las ideas previas que tiene el estudiante del grado décimo acerca de conceptos fundamentales de la Trigonometría antes de abordar las funciones trigonométricas

I. Pregunta con Registro Verbal.

De las siguientes afirmaciones elige la verdadera:

- La función circular es periódica y su período es π .
- La función circular asocia puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con arcos de la misma medida, medidos a partir de un punto (1,0)
- El rango de la función circular es: $\{(x, y)/x^2 + y^2 = 1\}$
- La función circular sólo está definida por arcos tales que $0 < \infty < 2\pi$

Justifique:

II. Pregunta con Registro Algebraico y gráfico

a. El valor en grados de $\frac{11\pi}{3}$ es:

b. El valor en radianes de (-1440°) es:

c. El radio de la circunferencia $5x^2 + 5y^2 = 20$

III. Resolución de problemas. Cambio de registros algebraicos y gráficos.

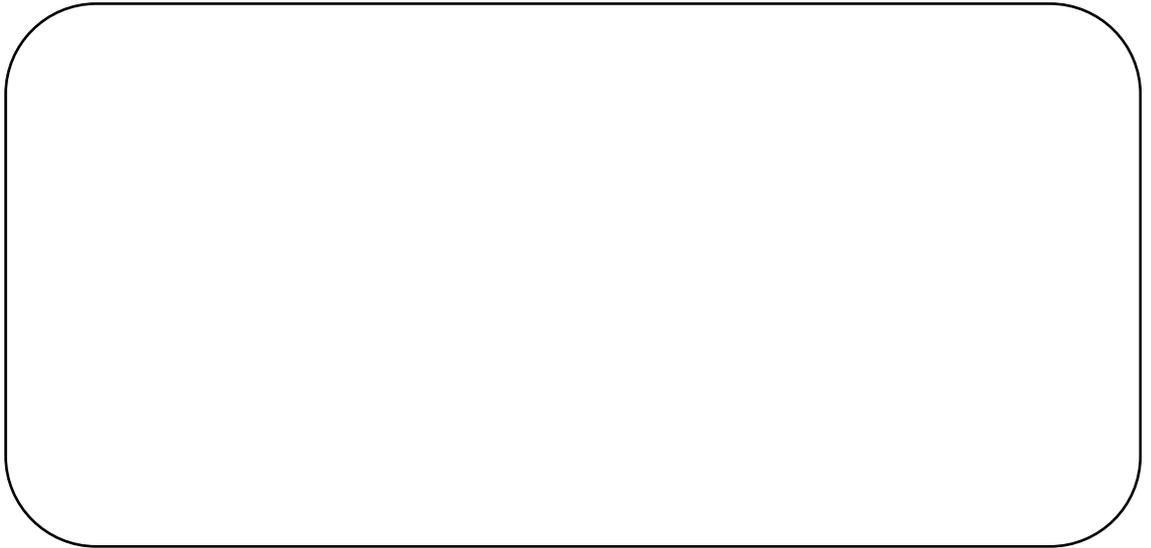
- Hallar la medida del ángulo para la rotación indicada y dibújela en posición normal.

a. $\frac{1}{2}$ de rotación en el mismo sentido de las agujas del reloj

IV. Modelación

- Una circunferencia tiene su centro en $C (-3,2)$ y pasa por el punto $P (4,7)$.

Hallar su ecuación.



- Camila ha dado un giro de 240° y quiere saber a cuanto equivale éste valor en radianes. Justifica.



Anexo#2: Hoja de trabajo

	COLEGIO SEMINARIO REDENTORISTA SAN CLEMENTE MARÍA HOFBAUER.	 Icontec Internacional	 SC-CER328855	Código	GDDC10-5
				Versión	1
				Página	91 de 104

HOJA DE TRABAJO N°1

Gráficas de las funciones trigonométricas.

Nombre del estudiante: _____ Fecha: _____

1. Objetivo:

Graficar las funciones seno y coseno de acuerdo a sus características e identificar su dominio, amplitud, periodo y desfase.

1.1. Objetivos específicos:

- Analizar las gráficas a partir de tabulación y el uso de conjeturas para comunicar las aplicaciones de las funciones trigonométricas
- Usar herramientas tecnológicas para representar las funciones trigonométricas.

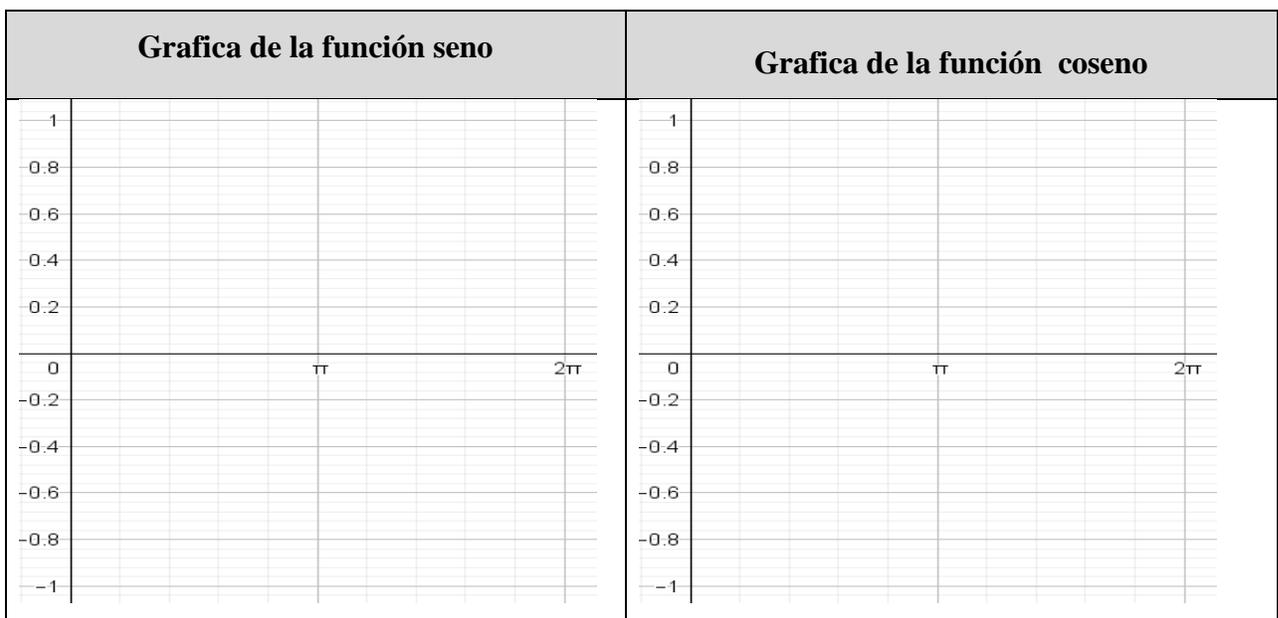
2. Secuencia metodológica:

- Primero identificaras las gráficas de las funciones trigonométricas.
- Luego usarás GeoGebra para encontrar las características de las funciones trigonométricas, comunicando la conjetura que emerge.
- En la parte final graficaras con GeoGebra unas funciones propuestas e identificarás su amplitud, desfase y periodo.

3. Diagnóstico.

Realiza una tabulación entre 0 a 2π . Dibuja las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno dentro de cada cuadro como lo señala la tabla que encontrarás debajo.

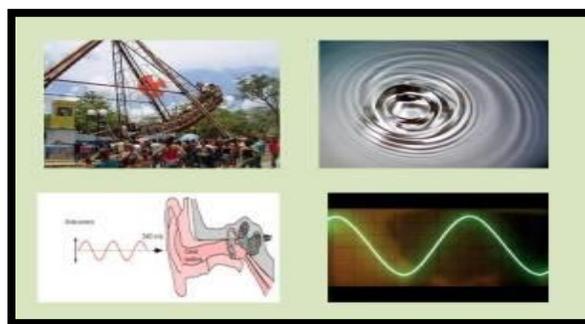
Función/ángulos	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$f(x) = \text{sen}x$								
$f(x) = \text{cos}x$								



4. Motivación.

Aplicaciones de las funciones trigonométricas en la cotidianidad.

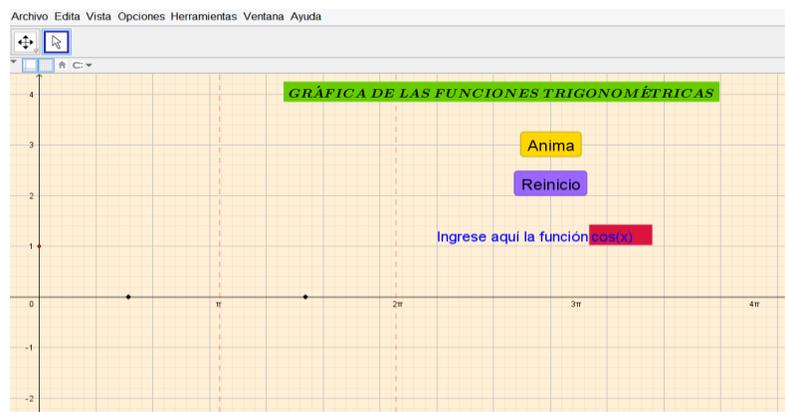
Las funciones trigonométricas son de gran importancia en nuestro entorno, su manejo se da a nivel profesional, pero sus resultados los vemos por todas partes: la construcción de carreteras, edificios, casas, condominios, interpretación de instrumentos médicos como los osciloscopios en los que se ve claramente la representación de la función seno.



Desarrollo de la hoja de trabajo.

Ingresa al escritorio del computador y da clic sobre el ícono

Cuando abra aparecerá una pantalla como la que se muestra.



La aplicación consta de tres apartados, dos botones el primero se llama "Anima", con este se puede observar como la función se mueve dentro de la pantalla. El segundo denominado

“Reinicio”, se encarga de volver al estado original la pantalla. El tercero es una casilla de entrada donde puede ingresar cada función.

Actividades.

1. Debes ingresar en el apartado Ingrese aquí la función cos(x) y escribir primero: $sen(x)$ y observar que sucede; luego $cos(x)$. Finalmente llenas la **tabla de debajo** de acuerdo con las indicaciones:

A partir de la gráfica de la función $y = sen(x)$ y la gráfica $y = cos(x)$ responda los siguientes interrogantes:

- a. Indica por medio de una flecha en que intervalos la función $y = senx$ es creciente (\nearrow) o decreciente (\searrow).

$y = sen(x)$			
0 a $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ a π	π a $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$ a 2π

$y = cos(x)$			
0 a $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ a π	π a $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$ a 2π

- b. Determine en la función $y = senx$
 Valor máximo _____ Valor mínimo _____

- c. Determine en la función $y = cosx$
 Valor máximo _____ Valor mínimo _____

Modelación

Las vibraciones producidas por las cuerdas de una guitarra se traducen como la curva sinusoidal. La curva obtenida representa una función cuya ecuación es:

$$f = 2\text{sen}\pi/128$$

¿Cuál es la amplitud de la función?

Modelación

Una onda se puede describir por medio de una ecuación:

$$y = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

Hallar:

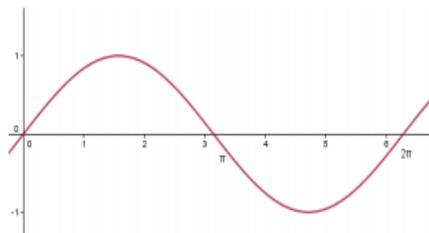
-Amplitud: _____

-Periodo: _____

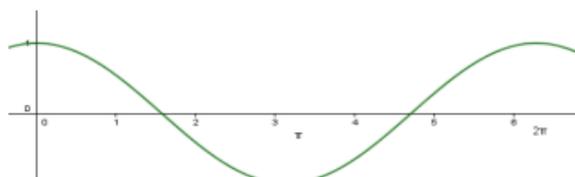
-Frecuencia: _____

2. Seleccione la función que corresponde a la figura que se muestra y explique por qué su elección.

- a. $f(x) = \tan x$
- b. $f(x) = \cos x$
- c. $f(x) = \text{sen} x$
- d. $f(x) = 2\text{sen} x$



3. Seleccione la función que corresponde a la figura que se muestra y explique por qué su elección



- a. $f(x) = \tan x$
- b. $f(x) = \cos x$
- c. $f(x) = \sin \frac{x}{2}$
- d. $f(x) = 2 \sin x$

Tratamiento.

Expresión verbal	Expresión algebraica
Las funciones trigonométricas tienen unos conceptos importantes que son: Amplitud(A) : está afectada al multiplicar la función por un número real A, la gráfica se estira o se encoge. Período (B) : El período varía si multiplicamos el ángulo por una constante B. Desfasamiento o corrimiento(C) : es la suma o resta de un ángulo diferente a cero.	$y = A \cos(Bx + C)$

4. Graficar cada grupo de funciones, sobre un mismo plano. Luego, escribir un párrafo en el cual se determinen las diferencias y las semejanzas de cada grupo de funciones

Función	Amplitud	Desfasamiento	Periodo
$y = \sin x$			
$y = \frac{1}{2} \sin x$			
$y = 2 \sin x$			
$y = 2 \sin 2x$			

Función	Amplitud	Desfasamiento	Periodo
$y = \cos x$			
$y = \frac{1}{2} \cos x$			
$y = 2 \cos x$			
$y = 2 \cos 2x$			

Anexo 3: Hoja de trabajo

	COLEGIO SEMINARIO REDENTORISTA SAN CLEMENTE MARÍA HOFBAUER.	 icontec Internacional	 SC-CER328855	Código	GDDC10-5
				Versión	1
				Página	98 de 104

HOJA DE TRABAJO 1. Amplitud y desfase

Nombre del estudiante: _____ Fecha: _____ Grupo _____

1. Objetivo: Identificar la amplitud y el desfase o corrimiento de las funciones seno y coseno

2.1. Objetivos específicos:

- Seguir un conjunto de pasos de la construcción de funciones, a través de la conexión entre las representaciones verbales y visuales para la visualización de propiedades.
- Usar herramientas tecnológicas para representar las funciones trigonométricas.

2. Secuencia metodológica:

- Primero usarás el software de geogebra para visualizar una función.
- En seguida usarás geogebra para hallar la amplitud y el desfase de las funciones
- Comunica la conjetura que emerge.

- En la parte final debes dejar de usar el geogebra para resolver únicamente con lápiz y papel algunos ejercicios relacionados con las modelaciones correspondientes
- Da a conocer tus puntos de vista a tus compañeros y docente.

II. Diagnóstico

4. Analiza la función:



a. ¿Cuál es el valor máximo que alcanza la curva?

b. ¿Cuál es el valor mínimo que alcanza?

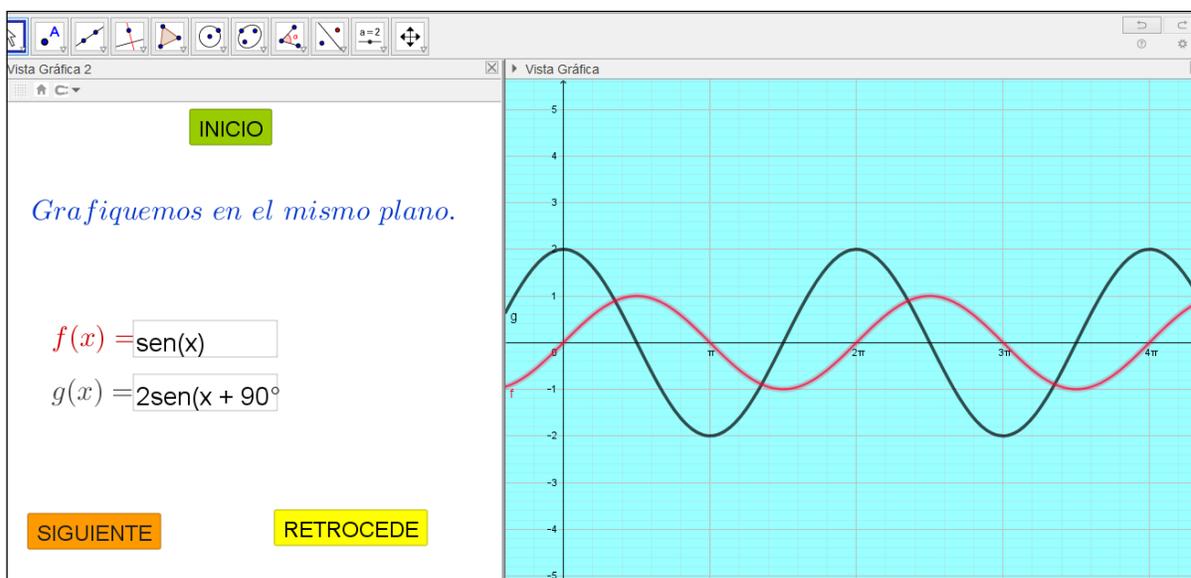
c. ¿Cuál es su periodo?

d. Encuentra la ecuación que corresponde a la curva.

3. Desarrollo de la hoja de Trabajo:

- En el escritorio de su PC, abra el archivo Amplitud y desfase .ggb. Realiza las observaciones y las medidas necesarias para que contestes cada una de las siguientes :

Cuando haya abierto el software aparecerá una ventana de trabajo con la siguiente figura



- Ahora compara la gráfica de la función $y = 2\text{sen}(x + 90^\circ)$, con la gráfica función seno.
3. ¿Sus valores máximo y mínimo son diferentes?

Justifique _____

4. ¿La periodicidad cambia una de la otra? _____

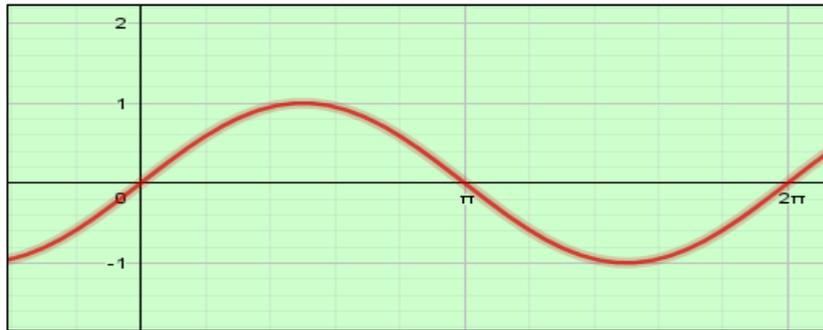
Justifique_____

5. ¿Cuál es la diferencia entre las gráficas de las dos funciones?_____

Justifique_____

6. *Tratamiento*

En la gráfica de una función seno o coseno se puede apreciar la **amplitud** como un período que corresponde al valor absoluto de la semidiferencia entre el valor máximo y mínimo.



El valor máximo de $y = \text{sen } x$ es 1

El valor mínimo de $y = \text{sen } x$ es -1

$$\text{La amplitud de la función } \text{sen } x \text{ es: } A = \frac{1 - (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Mientras el **desfasamiento** o corrimiento es el desplazamiento hacia la derecha o hacia la izquierda. Si la curva se desplaza a la izquierda, el ángulo de fase es negativo. Si la curva se desplaza a la derecha el ángulo de fase es positivo.

7. En geogebra ingrese las funciones $y = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ y $y = \text{sen}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ e identifica en cuales de ellas a grafica se mueve para la izquierda o derecha.

Justifica: _____

8. Utilizando geogebra identifica el desfase de cada una de las funciones y traza un esquema de su grafica entre $(0,2\pi)$

Función				
$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$	1 0.8 0.6 0.4 0.2 0 -0.2 -0.4 -0.6 -0.8 -1		π	2π
$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$	1 0.8 0.6 0.4 0.2 0 -0.2 -0.4 -0.6 -0.8 -1		π	2π
$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$	1 0.8 0.6 0.4 0.2 0 -0.2 -0.4 -0.6 -0.8 -1		π	2π

9. Modelación.

Se suspende una barra de 25 gramos de un resorte. La escala marca las unidades que se deforma el resorte. Si no hay rozamiento, la posición de la masa después de x segundos está dada por la ecuación:

$$f = 3\text{sen}\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$$

a. Determine amplitud y desfase de la función

b. Con la ayuda de geogebra trace la gráfica de la función.

10. Pulse el botón **SIGUIENTE** en el applet para desarrollar la siguiente actividad

- La función desfasada $\frac{2\pi}{3}$ a la izquierda es:

- $y = \cos\left(\frac{1}{2x} - \frac{\pi}{3}\right)$

- $y = \text{sen}\left(\frac{1}{8} + \frac{\pi}{12}\right)$

- $y = \cos\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$

- $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Justifica: _____

11. Escribe las conjeturas sobre el trabajo realizado.
