

Fortalecimiento de la enseñanza y aprendizaje del conjunto de los números enteros
haciendo uso de las Tic y las Tac para estudiantes de grado séptimo.

Liliana María Guapacha Manzo

Jesús María Tenorio Vivas

Rodrigo Perdomo Tenorio

Universidad Católica de Manizales

Facultad de Educación

Licenciatura en Matemáticas y Física

Manizales, Diciembre de 2018

Fortalecimiento de la enseñanza y aprendizaje del conjunto de los números enteros haciendo uso de las Tic y las Tac para estudiantes de grado séptimo.

Presentado por:

Liliana María Guapacha Manzo

Jesús María Tenorio Vivas

Rodrigo Perdomo Tenorio

Directora de Trabajo de Grado.

Mg. Paula Andrea Osorio Gutiérrez

Universidad Católica de Manizales

Facultad de Educación

Manizales, Diciembre de 2018

Agradecimientos

Expresamos nuestro agradecimiento a los espíritus de la Madre Tierra y al Ser Superior por habernos permitido transitar por los caminos de la búsqueda del conocimiento y la sabiduría, con el ferviente deseo de contribuir con la causa de la construcción de procesos de identidad de pueblos originarios y autonomía territorial, como fundamento de la unidad en la diversidad y la interculturalidad en condiciones de equidad.

Agradecemos también, a cada una de nuestras familias que con su inmensa paciencia, toleraron nuestras ocupaciones y nos dieron la voz de aliento incondicional en los momentos de dificultad y de angustias.

A la Universidad Católica de Manizales por la cariñosa acogida que nos dieron desde el primer momento, haciéndonos sentir como parte de la gran familia universitaria en concordancia con la formación humanística como proyecto de amor que apunta hacia la excelencia.

A las instituciones educativas Juan Tama de Mosoco y Nuestra Señora de los Dolores de Quinchía por permitir el desarrollo de las prácticas y los permisos oportunos.

A la profesora Paula Andrea Osorio Gutiérrez por su asesoría y acompañamiento desinteresado durante horas y horas de trabajo dejando de lado sus seres queridos, a quien le manifestamos que nuestras palabras de agradecimiento no serán suficientes, pero la Divina Providencia la compensará.

Dedicatoria.

El presente trabajo lo dedicamos a cada una de nuestras familias que con su máximo grado de comprensión estuvieron siempre allí donde las necesitábamos y en los momentos oportunos.

Dedicamos también este esfuerzo a cada uno de los establecimientos que nos otorgaron los espacios escolares y a los estudiantes para poder compartir nuestra experiencia en las etapas de formación profesional y finalmente, dedicamos este humilde, pero significativo proyecto a cada una de las regiones donde se realizó la investigación.

A los pueblos indígenas y campesinos de Páez y Quinchía respectivamente, no consideramos distinción de raza, religión, color, condiciones económicas, somos hermanos de una misma nación.

Resumen

El proyecto de grado se realizó en dos instituciones educativas, institución educativa Juan Tama de Mosoco del municipio de Páez en zona rural indígena y la institución educativa Nuestra Señora de los Dolores de Quinchía en zona urbana. Consistió en fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje del conjunto de los números enteros en estudiantes de grado séptimo del año escolar 2018, aprovechando las herramientas que ofrecen las Tecnologías de Información y la Comunicación TIC y las Tecnologías del Aprendizaje y del Conocimiento TAC, específicamente mediante el diseño, aplicación y evaluación de guías interactivas con el uso del software de Geogebra. Las guías se desarrollaron a través de tres Applet organizados de la siguiente manera: Applet diagnóstico, Applet de conceptualización y Applet de operaciones, cada uno de ellos con sus respectivas actividades. Los resultados de las aplicaciones de las guías interactivas muestran una notable mejoría en la conceptualización y desarrollo de las operaciones en ambas instituciones, no obstante a los estudiantes en la zona urbana les va mucho mejor. También se observó en los estudiantes de ambos contextos, es decir, en zona rural y la zona urbana, una participación activa, agradable, gusto por las imágenes animadas, los textos explicativos y la satisfacción por los resultados, todo lo cual se ve reflejado en los cuadros comparativos.

Abstract

The degree project was carried out in two educational institutions, Juan Tama de Mosoco educational institution, Páez municipality, in the indigenous rural area and the educational institution, Nuestra Señora de los Dolores de Quinchía in the urban area. It consisted in strengthening the teaching and learning process of the whole number of students in the seventh grade school year 2018, taking advantage of the tools offered by Information and Communication Technologies, Learning Technologies and Knowledge TAC, The design , the application and evaluation of interactive guides with the use of Geogebra software. The guides will be developed through the Organizers applet as follows: Diagnostic Applet, Conceptual Applet and Operations Applet, each one of them and their respective activities. The results of the applications of the interactive guides are a notable improvement in the conceptualization and development of operations in both institutions, but not so much in the students in the urban area they are doing much better. You can also see in the students of both contexts, that is, in the rural area and the urban area, an active, pleasant participation, a taste for animated images, explanatory texts and satisfaction for results, all that is reflected in The comparative tables.

Contenido

Resumen	5
Lista de figuras	9
Lista de apéndices.....	11
Introducción.....	12
1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	14
1.1 Introducción	14
1.2 Justificación	14
1.3 Objetivos.....	15
1.3.1 Objetivo central	15
1.4 Formulación del problema	16
1.4.1 Contextualización.....	16
1.4.3 Pregunta de investigación	20
1.4.4 Preguntas auxiliares.....	20
2. REFERENTES TEÓRICOS	21
2.1 Introducción	21
2.2 Antecedentes	22
2.3 Marco conceptual.....	31
2.3.1 Aprendizaje por descubrimiento.	31
2.3.2 Resolución de problemas.	33
2.3.3 Representaciones Semióticas.	37
2.4 Marco disciplinar	39
2.4.1 Los números enteros.....	39
2.5 Competencias matemáticas.....	58
2.5.1 Tecnología Computacional.	62

3. DISEÑO METODOLÓGICO.....	65
3.1 Introducción.....	65
3.2 Descripción general del estudio.....	65
3.2.1 Enfoque: mixto.	65
3.2.3 Diseño cuasi experimental:	66
3.2.4 Estructura metodológica.....	66
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS	68
4.1 Introducción.....	68
4.2 Análisis de diagnóstico	68
4.3 Análisis de instrumentos aplicativos en el software geogebra.....	78
5. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS.....	91
5.1 Introducción	91
5.2 Respuestas a las preguntas investigativas.....	91
5.2.1. Respuesta a la pregunta central	91
5.2.2 Respuestas a las preguntas auxiliares.....	92
5.3 Conclusiones generales del trabajo.....	94
5.4 Sugerencias para próximas investigaciones.....	95
Referencias	96
Apéndices	100

Lista de figuras

Figura 1. Ubicación geográfica de la institución educativa Juan Tama de Mosoco	17
Figura 2. Ubicación Geográfica de la I.E. Ntra. Sra. de los Dolores Quinchía.....	18
Figura 3. Papiro de Rhind.....	41
Figura 4. Recta Numérica.....	46
Figura 5. Representación de los números enteros en la recta numérica.....	57
Figura 6. Análisis comparativo de las notas I.E Juan Tama 2015, 2016, 2017.....	73
Figura 7. Análisis de las notas I.E Ntra Sra de los Dolores 2015, 2016, 2017.....	74
Figura 8. Registro fotográfico Prueba Diagnóstica	75
Figura 9. Análisis Prueba Diagnóstica I.E Juan Tama	79
Figura 10. Análisis Prueba Diagnóstica I.E.Nuestra Señora de los Dolores.....	80
Figura 11. Comparación de resultados de promedio zona rural y zona urbana.....	81
Figura 12 . Análisis concepto de números enteros	82
Figura 13. Análisis concepto de número enteros I.E Nuestra Señora de los Dolores	83
Figura 14 Comparación de resultados promedio conceptualización de resultados zona rural y zona urbana.....	84
Figura 15 Operaciones con los números enteros	86
Figuran 16. Análisis de las operaciones con números enteros	88
Figura 17 . Comparaciones de operaciones con números enteros.....	89
Figura 18. Cuestionario de evaluación de impacto.....	90
Figura 19. Cuestionario de evaluación de impacto.....	91
Figura 20. Applet 1. Prueba diagnóstica	105
Figura 21. Applet 1. Actividad presaberes.	106
Figura 22. Algo de historia sobre números enteros	107

Figura 23. La rana saltarina	108
Figura 24. El tesoro escondido	109
Figura 25. Poniendo orden	110
Figura 26. Gracias por participar	111
Figura 27. Concepto de números enteros	111
Figura 28 .Presaberes.....	112
Figura 29. Desarrollo del tema	112
Figura 30 . Jugando con la recta numérica	113
Figura 31. Relación mayor que y menor que.	114
Figura 32. Problema de aplicación	114
Figura 33. Operemos con los números enteros	115
Figura 34. Valor absoluto de un número entero	115
Figura 35. Operaciones en los Z	116
Figura 36. Sustracción en los números enteros.	116
Figura 37. Multiplicación de número enteros.....	117
Figura 38. División de números enteros.....	118
Figura 39. Ascenso y descenso de montañas.....	118
Figura 40. Resolución de problemas	119
Figura 41. Dale like si te gustó la aplicación.....	119

Lista de apéndices

Apéndice A. El GeoGebra.....	100
Apéndice B. Entrevista a docentes	101
Apéndice C. Diseño y construcción de la herramienta aplicativa en GeoGebra.....	105
Apéndice D. Ficha de re respuestas.....	120
Apéndice E. Cuestionario de evaluación de impacto	124

Introducción

Las operaciones con los números enteros es un paso fundamental en la vida de los estudiantes, no solo porque las mismas se presenten a lo largo del proceso formativo, sino porque hacen parte de la vida cotidiana en los ejercicios de compra, venta, adquisición de créditos, variación de la temperatura, escalada y descenso de montañas, datos estadísticos deportivos, indicadores económicos, entre otros.

Además, las operaciones de los números enteros se extienden a todo el desarrollo de las matemáticas y las demás áreas del conocimiento académico como la Física, Química, Ciencias sociales e ingenierías, en donde se ha observado que, si los estudiantes no tienen un conocimiento adecuado de las operaciones con los números enteros, se torna problemático para el buen desempeño en sus propósitos de formación futura, siempre que la misma esté relacionada con componentes matemáticos.

Sin embargo, en la práctica del proceso de enseñanza y aprendizaje de los números enteros, los docentes encuentran un sinnúmero de dificultades que van desde problemas metodológicos, culturales, desinterés y falta de motivación del estudiante, problemas sociales, familiares, institucionales, entre otros. Estas son las realidades, a las que las instituciones educativas Juan Tama de Mosoco y Nuestra Señora de los Dolores, del municipio de Páez del departamento del Cauca y del municipio de Quinchía departamento de Risaralda, respectivamente no son ajenas y que la han padecido por varios años, lo cual se evidencia en el bajo desempeño de las pruebas internas y externas, de ambos establecimientos.

Descrita las dificultades, es muy importante conocer con un alto grado de aproximación las causas reales que vienen afectando el proceso de enseñanza y aprendizaje

de los números enteros en los grados séptimos de los establecimientos educativos y desarrollar un proceso investigativo que ayude a mejorar el buen desempeño de los estudiantes, para lo cual se revisaron diversos trabajos investigativos afines con la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros, las teorías : Aprendizaje por Descubrimiento y Cómo plantear y resolver problemas. Las competencias matemáticas y la perspectiva histórica de los números enteros y su didáctica, las Tecnologías de la Información y la Comunicación TIC y las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento TAC.

Se consideró que la vinculación de los softwares matemáticos en el aprendizaje de las operaciones de los números enteros, especialmente la aplicación del Geogebra será de gran ayuda para los procesos de enseñanza y aprendizaje, mediante el diseño, implementación y evaluación comparativa de la guías de trabajo y considerar el uso frecuente del software relacionado para avanzar en el fortalecimiento del proceso educativo haciendo de la actividad más participativa, reflexiva y autónoma. También se hará un análisis de resultados comparativos de los contextos, rural y urbano, sobre el desarrollo de los Applet, las conclusiones y recomendaciones para trabajos de investigación futura, tanto para la región como para el país.

1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

1.1 Introducción

Como se manifestó al inicio, en la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros se han observado serias dificultades, lo cual no es un tema nuevo, teniendo en cuenta que históricamente esos problemas han sido parte en la evolución y aceptación de dicho conjunto numérico.

En concordancia con la dificultad relacionada, en esta sección se presenta la justificación del proyecto, la formulación de los objetivos, la contextualización, la descripción del problema, la pregunta problema y las preguntas auxiliares.

1.2 Justificación

Las comunidades indígenas demandan de talento humano profesional propio en todas las disciplinas del conocimiento, para el proceso de construcción de autonomía de pueblos originarios y avanzar en la consolidación de proyectos sociales propios de educación, salud, manejo ambiental, soberanía alimentaria, participación política, gobierno propio, defensa del territorio, entre otros. Todo lo cual, implica un gran desafío para el futuro de los pueblos indígenas y se requiere que los jóvenes asuman estos procesos previa formación profesional y bajo el respeto de los principios de Unidad, Tierra, Cultura y Autonomía.

En el mismo sentido, la población mestiza que está en la parte rural y las cabeceras municipales, demandan de personas profesionales de la misma región que contribuyan a defender los derechos y a generar sentido de pertenencia por su comunidad, el respeto por la naturaleza, la producción y el desarrollo amigable con el medio ambiente.

También el territorio, adolece de este tipo de investigaciones en el sector de la educación por lo que el proceso investigativo podrá ser un referente de importancia para continuar con otros procesos investigativos similares. Así, al mejorar los procesos metodológicos, la incorporación de los softwares (Geogebra) y a la luz de la Teoría del aprendizaje por descubrimiento se busca que el proceso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular de los números enteros, genere buen impacto en la formación de los jóvenes de la región.

Actualmente, se cuenta con aplicaciones matemáticas que dinamizan el aprendizaje de las matemáticas, pero infortunadamente en el sector rural es más bien poco lo que se conoce y se pretende incorporar esas herramientas mediante un proceso de planificación de trabajo interactivo, haciendo del aprendizaje de las operaciones de los números enteros más agradable.

En síntesis, lo que se desea es que los estudiantes de la región mejoren su nivel de desempeño en las matemáticas y que las mismas le sirvan para la vida y la formación profesional y forjar proyectos de vida sin abandonar su territorio.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo central

Fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números enteros haciendo uso de las TIC y las TAC en estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Juan Tama de Mosoco, municipio de Páez Cauca y Nuestra Señora de los Dolores en el municipio de Quinchía Risaralda.

Objetivos específicos

- Analizar las causas del bajo desempeño de los estudiantes de grado séptimo en el aprendizaje del conjunto de los números enteros en las instituciones educativas en los últimos tres años escolares.
- Implementar guías de trabajo interactivas apoyadas con el uso de las TIC, registrando el impacto de la tecnología computacional y la resolución de problemas a estudiantes de grado séptimo de las instituciones educativas.
- Evaluar el impacto de las guías interactivas al dar solución a problemas matemáticos de números enteros a través del aprendizaje por descubrimiento, utilizando la tecnología computacional en grados séptimos de las instituciones educativas.

1.4 Formulación del problema

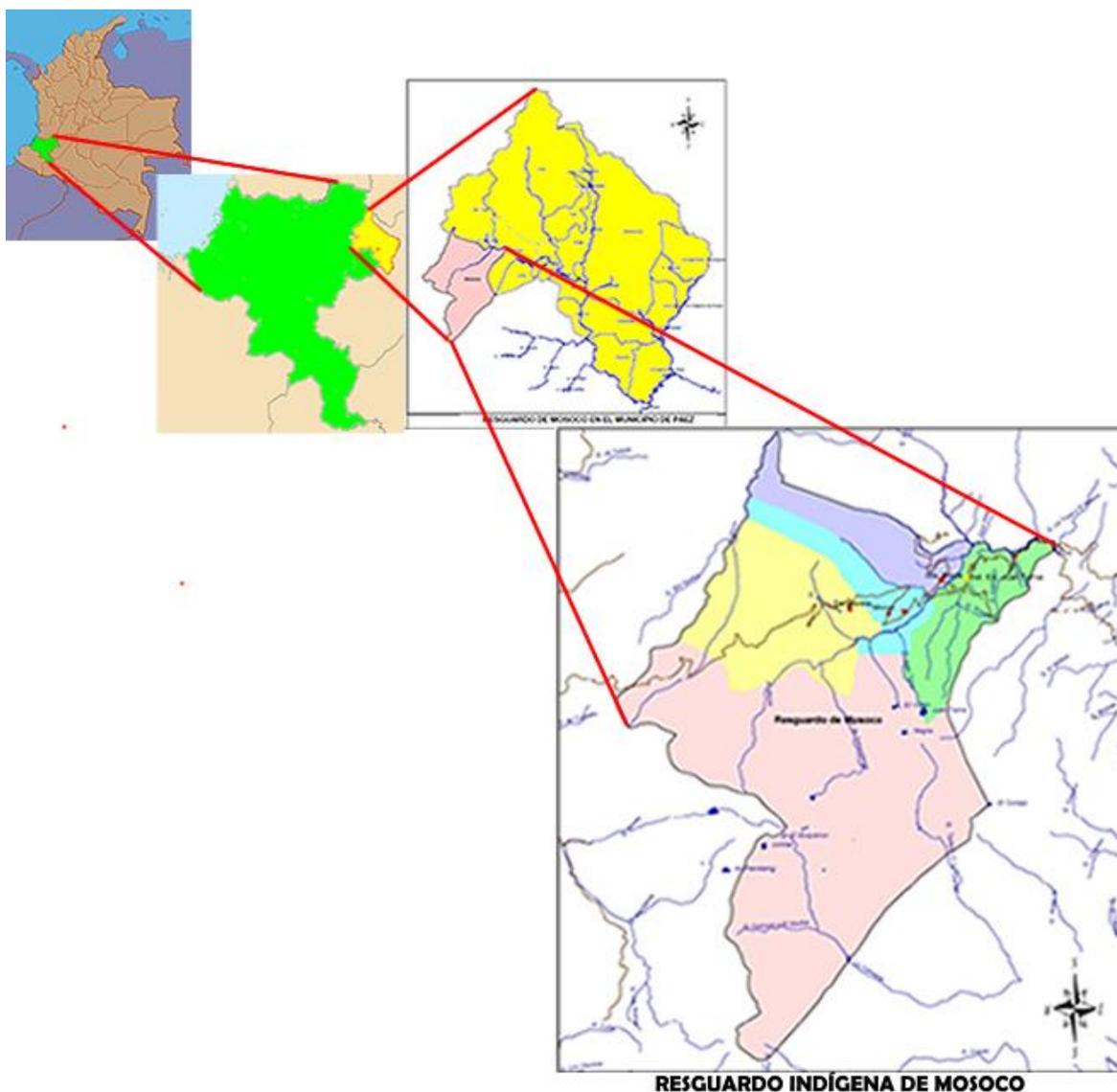
1.4.1 Contextualización

Las Instituciones Educativas donde se va a implementar el desarrollo de los objetivos del presente proyecto, se ubican en dos municipios de dos departamentos en el contexto rural y urbano; con el fin de hacer una comparación de los desempeños matemáticos en los grados séptimos.

“El territorio indígena de Mosoco está localizado en el noroccidente del municipio de Páez y nororiente del departamento del Cauca, al sur de Colombia. Tiene 1600 habitantes en su totalidad indígenas de la etnia nasa, posee clima frío con temperatura promedio de 13°C y una altura sobre el nivel del mar de 2600 metros”. (Diagnóstico del Cabildo de Mosoco 1994).

En la figura 1, se puede apreciar el Colegio Técnico Agropecuario, adscrito a la institución Educativa Juan Tama de Mosoco, tiene una trayectoria de más de 20 años orientando clases en el nivel de básica secundaria y nivel medio. El establecimiento educativo en referencia es de carácter público, jornada completa, calendario A, mixto, ubicado en el sector rural y ofrece sus servicios mayoritariamente a la población indígena nasa..

Figura 1. Ubicación geográfica de la institución educativa Juan Tama de Mosoco



Fuente: Ingeniero de Sistemas Hurtado.M, Jesús (2010)

De acuerdo con (libre, 2010), el Municipio de Quinchía se encuentra ubicado sobre la cordillera Occidental y dista 110 kilómetros de Pereira, está situado a 1.825 m.s.n.m y la temperatura promedio del municipio es de 18 grados centígrados. Quinchía tiene una población de 31.996 habitantes de los cuales la mayoría pertenece a la zona rural. El municipio cuenta con 81 veredas y cuatro corregimientos.

El colegio Nuestra Señora de los Dolores de Quinchía, en la figura 2, fue uno de los primeros 86 colegios oficiales del país que mejoraron sus resultados en las Pruebas Saber 3° y 5°, mejorando sus puntajes del Índice Sintético de Calidad Educativa, ISCE, y mostrando un desempeño por encima de la media nacional. Es una institución educativa mixta..

Figura 2. Ubicación Geográfica de la I.E. Ntra. Sra. de los Dolores Quinchía



Fuente: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/eb/Colombia>

Las dificultades que se presentan en el aprendizaje del conjunto de los números enteros en las Instituciones Educativas Juana Tama de Mosoco y Nuestra Señora de las Dolores de Quinchía en los estudiantes de grado séptimo es el tema central de este proyecto de investigación. De modo que es, en estos grados y para el periodo escolar 2018, donde se

adelantarán las actividades del proceso investigativo y la implementación de la tecnología computacional para corroborar o desvirtuar la eficacia de la misma en el proceso educativo de los aprendices en concordancia con los objetivos formulados en esta propuesta.

1.4.2 Planteamiento del problema

En los estudiantes de grado séptimo de las Instituciones Educativas Juan Tama de Mosoco y Nuestra Señora de los Dolores se ven grandes dificultades en el proceso de aprendizaje de los números enteros, lo cual no es un asunto nuevo, tampoco es un problema exclusivo de las instituciones citadas en particular. Las dificultades se presentan en la asimilación de los conceptos, el manejo adecuado de las propiedades de los números enteros, la diferenciación correcta de los signos de operación de adición y sustracción con los signos que indican la naturaleza de las cantidades, obtener el resultado correcto cuando se están sumando cantidades del mismo signo, cantidades de signo contrario, combinaciones de suma y resta, efectuar la operación de la sustracción cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, la supresión de los signos de agrupación cuando están precedidos del signo más o el signo menos, la poca importancia que el estudiante le concede al signo predicativo de las cantidades y finalmente la aplicación de este conjunto numérico en el desarrollo de los problemas.

Las dificultades que se han descrito anteriormente y como se dijo al comienzo, no son nuevas, ya que son procesos y experiencias por las que tuvo que trasegar la humanidad históricamente para su comprensión y asimilación, a dichos números se les negaba su existencia o su utilidad o incluso se les consideraba números falsos, es decir el obstáculo en su comprensión y aceptación tiene orígenes muy remotos, en este sentido.

Torres (s.f) afirma:

Hasta fines del siglo XVIII los números negativos no eran aceptados universalmente. Gerolamo Cardano, en el siglo XVI, llamaba a los números negativos “falsos”, pero en su *Ars Magna* (1545) los estudió exhaustivamente. Jhon Wallis (1616 - 1703), en su *Aritmética Infinitoum* (1655), “demuestra” la imposibilidad de su existencia diciendo que “esos entes tendrían que ser a la vez mayores que el infinito y menores que cero”.

En la vida real los conceptos intuitivos de los números enteros se relacionan con ingresos y egresos, ascenso y descenso, utilidades y pérdidas, temperatura bajo cero y sobre cero, años antes de Cristo y después de Cristo, nivel sobre el mar y bajo el mar, no obstante es tan solo una idea empírica, porque en el fondo este comportamiento se debe interpretar desde las concepciones científicas para evitar confusiones y hacer del conjunto numérico de los enteros objetos importantes para la resolución de problemas en otras disciplinas como la Física, la ingeniería, la química, entre otras.

1.4.3 Pregunta de investigación

¿Cómo Fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números enteros, haciendo uso de las TIC y las TAC en estudiantes de grado séptimo en las instituciones educativas Juan Tama de Mosoco y Nuestra Señora de los Dolores, municipio de Páez departamento del Cauca y municipio de Quinchía departamento de Risaralda?

De acuerdo con la pregunta central, se desglosan las siguientes preguntas auxiliares

1.4.4 Preguntas auxiliares

¿El uso de la tecnología computacional fortalece los procesos de enseñanza y aprendizaje de las operaciones con los números enteros?

¿La implementación de la tecnología computacional ayuda a superar los obstáculos epistemológicos que se presentan en los estudiantes a la hora de operar con los números enteros?

¿El uso de la tecnología computacional contribuye en la comprensión científica que implica el estudio de los números enteros?

¿La incorporación de la tecnología computacional resuelve las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del número entero?

¿Las falencias en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las operaciones de los números enteros es la carencia de herramientas tecnológicas o las deficiencias metodológicas?

2. REFERENTES TEÓRICOS

2.1 Introducción

Se realizó una revisión bibliográfica de trabajos investigativos en números enteros en el orden internacional, nacional y local, para conocer las experiencias, los logros, las dificultades y las conclusiones de los mismos. Igualmente se abordó el marco legal del Sistema de Educación en Colombia, por tanto, se describió brevemente lo contemplado en la Constitución Política de Colombia, la Ley General de Educación y el Sistema Educativo Indígena Propio S.E.I.P. Por otra parte, se revisó la Teoría del Aprendizaje por Descubrimiento como derrotero del presente trabajo de investigación y las categorías de Competencias Matemáticas, Resolución de Problemas, Números Enteros, Representaciones Semióticas y la aplicación Geogebra.

2.2 Antecedentes

Antecedentes Internacionales.

Briceño (2011) desarrolló un trabajo llamado: *Estrategias didácticas durante el proceso de enseñanza –aprendizaje de las operaciones aritméticas con números enteros.*

El estudio es de tipo descriptivo y se adelantó con tres docentes que atienden las clases de grado séptimo de educación básica, de la Unidad Educativa José Felix Rivas, ubicada en la Parroquia Venancio Pulgar del Municipio de Maracaibo, Estado de Zulia. El estudio se considera descriptivo por cuanto describe, registra, analiza e interpreta una situación o fenómeno en un tiempo y lugar determinado. La técnica empleada para la recolección de datos fue la implementación de observación por encuesta, instrumento que se aplicó para analizar las estrategias didácticas por los docentes.

De acuerdo con los criterios de la encuesta: Nunca, casi nunca, casi siempre y siempre en el contexto de los indicadores de la dimensión principio y las categorías definidas como suficiente y medianamente suficiente, que se correspondieron con los criterios.

El proyecto concluye expresando que el empleo de las estrategias didácticas es medianamente suficiente a la hora de aplicarlas, con lo cual también afirma que la institución presenta debilidad en el empleo de las estrategias en mención.

Gálvez (2014) en el trabajo investigativo denominado: *Aplicación de Juegos Didácticos en el aprendizaje de la adición de números enteros en estudiantes del primer grado de educación secundaria de la Institución Educativa Túpac Amaru del distrito de Villa María del Triunfo , Lima Perú.*

Esta investigación fue de tipo aplicada, por cuanto trata de comprobar la eficacia de la variable independiente, que en este caso corresponde a los juegos didácticos, a través de los métodos cuasi experimental, inductivo-deductivo y comparativo. Involucró una muestra de 57

estudiantes de los grupos C y D; C como grupo experimental con 31 estudiantes y D como grupo de control con 26 estudiantes. Los juegos implementados fueron los dados y el llamado Tablero de Parchís.

La tesis concluyó que la aplicación de los juegos didácticos influye significativamente y positivamente en el aprendizaje, comunicación matemática, razonamiento y demostración y la resolución de problemas con la operación de la adición de los números enteros.

Antecedentes Nacionales

Maca (2016) realizó el trabajo denominado: *La enseñanza de los números enteros un asunto sin resolver en las aulas*, investigación que se desarrolló en la Universidad del Cauca bajo enfoque cualitativo, porque pretendió comprender el concepto que sobre números enteros poseen los docentes de matemáticas básicas de la universidad y la relación que existe entre sus concepciones y prácticas de aula.

Para la recolección de la información utilizó la técnica de grupos focales, que permitió un diálogo directo con los participantes que aceptaron voluntariamente ser parte del proceso investigativo. Contó con la participación de cinco docentes de planta del departamento de matemáticas de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación, que prestan sus servicios en los diferentes programas de la universidad que tienen dentro de su pensum académico la asignatura de Matemáticas Fundamentales.

La investigación concluye que los docentes desconocen el concepto científico de números enteros y por tanto generan dificultades a la hora de implementar el proceso de la enseñanza de los mismos, lo que a su vez repercute negativamente en el aprendizaje en el proceso de aprendizaje.

Aristizábal (2016) en el trabajo denominado *Guías didácticas de interaprendizaje para la enseñanza-aprendizaje del concepto de los números enteros en el grado séptimo de la institución educativa Aguacatal del municipio de Neira*, vereda Aguacatal, departamento de Caldas, investigación cuantitativa- descriptiva se realizó con 26 estudiantes, correspondiente al total del grado.

El trabajo consistió en implementar guías de interaprendizaje, con los momentos de la metodología Escuela Nueva, para la enseñanza del concepto de los números enteros y las actividades que se realizaron fueron la identificación de los pre- saberes, diseño y aplicación de guías de interaprendizaje con los momentos de Escuela Nueva y en algunas de ellas la aplicación de actividades con herramientas de las nuevas Tecnologías de Información y la Comunicación (TIC).

El trabajo concluye que la aplicación de nuevas estrategias metodológicas permite dar solución a las dificultades que se presentan en la enseñanza de los conceptos matemáticos, ya que el estudiante encuentra una oportunidad de manipular objetos virtuales y visualizar en ellos las operaciones con los números enteros, al tiempo que le genera una gran motivación y permitiéndole así el aprendizaje significativo.

Bonilla (2015) en su trabajo: *Implementación de estrategias pedagógicas basadas en las TIC para mejorar el proceso enseñanza aprendizaje de los números enteros en el área de matemáticas grado séptimo*, realizado en la Institución Educativa Otoniel Guzmán, corregimiento de Malabar, municipio de Venadillo Tolima , investigación mixta , consistió en la implementación de una estrategia pedagógica basada en las TIC para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de los números enteros, en una población y muestra de 25 estudiantes. La información se adquirió por una evaluación diagnóstica, mediante la aplicación de encuestas y una evaluación final, así como una entrevista a la docente de matemáticas. A los

estudiantes se les realizó un test sobre los números enteros a través de la herramienta web denominada THATQUIZ que les permitió una evaluación en línea donde se observó que más del 50% de los estudiantes obtuvo una calificación por debajo de 3,0 nota mínima de aprobación de la asignatura, luego se les aplicó un examen final en ambientes virtuales en el que se indica un cambio de actitud, donde los mismos estudiantes manifestaron haber mejorado su nivel de competencia.

Entre las conclusiones, se manifiesta que el desinterés de los estudiantes de grado séptimo por las matemáticas radica en el poco uso de herramientas didácticas en la clase, el exceso de la clase magistral, el temor infundado del estudiante hacia los números, entre otros factores.

La implementación de programas y recursos educativos digitales en el aula, generó motivación por la clase de matemáticas y originó mayores expectativas en los estudiantes.

Castrillón (2013), en su investigación denominada: *Estrategia didáctica de enseñanza utilizando las TIC para Aritmética de Número Enteros en grado octavo: Estudio de caso*, desarrollada en la I. E. Normal Superior Señor de los Milagros, en el municipio San Pedro de los Milagros departamento de Antioquia diseñó un curso virtual para aprender a realizar las operaciones básicas con números enteros en la plataforma educativa virtual “Erudito”.

El trabajo se desarrolló en dos grupos: Octavo A, grupo experimental compuesto por 52 estudiantes sobre el cual se aplicó la estrategia didáctica y otro llamado grupo control u octavo B conformado por 46 estudiantes, al que se orientó la misma temática, pero con el modelo pedagógico tradicional.

Con la investigación se concluye que además del diseño e implementación de una estrategia basada en las TIC se observó una notable mejoría en los desempeños académicos de los estudiantes del grupo experimental en comparación con los estudiantes del grupo control; lo que permite confirmar que es indiscutible los efectos positivos que se logran cuando se

enriquece los recursos didácticos, permitiendo mayor dinamismo en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Antecedentes Locales

Quiñones (2015) en el proyecto: Estrategias multimedia para mejorar el manejo de suma y resta de números enteros en los estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Santa Teresita de Rosas Cauca.

Investigación que se enmarca como cualitativo y descriptivo. Se aplicó una encuesta a 22 estudiantes de grado séptimo A, en lo correspondiente a número enteros. En esta investigación también se exploró los recursos didácticos que los docentes utilizan a la hora de orientar las clases, evidenciándose que la mayoría de profesores utilizan el tablero, los libros de textos y pocas veces el computador y las distintas herramientas computacionales, replicado así el modelo tradicional de enseñanza.

El estudio concluye que el empleo de las estrategias y herramientas tecnológicas, permite resolver dificultades de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números enteros, haciendo de estos procesos actividades más participativas, atractivas y dinámicas, ya que permiten la incorporación de imágenes, gráficos, texto y simulaciones, con lo cual se potencian los conceptos, procedimientos, operaciones y resolución de problemas.

Argumero (2012) en *Humanización de la enseñanza de las matemáticas desde un contexto histórico intercultural en el resguardo indígena Quintana municipio de Popayán Cauca*, tipo de investigación acción participación, desarrolla como una fase inicial un diagnóstico de la comunidad educativa y en la siguiente fase aplica encuestas, entrevistas y conversatorios con mayores y en diversos escenarios de encuentros educativos.

El estudio insiste fundamentalmente en la humanización de la enseñanza de las matemáticas, como estrategia para la construcción del conocimiento y la consecuente formación íntegra de los líderes indígenas.

2.3 Marco Legal

En este marco, se describen las principales normatividades que rigen la educación colombiana y además se referencian las leyes que amparan los derechos de los pueblos indígenas en el ámbito del proceso educativo. Así, el orden en que se construyó esta descripción corresponde a la Constitución Política de Colombia como norma de mayor jerarquía, luego la Ley General de Educación o Ley 115 de 1994 y el Sistema Educativo Indígena Propio (SEIP).

Constitución Política.

La Constitución Política de 1991, el artículo No 67 establece que:

La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura.

La educación formará al colombiano en el respeto a los derechos humanos, a la paz y a la democracia; y en la práctica del trabajo y la recreación, para el mejoramiento cultural, científico, tecnológico y para la protección del ambiente.

El Estado, la sociedad y la familia son responsables de la educación, que será obligatoria entre los cinco y los quince años de edad y que comprenderá como mínimo, un año de preescolar y nueve de educación básica.

La educación será gratuita en las instituciones del Estado, sin perjuicio del cobro de derechos académicos a quienes puedan sufragarlos.

Corresponde al Estado regular y ejercer la suprema inspección y vigilancia de la educación con el fin de velar por su calidad, por el cumplimiento de sus fines y por la mejor formación moral, intelectual y física de los educandos; garantizar el adecuado cubrimiento del servicio y

asegurar a los menores las condiciones necesarias para su acceso y permanencia en el sistema educativo.

La nación y las entidades territoriales participan en la dirección, financiación y administración de los servicios educativos estatales, en los términos que señalen la Constitución y la Ley.

Ley General de Educación

La ley 115 de 1994 o Ley General de Educación en concordancia con la Constitución Política, define que la educación es un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y deberes. Esta ley señala las normas generales para regular el servicio público de la educación que cumple una función social acorde a las necesidades e intereses de las personas, de la familia y de la sociedad. De acuerdo con estas ideas, la mencionada ley en su artículo 5 ° igualmente define los fines de la educación colombiana.

Estructura del Sistema Educativo

De igual forma la ley 115 establece la estructura del servicio educativo del siguiente modo: educación formal, educación no formal y educación informal.

Define que la **educación formal**, es aquella que se imparte en establecimientos educativos aprobados, en una secuencia regular de ciclos lectivos, con sujeción a pautas curriculares progresivas, y conducente a grados y títulos. Mientras que la **educación no formal**, es la que se ofrece con el objeto de complementar, actualizar, suplir conocimientos y formar en aspectos académicos o laborales sin sujeción a periodos de secuencia regulada y no conduce a grados ni títulos. Por otra parte, se considera **educación informal** todo conocimiento libre y

espontáneamente adquirido, proveniente de personas, entidades, medios masivos de comunicación, medios impresos, tradiciones, costumbres, comportamientos sociales y otros no estructurados.

Modalidades de educación.

El Título III de la ley 115, también se refiere a las modalidades de atención educativa a poblaciones para requerimientos específicos de formación, y garantizar la igualdad en el derecho a la educación y cumplir con las exigencias constitucionales. En este sentido la norma identifica las siguientes modalidades: Educación especial, educación para adultos, educación rural, educación para grupos étnicos y educación para la rehabilitación social.

En resumen, la Ley General de Educación define las pautas generales para el diseño curricular, la implementación del Plan de Estudios y el Proceso Evaluativo, la organización del Gobierno Escolar, la construcción del manual de convivencia, la autonomía escolar, como ejes claves del denominado Proyecto Educativo Institucional (P.E.I).

Estándares Básicos de Competencias

Los Estándares Básicos de Competencias del año 2006 en las áreas fundamentales del conocimiento son el fruto de un trabajo interinstitucional entre el Ministerio de Educación Nacional y las facultades de Educación del país agrupadas en la Asociación Colombiana de Facultades de Educación y distintos actores de la sociedad. Un estándar se considera como un criterio claro y público que permite juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad.

Los estándares se definen como unos referentes que permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los estudiantes en el transcurso de su vida escolar. Una competencia se define como un saber hacer flexible que puede actualizarse en

distintos contextos, es decir, como la capacidad de usar los conocimientos en situaciones distintas de aquellas en las que se aprendieron.

Las estructuras de los estándares básicos de competencias están definidas por áreas y se expresan en una secuencia de complejidad creciente y se agrupan en grupos de grados, estableciendo lo que los estudiantes deben saber y saber hacer al finalizar su paso por ese grupo de grados, así: de primero a tercero, de cuarto a quinto, de sexto a séptimo, de octavo a noveno, y de décimo a undécimo.

Como también los estándares desarrollan los criterios de coherencia vertical y coherencia horizontal.

Sistema Educativo Indígena Propio (S.E.I.P)

El Sistema Educativo Indígena Propio (S.E.I.P) del Consejo Regional Indígena del Cauca CRIC se considera un conjunto de procesos que recogen la historia, las cosmogonías, los principios y el presente de los pueblos orientado y proyectado a un futuro que garantice la permanencia cultural en los tiempos y en los espacios como pueblos originarios. Es la forma de concretar y hacer práctica la educación que se desea, que se necesita y que las comunidades están en las condiciones de desarrollarla. El sistema propuesto comprende tres componentes, el político y organizativo, el pedagógico y el administrativo.

Mediante este sistema las comunidades orientan, planean, direccionan, desarrollan, evalúan y hacen seguimiento y proyectan la educación en coherencia con las raíces culturales y el derecho ancestral, siendo una respuesta a las múltiples carencias e impactos negativos de la educación oficial hasta ahora implementada dentro de los territorios.

La investigación es el elemento metodológico fundamental del SEIP.

Investigando, las comunidades crean y recrean los conocimientos en relación estrecha con la naturaleza, las realidades sociales, políticas, económicas y culturales de los pueblos ancestrales. Contribuye a generar, mejorar y desarrollar estrategias para el fortalecimiento de los Planes de Vida y la creación de condiciones para el mejor vivir comunitario.

La construcción del SEIP se fundamenta en la Ley de Origen o Derecho Mayor, los tratados internacionales, la Constitución Política y la ley nacional.

2.3 Marco conceptual

2.3.1 Aprendizaje por descubrimiento.

El descubrimiento ha sido y será siempre un proceso importante en la construcción de los conocimientos del ser humano ya que algunos de los fenómenos naturales y sociales como el fuego, la agricultura, las medicinas, entre otros, han sido descubiertos fortuitamente; pero, en el caso del proceso de aprendizaje, el descubrimiento debe estar planificado intencionalmente por parte del docente, en donde el estudiante pueda avanzar gradualmente apoyado en guías interactivas, textos, imágenes, objetos, etc., en la construcción y obtención de los conocimientos. Por cuanto, el descubrimiento constituye un método de enseñanza que es concordante con el constructivismo, teoría que no se aborda en este apartado, ya que se desea evidenciar fundamentalmente que el descubrimiento permite un proceso autónomo de aprendizaje.

Brunner (1961) citado en Teorías del Aprendizaje (2012), declara que “El aprendizaje por descubrimiento consiste en que el estudiante obtenga conocimientos por sí mismo” (p.266)

Se ratifica, que la obtención de conocimientos por descubrimiento, no es un hecho fortuito, cada vez que requiere por parte del docente una cuidadosa planificación que guíe los descubrimientos deseados, para lo cual los estudiantes deben gozar de amplias oportunidades de escoger los recursos que más les llame la atención, que le representen un gran interés, una gran motivación y que esté dispuesto y tenga deseos profundos de aprender.

Como afirma DALE H.SCHUNK (2012), descubrir conlleva a formular y probar hipótesis y no solo leer y escuchar al profesor. El descubrimiento es una forma de razonamiento inductivo ya que los estudiantes pasan de analizar asuntos específicos a formular reglas, conceptos y principios generales.

El descubrimiento genera una gran satisfacción en el estudiante, en la medida en que le permite desarrollar ciertas habilidades y destrezas que a su vez le potencian la capacidad de resolver problemas en cualquier ámbito. Klahr y Simón (1999), citado en Teorías del Aprendizaje (2012), manifiesta que “El descubrimiento es una forma de resolver problemas ,y no se trata simplemente de permitir que los estudiantes hagan lo que deseen”, lo cual significa que el descubrimiento tiene una dirección, que no es una actividad al azar, que la organización proviene de una planificación de manera cuidadosa por parte del docente y permite a su vez que los estudiantes busquen, exploren , manipulen e investiguen, con una gran libertad.

En la metodología de aprendizaje por descubrimiento, identificamos algunos rasgos generales como los que se consideran a continuación: el docente es el encargado de presentar las herramientas necesarias al estudiante, a su vez el estudiante debe poseer conocimientos previos y estar familiarizado con los procedimientos investigativos mínimos, como la observación, búsqueda, control y medición de variables.

Sin embargo, de acuerdo con DALE H. SCHUNK (2012), el descubrimiento no es adecuado para todos los tipos de aprendizaje, ya que podría no ocurrir cuando los estudiantes no tienen experiencia con el material o la información antecedente. También, se dice que el aprendizaje por descubrimiento, no llena las expectativas si el contenido se estructura con temas demasiado fáciles o demasiado difíciles, por lo que el descubrimiento al parecer es más apropiado cuando el proceso de aprendizaje es importante, como en el caso de resolución de problemas, donde el estudiante participa activamente.

2.3.2 Resolución de problemas.

La resolución de problemas constituye la actividad principal de las matemáticas, sin embargo, en los textos de apoyo casi siempre los encontramos como una unidad aislada al final de cada capítulo, que en ocasiones no se alcanza a desarrollar dada la premura del tiempo y los afanes en los que el docente incurre por salvar los contenidos del plan de estudios, que en su esencia se centran en el desarrollo de ejercicios de modo mecánico. También, dichos problemas se formulan en contextos y tiempos diferentes a los que vive el estudiante y no le representan, ni le significan nada y no les llama la atención.

En concordancia con reconocerle la mayor participación posible del estudiante, en aras de la construcción del conocimiento de modo activo, dinámico y significativo, se considera a la resolución de un problema, un espacio y una oportunidad para crear en el estudiante un espíritu reflexivo y desarrollo de pensamiento crítico.

En el desarrollo de este trabajo se ha concebido el resolver problemas como una forma de pensar donde el estudiante muestra una serie de estrategias tanto cognitivas como

metacognitivas .El uso de estas estrategias se relaciona directamente con las ideas o concepciones que el individuo tenga a ceca de las matemáticas (Santos Trigo, 1997).

De igual modo, Leshh & Zawojewski (2007), citado por Santos Trigo (s.f.), definen la resolución de problemas como “el proceso de interpretar una situación matemáticamente , la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas”(p.782).Es decir, el desarrollo de las ideas matemáticas le permiten al estudiante un proceso de reflexión, un dinamismo de generación constante en las formas de pensar, actuar y tomar decisiones .

Por otra parte se ha observado que las denominadas pruebas externas están diseñadas fundamentalmente en la resolución y análisis de problemas matemáticos, lo cual riñe con las metodologías de evaluación de los procesos internos, ya que estos últimos se elaboran bajo el criterio del docente en el contexto de los Proyectos Educativos Institucionales y la llamada autonomía escolar, como es el caso de los planteamientos que tienen los pueblos indígenas en la concepción de la llamada educación propia donde lo fundamental es la conservación de la identidad, la cultura y los principios organizativos y no están preocupados por los resultados de las pruebas externas.

Ante la imposibilidad de abarcar un sinnúmero de reflexiones sobre la resolución de problemas, consideramos conveniente en el presente trabajo enfocarnos principalmente en los planteamientos de G. Polya, sobre la resolución de problemas.

El autor antes relacionado, considera cuatro etapas en la resolución de problemas matemáticos, los que relacionamos a continuación y a la vez analizamos cada fase y sus

respectivos alcances: **Comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y examinar la solución obtenida.**

Comprender el problema: en esta fase lo que el autor recomienda es plantear una serie de interrogantes que son sencillos, naturales y de sentido común. Polya (1965) recomienda los siguientes interrogantes: “¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?”

Comprender el problema es tener claridad sobre lo que se pide en el mismo, es decir que aquí interviene otro de los factores sumamente claves, que es la comprensión lectora del estudiante, que en este caso no se discute aquí por ser otro de los complejos campos que tiene sus respectivos espacios de reflexión, no obstante, con afirmar que la comprensión del problema es tener claro lo que el mismo exige, constituye un paso apropiado para el éxito en la resolución del problema.

Polya (1965), el estudiante debe comprender el problema y no solo comprenderlo sino también desear resolverlo. El alumno igualmente deberá tener la capacidad de desglosar las principales partes del problema, la incógnita, los datos, la condición.

Concebir un plan: consiste en que una vez tengamos claro en lo que nos piden en el problema, diseñemos y organicemos mentalmente y plasmemos sobre el papel, las construcciones y las relaciones que se establecen entre la incógnita o las incógnitas, con los datos y las condiciones. De todos modos, el autor manifiesta que de la comprensión del problema a la concepción del plan es un camino extenuante, no obstante que lo esencial en la resolución es el concebir la idea de un plan. Polya (1965), no es fácil tener una buena idea si

los conocimientos son pobres en la materia e imposible si la desconocemos por completo. Plantea una analogía, en la que establece que los materiales por si solos no permiten la realización de una casa, pero es imposible edificar una casa sin ajuntar los materiales necesarios. Así, los materiales necesarios para la solución de un problema de matemáticas, son los detalles particulares de conocimientos previamente adquiridos, tales como problemas resueltos, teoremas demostrados. Lo que significa explorar si hay problemas similares que ya hayan sido resueltos, o si es posible enunciar el problema de un modo diferente o si es posible también resolver un problema que tenga estrecha relación, si se han empleado todos los datos, si se ha hecho uso de toda la condición, etc.

Ejecución del plan: siguiendo con la analogía de la construcción de la casa que el mismo autor a propuesto, la ejecución del plan es otro de los procesos en los cuales el estudiante debe tener igualmente claro que va de primero, que va de segundo y así sucesivamente.

Poner en pie un plan, concebir la idea de la solución, ello no tiene nada de fácil. Hace falta, para lograrlo, el concurso de toda una serie de circunstancias: conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración, y lo que es más, buena suerte. (G.Polya, 1965, pág. 33)

Examinar la solución obtenida: este último paso se considera muy importante, al igual que las demás etapas, ya que permite hacer un ejercicio de retrospección para revisar si el camino recorrido durante la solución del problema es adecuado y evaluar si es posible, simplificar algunos pasos.

Aun los buenos alumnos, una vez que han tenido la solución y expuesto claramente el razonamiento, tienden a cerrar sus cuadernos y a dedicarse a otra cosa. Al proceder así, omiten una fase importante y muy instructiva del trabajo.

Reconsiderando la solución, reexaminando el resultado y el camino que les condujo a ella, podrían consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes para resolver problemas. Un buen profesor debe comprender y hacer comprender a sus alumnos que ningún problema puede considerarse completamente terminado. (Polya G. , 1965, pág. 35)

Sobre resolución de problemas, también Allan Schoenfeld citado por Barrantes .H (2006), dice que se deben tener en cuenta tres dimensiones: los recursos, las heurísticas y el control. Además se debe también tener en cuenta el sistema de creencias que sobre el aprendizaje de las matemáticas tienen los estudiantes, el profesor y la sociedad.

Por recursos se entiende los saberes previos que el estudiante debe poseer para resolver adecuadamente un problema , por heurística se entiende los variados métodos que el estudiante puede implementar en resolución de cada problema y el control hace referencia a tener la capacidad de monitorear oportunamente si el camino escogido en la solución del problema es el indicado.

2.3.3 Representaciones Semióticas.

Las representaciones semióticas constituyen un sistema de signos que le permiten al hombre emplearlos para representar los denominados objetos matemáticos en lo correspondiente al campo de las matemáticas. La teoría de registros de representación de Raymond Duval, más bien se considera relativamente nueva (30 años), y comparte con Vygotsky la tesis de que el pensamiento no es puramente conceptual, sino que también es

semiótico. Vygotsky ha enfatizado en el papel del lenguaje natural en el desarrollo del pensamiento, lo que indica un solo registro de representación semiótica. Mientras que Duván insiste en la pluralidad de representación semiótica y argumenta cómo las palabras y los signos son esenciales en el desarrollo del pensamiento conceptual.

Al hablar de representaciones semióticas, se observa que hay unos enfoques de las mismas; por ejemplo, el enfoque semiótico- interpretativo peirceano y el enfoque semiótico –cognitivo de Duval y además se relacionan otros pensadores como D' Amore y Fandiño Pinilla. En lo que corresponde a este proyecto se estará relacionando fundamentalmente el planteamiento de Duval; es decir, al enfoque semiótico-cognitivo.

Según Duval (1996) citado por (Lori, 2015), “Define un registro semiótico como un sistema específico de producción de representaciones semióticas , precisamente como un sistema semiótico (un conjunto de elementos y reglas organizativas para combinar o reagrupar los elementos en unidades significativas) que responde no solo a una función de comunicación o de objetivación , sino también a una función de tratamiento , es decir de transformación de una representación de un objeto en otra (del mismo objeto) al interior del mismo sistema semiótico”.

Se consideran términos básicos de la teoría de las representaciones semióticas: noesis (aprehensión conceptual del objeto), semiosis (proceso de representaciones externas), registros, tratamientos y conversión.

Las actividades matemáticas, ocurren cuando se realizan transformaciones sobre los registros de representación, estas representaciones se hacen bien sea en lenguaje natural, como

fórmulas algebraicas, gráficos y le permiten al hombre exteriorizar sus representaciones mentales y lograr con esto que los objetos matemáticos sean comunicables.

Comentado de modo muy general sobre la teoría en mención, efectivamente en el ejercicio práctico se ha observado en los niños grandes confusiones que generan el manejo del sistema de signos, como por ejemplo a la hora de dar un resultado con el signo "=", en ocasiones el estudiante lo omite y simplemente agrega un número sin que haya resultado.

Esta valiosa teoría, se asume como un aporte clave a la hora de implementar las guías interactivas con el uso del Geogebra, ya que permitirá realizar la accesibilidad de un objeto matemático mediante diversos registros que la aplicación ofrece como son: los gráficos, el sistema algebraico, tablas y el sistema de coordenadas cartesianas, de modo simultáneo facilitando así, una buena comprensión, agrado y gusto por el aprendizaje de las matemáticas.

2.4 Marco disciplinar

2.4.1 Los números enteros.

Concepción de cantidad, número y sistema numérico.

La correspondencia de objetos, animales y otros seres con el número, estuvo desde tiempos muy remotos en la mente del hombre. Para representar cantidades, el hombre recurrió a marcar incisiones en la corteza de los árboles, comparación de cantidad de piedras con la cantidad de animales, entre otros; en tiempos en los que el hombre era nómada y recolector.

De acuerdo con Carballo (1999), citado por Sánchez (2012), contar fue una necesidad de adaptación al medio natural para proteger sus bienes y comprender los ciclos de la naturaleza porque desde entonces el hombre advertía que en la misma ocurrían cambios con cierta

regularidad, favoreciendo la producción de alimentos y así garantizaba su pervivencia, es decir, de este modo el hombre se da cuenta que el conjunto de objetos o de seres tienen una cualidad en común, cualidad que significó número con el paso del tiempo.

Los primitivos

Según Bishop (2005), la correspondencia de objetos con números tiene una larga historia y, aún en los denominados “pueblos primitivos”, existen indicios de conteo. En concordancia con esta idea, de acuerdo con Sánchez (2012), describimos los hallazgos de varios objetos del paleolítico, como piedras perforadas, huesos humanos y de antiguas fogatas de carbón del arqueólogo belga Jean de Heinzelin en Ishango república del Congo. Entre los hallazgos se resalta el hueso de un babuino con muescas que según la prueba del carbono 14, fue tallado 23 milenios antes de Jesucristo y que se supone son incisiones para contar los integrantes de la tribu, no obstante, otros análisis se refieren a que esas muescas probablemente corresponden a un código cifrado.

En 1937, Karl Absolom halló en una excavación hecho en Checoslovaquia un fósil de hueso de 30 mil años de antigüedad que contiene marcas talladas, lo cual evidencia una práctica de conteo (García de Cossio, 2015)

Fue de este modo como el hombre empezó a registrar cantidades, es decir construyendo símbolos, palabras y signos que significaban un conjunto, en cuya base estaba implícita la noción de número y empezaba así, un temprano sistema primitivo que le permitió contar el tiempo y realizar cuentas sencillas, esto se representa en la figura 3 conocido como el papiro de Rhind.

Figura 3. Papiro de Rhind



Fuente: <https://i2.wp.com/historiadeafrica.com/wp-content/uploads/2012/12/Papyrus-rhind1.jpg?fit=630%2C300>

El concepto de base

La actividad de contar con la utilización de muescas en los palos, dedos, piedras, nudos en cuerdas, entre otros medios, se fue volviendo cada vez más grande lo que a su vez implicó la necesidad de contar con una representación más práctica. De acuerdo con Sánchez (2012), de esta manera cuando se agrupó un determinado número de objetos se hizo una marca distinta que los representaba a todos ellos y este constituyó la base. Se continúa agregando unidades hasta que se alcanza por segunda vez el número base y se agrega otra marca de segunda clase, Así sucesivamente.

Sistemas de numeración

El concepto de sistema alude a un conjunto de elementos que lo conforma, en este caso se refiere a símbolos, reglas y principios que permiten la combinación de los mismos para representar un número (Cardona Valencia, 2015), sin embargo, la manera como se han presentado a lo largo de la historia ha cambiado de acuerdo con Guedj (1998) (citado en

Frediani & Tenorio, 2004) en Giraldo (2014), se hace mención a dos esquemas de sistemas de numeración, la primera representación es como se describe a continuación:

El segundo esquema de clasificación de los sistemas, es como se presenta a continuación: Sistema de numeración aditivo, sistema de numeración híbrido y sistema de numeración de posición.

Sistemas de numeración aditivos

Se refiere a que ciertos símbolos que constituyen la unidad se unen para formar otras cantidades de valor superior, por ejemplo, en el sistema decimal, un conjunto de diez unidades forma la decena, diez decenas forman la centena, diez centenas forman el millar, etc. Por lo tanto:

Los sistemas aditivos son aquellos que acumulan los símbolos de todas las unidades, decenas, como sean necesarios hasta completar el número. Normalmente se pueden poner los símbolos en cualquier orden, aunque no es así en el caso de la numeración romana, donde como regla general los símbolos de la numeración romana se escriben y leen de izquierda a derecha y se ubican de mayor a menor valor.

Han sido de este tipo las numeraciones egipcia, sumeria, hitita, cretense, azteca (de base 20) romana y las alfabéticas de los griegos, armenios, judíos y árabes (Cabrera Martín, 2009).

Número negativo.

Los números negativos, como bien se ha afirmado por algunos investigadores, es un asunto que sigue aún sin resolver en las aulas. Dificultad que se pretende revisar de manera breve desde su origen abarcando descripciones históricas, epistemológicas y sus propiedades. Lo

anterior debido a que en nuestro país y en los establecimientos educativos se aborda este conjunto numérico concretamente en el grado séptimo, y que igualmente como se observa a través de la historia, la enseñanza y aprendizaje de estos números se torna difícil bien sea porque se adolece de abundantes recursos didácticos o la implementación de los mismos con falencias metodológicas por parte del docente. El análisis a través de esta revisión, es tomar conciencia en primer lugar por parte del docente y en segundo lugar hacerles notar a los aprendices las distintas fases por las que atravesaron los denominados números negativos, antes de ser adoptados y acogidos por la mayoría de la sociedad. En resumen, lo que se desea es que esta descripción genere conciencia y valoración de los ingentes esfuerzos desarrollados por la comunidad matemática ya que su uso ha sido de gran contribución para el desarrollo de las distintas ciencias y disciplinas del saber humano.

La naturaleza de los números negativos.

Son los números naturales quienes ocupan el primer lugar de aparición en la mente del hombre como un recurso indispensable para contar, pero el crecimiento de los pueblos y del comercio conllevó a conceptos tales como deuda y crédito. Estos conceptos, a su vez originaron la necesidad de una representación, por ejemplo, no era lo mismo disponer de haberes que de créditos.

De acuerdo con Vélez & Varela (2014), “entonces podríamos decir que, así como de la categoría “contar” nacen los números naturales, de la categoría “crédito y deuda” surgen los números negativos y quedan firmemente explicados por ella; además, derivan algunas de sus propiedades de aquella noción”.

Se afirma que los números positivos y negativos no originaron el comercio y los sistemas financieros de los pueblos de la antigüedad; sino que, por el contrario, el comercio con sus categorías de “contar” y “deuda” genera y origina la categoría de números.

Otra perspectiva de la aparición de los números enteros es la que se remite a las necesidades de la resolución de ecuaciones de la forma $x+3 = 2$ que tiene respuesta $x = -1$, que ya hacía parte del conocimiento desde la antigüedad y que además también se conocían sus resoluciones. Es decir, aparecieron como parte de la estructura de los números naturales y que no fueron una invención del hombre.

Retomando la idea inicial, se ratifica que los negativos tienen como sustento básico la noción de deuda, tienen un origen empírico como los naturales. En el contexto del comercio es práctico asimilar las operaciones con los negativos, por ejemplo: si tengo -4 es porque debo 4 o si tengo $5 + (-5) = 0$ cancelé una deuda; o las operaciones de adición o sustracción como tener -7 y pagar 2 y quedar con un saldo de -5. De la noción de deuda surge el concepto de número negativo y del cero.

Dimensión histórica de los números negativos.

Los números negativos tuvieron un largo proceso para ser acogidos por la comunidad matemática, en este sentido las fuentes escritas dan testimonio de que se les consideraba números absurdos o números deudos.

Según Vélez & Varela (2014), los babilonios no conocían los números negativos, por lo que ignoraban o rechazaban las eventuales soluciones negativas de las ecuaciones cuadráticas. Los griegos tampoco aceptaban los números negativos o imaginarios que se presentaban en sus ecuaciones.

Brahmagupta, en el 628 de nuestra era, considera las dos raíces de las ecuaciones cuadráticas, aunque una de ellas fuera negativa o irracional. De hecho, en su obra es la primera vez que aparece sistematizada la aritmética de los números positivos, negativos y el cero, que según él llamaba los bienes o fortunas, las deudas y la nada.

La notación muy difundida para los números positivos y negativos fue gracias a Stifel. La expansión de los símbolos germánicos (+) y (-), se popularizó con el matemático alemán en el siglo XV, antes se utilizaba la abreviatura p para los positivos y n para los negativos.

De acuerdo con Ninahuanca (s.f), hasta fines del siglo VIII los números negativos no eran acogidos universalmente. Gerolamo Cardano, en el siglo VI denominaba a los números negativos “falsos”, aunque los estudió exhaustivamente. Jhon Wallis, afirma la imposibilidad de su existencia diciendo que esos entes tendrían que ser a la vez mayores que el infinito y menores que cero. Euler es el primero en darles estatuto legal en 1770.

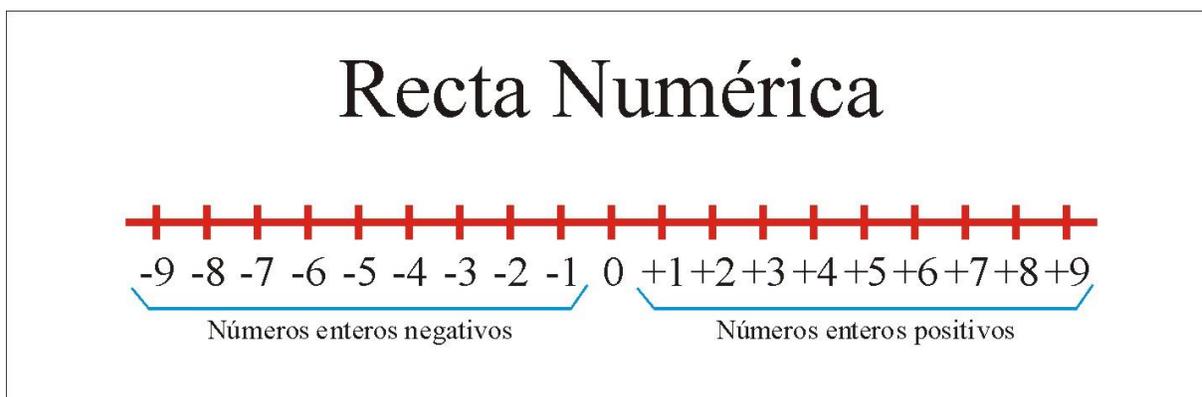
Después de muchos años de rechazo los números negativos gracias a la insistencia de los matemáticos de diferentes épocas lograron integrarse en la jerarquía de los sistemas numéricos y fueron legalizados como números, en el siglo XIX conocido como el siglo de oro para las matemáticas por la amplitud y riqueza de su producción intelectual.

De modo que, los números naturales junto con los negativos formarán luego el conjunto de los números enteros, es decir los números naturales complementados con los negativos. En la figura 4, se puede indicar que:

- Los enteros positivos, se denotan con \mathbb{Z}^+ .
- Los enteros negativos, se denotan con \mathbb{Z}^- .
- El cero no tiene signo, es neutro.

El cero es aquel número entero que no posee ningún signo respectivo, vale decir no es positivo ni negativo; más aún es el nexo entre estos dos.

Figura 4. Recta Numérica



Fuente: http://contenidosdigitales.ulp.edu.ar/exe/matematica1/recta_numerica.jpg

Dimensión epistemológica de los números negativos.

Como se ha visto hasta el momento y en forma reiterada, los números enteros tuvieron que pasar por una larga discusión en la comunidad matemática antes de ser aceptados como objetos matemáticos propiamente dichos. Al realizar el análisis de los números negativos es inevitable incorporar el concepto de obstáculo epistemológico.

Los obstáculos en la Historia de las Matemáticas han sido frecuentes y en particular en los números negativos han sido objeto de permanentes polémicas.

Según Brousseau citado por Cid (s.f),

Califica un obstáculo de epistemológico si se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo. En este caso, el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual.

La noción de obstáculo epistemológico también se concibe como un saber mal apropiado, lo que concuerda con la noción de obstáculo de Bachelard. Al respecto, el concepto de

obstáculo epistemológico es un campo muy amplio y sus discusiones aún perduran, por lo que rebasa a nuestras intenciones en este trabajo.

Algunos obstáculos epistemológicos en la concepción del número entero negativo.

Glaeser (1981), citado en Cid (2000), equipara el obstáculo a dificultad, umbral, síntoma, en estas condiciones, el autor considera que, en la evolución histórica de la noción de número negativo, se pueden considerar los siguientes obstáculos:

- *Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.* Para indicar con este enunciado, el hecho observable en la obra de Diofanto, de que la necesidad de efectuar cálculos algebraicos con diferencias y, en particular, la necesidad de multiplicar dos diferencias, le lleva a enunciar la regla de los signos y, sin embargo, no acepta la existencia de números negativos aislados.
- *Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.* En los trabajos de los matemáticos, Stevin, D'Alembert, Carnot, y posiblemente, Descartes se comprueba que conciben la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones, las “ven” y las tienen en cuenta, pero no pueden aceptarlas como cantidades reales y las justifican diciendo, por ejemplo, que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema.
- *Dificultad para unificar la recta real.* Sobre este particular algunos matemáticos como McLaurin, D'Alembert, Carnot y Cauchy concebían los negativos y los positivos en términos antinómicos: “lo negativo” neutralizaba, se oponía a “lo positivo”, pero era de naturaleza distinta. Se consideraba que la cantidad negativa era tan real como la positiva, pero estaba tomada en un sentido opuesto. Esta heterogeneidad entre

negativos y positivos no facilitaba su unificación en una única recta numérica y, en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente.

- *La ambigüedad de los dos ceros.* Corresponde a la afirmación realizada por Glaeser acerca de las dificultades que se presentaron entre los matemáticos Stevin, McLaurin, D'Alembert, Carnot, Cauchy y, quizá Euler y Laplace para pasar de un cero absoluto o un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente, ya que los matemáticos de esa época consideraban que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran menos que nada.
- *El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas.* La superación de los obstáculos anteriores permite aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa con Hankel en 1867. Glaeser citado en Cid (2000), denomina estadio de las operaciones concretas a una corriente ideológica que tiene sus inicios en los Elementos de Euclides y se caracteriza por suponer que los objetos matemáticos son objetos del mundo físico que han sido suficientemente idealizados para poder insertarlos en un discurso hipotético deductivo.
- *Deseo de un modelo unificador.* Es el deseo, largamente sentido por la comunidad matemática, de encontrar un buen modelo concreto que justifique tanto la estructura aditiva como la multiplicativa de los números enteros y que pueda ser comprendido con relativa facilidad por las personas que están en vía de aprenderlos.

Con los obstáculos anteriormente relacionados de los números negativos solo se asume la estructura aditiva, pero la misma constituye un obstáculo para la estructura multiplicativa.

De este modo, los obstáculos siguen presentes enmarcados entre lo real y lo formal, entendido como la confrontación entre el conocimiento formal de los números y el conocimiento práctico que se posee de ellos como representación de lo real.

Según González (1999) citado por Giraldo (2014), en el contexto de las discusiones sobre los obstáculos que se presentan en el terreno de lo real y lo formal, se estiman los siguientes obstáculos:

- La aritmética práctica. Lo real como obstáculo. Es la concepción de relacionar al número plenamente con la cantidad, creencia que se vio favorecida hasta el siglo XIX: las matemáticas describen y demuestran verdades acerca del mundo real. Pero, la ruptura de esta concepción se presentó con la aparición de las geometrías no euclídeas, el surgimiento del algebra abstracta y el reconocimiento de los enteros como extensión de los números naturales.
- El número como expresión de cantidad. Con la aparición del número entero negativo surge la ruptura de algunas ideas, entre ellas, la idea que costaba a Descartes cuando sostenía que no existen números menores que nada.
- La suma como aumento. La adición se identifica con la acción de agregar una cantidad a otra, por lo que conlleva siempre a aumento.
- La multiplicación como aumento. La concepción de considerar la suma como aumento se traslada para la multiplicación.
- La sustracción como la disminución. La sustracción identificada con la acción de quitar está asociada con la disminución.
- La división como división natural. En los números naturales división se interpreta como reparto o agrupamiento de objetos, esta concepción genera un obstáculo

epistemológico, por no permitir la generalización a la división de números enteros, donde el número negativo deja de ser un objeto concreto.

- El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural. En los naturales, los números van aumentando a medida que se alejan del origen. Lo cual no es igual para los negativos ya que ellos disminuyen cada vez que se alejan del origen.
- Identificación de los símbolos literales con números positivos. En el siglo XVIII Euler simboliza los números negativos con una letra precedida del signo $\ll - \gg$; en $-x$, x representa un número positivo.
- La imposición de lo formal como obstáculo. Los números enteros aparecen en los libros de texto reducidos a un formalismo vacío, que se constituye en un obstáculo y origina errores.

Con la descripción realizada hasta aquí se puede observar que son muchos los obstáculos que se han presentado a través de la historia y se siguen presentando en la actualidad, lo cual constituye un desafío para el docente y para el aprendiz, que a su vez genera una gran conciencia de responsabilidad a la hora de asumir el proceso de enseñanza y aprendizaje porque tal parece que queda nuevamente todo por hacer.

Dimensión matemática de los números negativos.

Corresponde en esta dimensión analizar los aspectos de tipo netamente matemático, es decir, soportando el concepto de número entero negativo bajo la construcción formal de este conjunto numérico, a partir de clases de equivalencias obtenidas a partir de pares de números naturales.

Según Giraldo (2014), la estructura de esta dimensión es como se presenta a continuación:

Se obtienen los números enteros calculando diferencias entre números naturales.

Por ejemplo, $-1 = 3-4$, $-2 = 6-8$, $3 = 8-5$. Esto indica que una de las maneras de representar el número entero negativo -1 es mediante el par $(3,4)$. El problema es que existen muchos pares que sirven para esta representación, por ejemplo, $(10,11)$, $(13,14)$, $(15,16)$.

Se identifican todos los pares, de modo que el -1 venga a ser la clase de todos los pares (a, b) tales que a y b son números naturales y $a-b = -1$.

Se define una relación de equivalencia \sim entre pares ordenados de números naturales como sigue:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Teorema 1.1 La relación \sim en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una relación de equivalencia.

Se puede verificar que:

- I. Es reflexiva ya que $(a, b) \sim (a, b)$ ya que $a + b = b + a$
- II. Es simétrica ya que $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$
- III. Es transitiva ya que si $(a, b) \sim (a_1, b_1)$ y $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Rightarrow (a, b) \sim (a_2, b_2)$

Definición 1.1 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$, conjunto de las clases de equivalencia, se llama conjunto de los números enteros y cada clase de equivalencia se llama número entero.

De esta manera, por notación se tiene que:

$$Z = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim \quad Y \quad [a, b] \text{ para las clases de equivalencia.}$$

$$C_{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x, y) \sim (a, b)\}$$

Así el número -4 puede definirse a través de clases de equivalencia, como se presenta a continuación:

$-4 = C_{(4,8)} = \{(x, y) \in N \times N : (x, y) \sim (4,8)\}$ ya que $4 - 8 = -4$, y así se tiene otro par de ordenados que pertenecen a esta clase de equivalencia, como por ejemplo, $(6,10), (10,14), (12,16)$.

Definición 1.2 suma de números enteros

La operación suma entre números enteros está definida de manera general como:

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b, d)]$$

La adición se efectúa componente a componente de cada clase de equivalencia. Para ejemplificar más esta operación analicemos la siguiente suma de números enteros:

$$(-3) + 7 = 4$$

Para el lector puede o no ser evidente la respuesta, pero aplicando *definición 1.2*, tendremos:

$$(-3) + 7 = [(1,4)] + [(9,2)] = [(1 + 9, 4 + 2)] = [(10, 6)] = 4$$

Definición 1.3 producto de números enteros.

El producto de números enteros se define como:

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)]$$

Veamos un ejemplo de producto entre números enteros:

$$\begin{aligned} (-3) \cdot (7) &= [2,5] \cdot [9,2] = [(2 \cdot 9 + 5 \cdot 2, 2 \cdot 2 + 5 \cdot 9)] = [18 + 10, 4 + 45] \\ &= [28, 49] = 28 - 49 = -21 \end{aligned}$$

Definición 1.4 el valor absoluto de un número entero a se denota como $|a|$ y se define de la siguiente manera:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

De acuerdo con la definición anterior, se puede ilustrar mediante el siguiente ejemplo:

$|3|$, como $3 \geq 0$, entonces por definición de valor absoluto se tiene que $|3| = 3$ mientras que se tiene que $|-5|$, como $-5 < 0$, de acuerdo a la definición de valor absoluto, tenemos:

$$|-5| = -(-5) = 5$$

Como se puede observar, el valor absoluto de un número entero es la distancia desde el origen hasta dichos números, por ello este siempre será positivo o cero.

Las propiedades fundamentales de valor absoluto para $a, b \in \mathbb{Z}$, se pueden sintetizar en los siguientes teoremas:

Teorema 1.2 sean $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene que:

I. $|a| > 0$ si $a \neq 0$ y $|0| = 0$

II. $a \leq |a|$; $-a \leq |a|$

III. $|a| = |-(a)|$

IV. $|ab| = |a||b|$

V. $|a^{-1}| = |a|^{-1} = \frac{1}{|a|}$, $a \neq 0$

VI. *desigualdad triangular*

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Esta desigualdad ocurre solamente cuando $a \geq 0$ y $b \geq 0$ ó $a < 0$ y $b < 0$

Teorema 1.3 si $[(a_1, b_1)] = [(a_2, b_2)]$ y $[(c_1, d_1)] = [(c_2, d_2)]$ entonces se tiene que:

I. $[(a_1, b_1)] + [(c_1, d_1)] = [(a_2, b_2)] + [(c_2, d_2)]$

II. $[(a_1, b_1)] \cdot [(c_1, d_1)] = [(a_2, b_2)] \cdot [(c_2, d_2)]$

Lo anterior es independiente de los representantes, ya que, si tomamos, por ejemplo,

$(-3) + (-2) = -5$, donde los representantes de cada uno son respectivamente $[1,4]$ y $[1,3]$, ahora tomemos como representantes $[2,5]$ y $[5,7]$, de lo que obtenemos:

$$(-3) + (-2) = [2,5] + [5,7] = [2 + 5, 5 + 7] = [7,12] = 7 - 12 = -5$$

De la misma manera se puede realizar el producto, tomando como ejemplo el anterior para el caso de la multiplicación, es decir, $(-3) \cdot (-2) = 6$, donde los representantes respectivamente son $[1,4]$ y $[1,3]$, tomando como representantes a $[2,5]$ y $[5,7]$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (-3) \cdot (-2) &= [2,5] \cdot [5,7] = [2 \cdot 5 + 5 \cdot 7, 2 \cdot 7 + 5 \cdot 5] = [10 + 35, 14 + 25] \\ &= [45,39] = 45 - 39 = 6 \end{aligned}$$

No se propone que el docente imparta estas definiciones en sus clases, lo relevante es que el docente no desconozca este tipo de definiciones de carácter formal, que resuelvan y justifican la razón de que la suma de dos números enteros negativos es la suma de sus valores absolutos y que se obtiene como resultado otro número entero negativo, de la misma manera sirve para explicar las leyes de los signos en el caso del producto.

Teorema 1.3 \mathbb{Z} *con la suma y producto definidos anteriores es un anillo conmutativo, en este sentido se cumple que:*

- I. La suma es asociativa, conmutativa, tiene neutro y cada elemento tiene opuesto aditivo.
- II. El producto es asociativo, conmutativo y tiene neutro; es distributivo con respecto a la suma.

Propiedades de la suma:

- I. Asociativa: $([a, b] + [c, d]) + [e, f] = [a, b] + ([c, d] + [e, f])$

- II. Conmutativa: $[a, b] + [c, d] = [c, d] + [a, b]$
- III. Neutro, es el numero entero $[1,1]$ usualmente se ve como el 0, así se tiene que:
 $[a, b] + [1,1] = [a, b]$
- IV. Opuesto aditivo: el opuesto aditivo de $[a, b]$ es el entero $[b, a]$, ya que $[a, b] + [b, a] = [a + b, b + a] = [1,1]$

Propiedades del producto:

- I. Asociativa: $([a, b] \cdot [c, d]) \cdot [e, f] = [a, b]([c, d] \cdot [e, f])$
- II. Conmutativa: $[a, b] \cdot [c, d] = [c, d] \cdot [a, b]$
- III. Neutro, es el numero $[2,1]$, usualmente lo vemos como 1, así se tiene que
 $[a, b] \cdot [2,1] = [a, b]$
- IV. Distributiva: $[a, b] \cdot \{[x_1, y_1] + [x_2, y_2]\} = [a, b] \cdot [x_1, y_1] + [a, b] \cdot [x_2, y_2]$

De esta manera, se puede establecer que en el conjunto de los números enteros el 0 es el neutro aditivo y el 1 corresponde al neutro multiplicativo. En este sentido si a , así se tiene que:

$$(a) + (-a) = (-a) + (a) = 0$$

Teorema 1.4 sean a, b, c, d números enteros, entonces se cumple las siguientes seis propiedades:

- 1) $b - a$ es el único entero que verifica $(b - a) + a = b$, entonces:

$$x = b - a \leftrightarrow x + a = b$$

- 2) I) $a - (b + c) = a - b - c$

II) $a - (-b) = a + b$

$$\text{III) } a + (b - c) = a + b - c$$

$$3) \quad 0 \cdot a = 0 \quad \text{y} \quad 0 \cdot a = 0$$

$$4) \quad a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

$$5) \quad a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

$$6) \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

Teorema 1.5 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ se verifican las siguientes propiedades:

$$\text{I) } \quad \text{Si } a, b \in \mathbb{N} \rightarrow a + b \in \mathbb{N} \wedge a \cdot b \in \mathbb{N}$$

$$\text{II) } \quad a \in \mathbb{Z} \leftrightarrow a \in \mathbb{N} \vee a = 0 \vee -a \in \mathbb{N}$$

Definición 1.6 si $a, b \in \mathbb{Z}$, se tiene que $a \leq b \leftrightarrow a < b \vee a = b$

Teorema 1.6 la relación \leq es relación de orden total sobre \mathbb{Z} respetuosa de la estructura algebraica de \mathbb{Z} , es decir;

$$\text{I) } \quad x \leq y, \rightarrow x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{Z}$$

$$\text{II) } \quad x \leq y, 0 \leq z \rightarrow xz \leq yz$$

Teorema 1.7 el orden total \leq en \mathbb{Z} coincide en \mathbb{N} con el orden \leq . (\mathbb{N} es el conjunto de los números enteros positivos).

Para el anterior teorema se puede establecer que:

Sea $m = n$, números naturales, entonces se tiene:

$$m = n \text{ En } \mathbb{N} \rightarrow m = n \text{ en } \mathbb{Z}$$

$$m > n \text{ en } \mathbb{N} \rightarrow n = m + p, \text{ algun } p \text{ natural} \rightarrow n - m = p \in \mathbb{N} \rightarrow m < n \text{ en } \mathbb{Z}$$

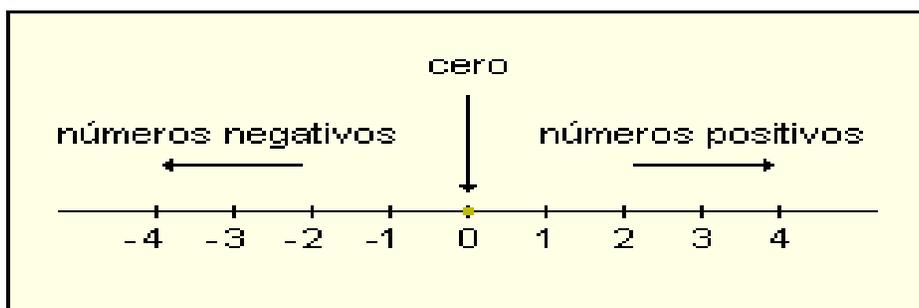
$$\text{Además } n \in \mathbb{N} \leftrightarrow n - 0 = n \in \mathbb{N} \leftrightarrow n > 0$$

Se concluye que \mathbb{N} es el conjunto de los positivos o \mathbb{Z}^+ , es decir, los enteros mayores que cero y negativos o \mathbb{Z}^- corresponde a los enteros menores que cero. De esta manera \mathbb{Z} es la extensión

de \mathbb{N} . A partir de lo anterior se puede establecer la enumerabilidad del conjunto de los números enteros, es decir, que \mathbb{Z} tiene el mismo “número” de elementos que \mathbb{N} .

Una representación sencilla del conjunto de los números enteros, se puede evidenciar en la figura 5, que no es precisamente como par ordenado, es mediante la representación directa en un eje o recta numérica, los positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda.

Figura 5. Representación de los números enteros en la recta numérica



Fuente: <https://www.monografias.com/trabajos79/trabajo-matematica-unidad-dos/image006.gif>

Se concluye entonces que \mathbb{Z} es la unión del \mathbb{N} y el conjunto de los enteros negativos, lo cual es un caso particular de la afirmación que la unión de dos conjuntos enumerables, caso que, se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1.8 *el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros es infinito numerable.*

Demostración:

Como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ entonces \mathbb{Z} es un conjunto infinito. Consideramos la siguiente función biyectiva:

$$h = \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$h(k) = \begin{cases} \frac{-(k+1)^{k/2}}{2} & \text{si } k \text{ es impar} \\ \frac{k}{2} & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

Probemos dicho resultado para los seis primeros números naturales:

$$h(0) = \frac{0}{2} = 0$$

$$h(1) = \frac{-(1+1)}{2} = -1$$

$$h(2) = \frac{2}{2} = 1$$

$$h(3) = \frac{-(3+1)}{2} = -2$$

$$h(4) = \frac{4}{2} = 2$$

$$h(5) = \frac{-(5+1)}{2} =$$

-3

2.5 Competencias matemáticas.

En este componente, lo que se desea es clarificar lo mejor posible el concepto de competencia en términos generales y el mismo concepto en el contexto de las matemáticas, ya que en las comunidades indígenas al hablar de competencia, se está entendiendo como una contienda, y en contraposición se ha argumentado que en los pueblos indígenas no se debe desarrollar una educación para la competencia, sino una educación para la solidaridad, la defensa del territorio, la cosmovisión, la memoria colectiva, la identidad, la ley de origen, autoridad, interculturalidad y unidad en la diversidad, investigación comunitaria y permanente; así como los principios de unidad tierra, cultura y autonomía. Es decir, que el concepto de competencia se le está dando un significado no apropiado, tal como se concibe en los denominados Estándares Básicos de Competencias.

De este modo, el concepto de *competencia* se ha relacionado con el deseo profundo tanto de las autoridades, los docentes, los estudiantes, padres de familia, investigadores, instituciones, entre otros, con la aspiración de brindar una buena Calidad Educativa, concepto éste que igualmente ha sido discutido en los diversos ámbitos y que su análisis aún continúa. No obstante, como lo hemos referido al comienzo nuestro interés es poder comprender los conceptos de Competencia y Estándares y luego la identificación de la estructura de Estándares Básicos de Competencias, en el ámbito disciplinar.

En esta perspectiva, el MEN 2006, Expresa:

Lo que en últimas se busca con el proceso educativo es el desarrollo de un conjunto de competencias cuya complejidad y especialización crecen en la medida en que se alcanzan mayores niveles de educación. La noción de competencia, históricamente referida al contexto laboral, ha enriquecido su significado en el mundo de la educación en donde es entendida como *saber hacer* en situaciones concretas que requieren la aplicación creativa, flexible y responsable de conocimientos, habilidades y actitudes. MEN (2006)

En concordancia con el fragmento anterior, se corrobora que la competencia no está significando una especie de disputa sobre quien sabe más o quien sabe menos, sino como un conocimiento que se adquiere en las escuelas y colegios el cual debe ser usado de manera creativa en la vida cotidiana y que dicho saber perdure por el resto de vida en las personas.

Otro de los conceptos que en nuestros contextos tanto en el aula y en la institución de nuestros ámbitos rurales se discute, es el concepto de *estándares*, sobre el que igualmente se tienen reparos en la medida en que se dice que no debemos responder a resultados de procesos educativos estandarizados, porque estos criterios son impuestos por el sistema capitalista.

En este sentido, el MEN 2006, se refiere al concepto de estándar así: “Un estándar es un criterio claro y público que permite juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad”. Lo cual significa que los estándares constituyen unos referentes comunes que se desean nuestros estudiantes alcancen como logros en conocimientos durante su permanencia en el establecimiento y fuera de él.

Por otra parte, igualmente el MEN 2006, ratifica que: “Los estándares son unos referentes que permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los y las estudiantes en el transcurrir de su vida escolar”

Los Estándares Básicos de Competencias, también se fundamentaron debido a la alta movilidad geográfica de nuestras poblaciones, causadas por muy diversas razones entre las

que se pueden considerar los desplazamientos generados por fenómenos naturales, la violencia y las construcciones de megaproyectos o simplemente por cambio voluntario de domicilio de las familias que hacen que los niños, adolescentes y jóvenes se muevan en distintas regiones del país que a su vez generó la necesidad de contar con unos referentes comunes de calidad educativa de suerte que los aprendices fueran donde fueran no se vieran afectados y se les aceptara en otros establecimientos educativos.

Ahora bien, especificando la noción de competencia matemática, el MEN 20006, afirma: ¿Esta noción ampliada de competencia está relacionada con el *saber qué?*, el *saber qué hacer* y el *saber cómo, cuándo y por qué* hacerlo. Por tanto, la precisión del sentido de estas expresiones implica una noción de competencia estrechamente ligada tanto al hacer como al comprender. Si bien es cierto que la sociedad reclama y valora el saber en acción o saber procedimental, también es cierto que la posibilidad de la acción reflexiva con carácter flexible, adaptable y generalizable exige estar acompañada de comprender que se hace y por qué se hace y de las disposiciones y actitudes necesarias para querer hacerlo, sentirse bien haciéndolo y percibir las ocasiones de hacerlo.

Según el MEN 2006, entre otras, ser matemáticamente competente implica: Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas, utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas, usar la argumentación, la prueba y la refutación, dominar procedimientos y algoritmos matemáticos.

En los establecimientos educativos, generalmente los conjuntos numéricos se presentan secuenciados, empezando con los números naturales, seguido de los números enteros, luego

los números racionales e irracionales, los números complejos, para terminar con los números reales.

En el marco de los Estándares Básicos de Competencias de matemáticas (2006), se concibe el currículo como un eje articulador de tres componentes: Procesos Generales, el contexto y los cinco tipos de pensamiento matemático.

En este sentido, según los Lineamientos Curriculares del MEN (1988) los tipos de pensamientos matemáticos a promover en la enseñanza de las matemáticas y que a su vez se retomaron por los Estándares Básicos de Competencias (2006) se refiere a los siguientes:

- Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos.
- Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos.
- Pensamiento Métrico y Sistema de Medidas
- Pensamiento Aleatorio y Sistema de Datos.
- Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraico y Analíticos.

Para efectos del presente trabajo, los números enteros corresponden al *pensamiento numérico* y *sistemas numéricos*, por lo cual haremos un análisis particular de este concepto.

El conteo, el concepto de número y las relaciones aritméticas como también los sistemas numéricos y sus estructuras hacen parte de este pensamiento, finalmente el pensamiento numérico compone todos los números, naturales, enteros, racionales e irracionales, complejos y reales.

2.5.1 Tecnología Computacional.

Corresponde en esta sección describir los aspectos históricos más relevantes y las definiciones relacionadas de manera específica con los conceptos que se relacionan con mayor frecuencia en el entorno educativo y el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La computación ha recorrido caminos relativamente remotos, hay quienes sostienen que esta ciencia comenzó con la manipulación de artefactos mecánicos como el ábaco, la regla deslizante, la Pascalina, entre otros. Tampoco el desarrollo de esta ciencia se le atribuye a una persona en particular, ya que se origina como el resultado o evolutivo de ideas y realizaciones de otras áreas como la electrónica, la mecánica, los materiales, semiconductores, la lógica, el álgebra y la programación.

Desde el punto de vista de la definición, y sus raíces etimológicas, computación es:

El término computación tiene su origen en el vocablo en latín *computatio*. Esta palabra permite abordar la noción de cómputo como cuenta o cálculo, pero se usa por lo general como sinónimo de informática (del francés *informatique*). De esta manera, puede decirse que la computación nuclea a los saberes científicos y a los métodos. Estos sistemas automatizados de información se consiguen a través de herramientas determinadas que han sido creadas para dicho fin, los ordenadores o computadoras (Pérez porto & Gardey, 2012)

En este campo de la computación o la informática, se relacionan distintas generaciones en el desarrollo de esta ciencia y la misma obedece a la evolución y uso de dispositivos como los tubos de vacío, transistores, circuitos integrados, chips, microchips, etc. Así, se describen las fases: primera generación, segunda generación, tercera generación, cuarta generación y quinta generación.

Tecnologías de la información y la comunicación (TICs) y tecnologías del aprendizaje y del conocimiento (TACs).

Después de una revisión muy general acerca del concepto de la computación y de su desarrollo vertiginoso que indudablemente ha cambiado muchas prácticas en el modo de relacionarse las personas de todo el mundo y haciendo una especie de un gran salto en la historia, es trascendental abordar el uso de las variadas y sofisticadas herramientas que ofrece la tecnología actual, en concreto en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por consiguiente, específicamente se asume estos conceptos en los entornos de la educación.

Peña (2015) en su obra *uso de las TIC en la vida diaria* dice: “Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) son una gran variedad de herramientas, canales y soportes dedicados esencialmente al uso, manejo, presentación, comunicación, almacenamiento y recuperación de información” (Pág. 5)

En los tiempos actuales es inevitable eludir, presentar excusas sobre el desconocimiento y manejo de las innumerables herramientas que ofrece la tecnología y la informática en las actividades del ser humano, ya que las mismas si bien es cierto que tienen reparos por algún sector de la sociedad debido a la contaminación ambiental y los usos inadecuados, también se les reconoce su aporte en el esfuerzo por mejorar la calidad de vida de las personas.

Por otra parte, también es una realidad que no será posible contar con un dominio total del conocimiento y el acceso a las herramientas tecnológicas por una parte de la sociedad, debido a las limitaciones de tipo económico, geográfico, político y cultural. Sin embargo, es evidente que el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, independientemente de si una comunidad puede o no tener acceso a estos servicios, esta dinámica avanza sin retroceso y que además son muchas las herramientas que inclusive ya han quedado obsoletas sin que las personas se hayan enterado, es decir que, ante tantas herramientas incluso, por ignorancia no

se sabe ni siquiera discernir cuales son las mejores. Ante estos cambios tan apresurados en particular en lo que corresponde al proceso de enseñanza y aprendizaje se ha optado por las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento, como una oportunidad para aprovechar críticamente la enorme oferta del mercado, en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En síntesis, hay una exagerada lista de herramientas tecnológicas de la comunicación y de la información, pero que es necesario discernir y enfatizar como utilizar de la mejor manera posible toda la amplia gama que ofrecen los adelantos de la ciencia y la tecnología, así se acuñan las TACs.

“Las TAC van más allá de aprender meramente a usar las TIC y apuestan por explorar estas herramientas tecnológicas al servicio de la adquisición de conocimiento” (Lozano, 2011)

En concordancia con las bondades de las TICs y las TACs, en particular y en el presente proyecto de investigación se vincularán los Softwares libres para valorar su alcance en el mejoramiento de la comprensión de los conocimientos de desarrollo matemático.

En el mercado de las aplicaciones o Softwares se identifican muchos, por ejemplo, hoja de cálculo, Derive, Cabri, Open Office.org, SAGE y GeoGebra.

GeoGebra es la aplicación que se prioriza en esta investigación y su uso se implementará durante la investigación y su futura aplicación como herramienta que permitirá un proceso de enseñanza y aprendizaje, dinámico, interactivo, participativo y colaborativo, en aras del aprendizaje significativo de los estudiantes. (Apéndice A)

3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Introducción

Durante la investigación, se ha tratado de analizar las distintas estrategias que se requieren para que los estudiantes de grado 7° de las instituciones educativas, puedan inferir el tema de los números enteros, lo cual, se manifiesta a través del diseño metodológico las fases de trabajo que se incorporan para dar una validación de nuevas estrategias didácticas a través de las TIC y las TAC, de manera que tanto el docente como el estudiante, pueda desarrollar un proceso interactivo autónomamente, comprendiendo los procesos que se llevan a cabo con las fases de iniciación, diseño, construcción, ejecución y validación de las actividades que se proponen.

3.2 Descripción general del estudio

3.2.1 Enfoque: mixto.

El enfoque mixto constituye la combinación del enfoque cualitativo y cuantitativo para aprovechar las bondades de cada uno de esos enfoques, con el fin de definir un camino que ofrezca la mayor certeza posible en el cumplimiento de los objetivos propuestos en el presente trabajo.

“La meta de la investigación mixta no es reemplazar la investigación cuantitativa ni a la investigación cualitativa, sino utilizar la fortaleza de ambos tipos de investigación, combinándolas y tratando de minimizar sus debilidades potenciales” (Hernández Sampieri, 2014, pág. 532)

Por otra parte, se definió el tipo de investigación descriptiva, porque lo que se va a realizar y en concordancia con el desarrollo de los objetivos es registrar, describir, analizar, interpretar las causas del bajo desempeño de los estudiantes de grado séptimo.

“Su objetivo es describir el estado, las características, los factores y los procedimientos presentes en fenómenos y hechos que ocurren en forma natural, sin explicar las relaciones que se identifiquen” (Lerma González, 2016, pág. 43)

3.2.2 Tipo de estudio: Descriptivo.

El propósito es describir el estado, las características y los factores que han dado lugar al bajo rendimiento académico en torno a la comprensión de los números enteros. Para lo cual se empleará las herramientas que ofrece la estadística, entrevistas escritas con preguntas abiertas tanto a los docentes como a los estudiantes y el desarrollo de cuestionarios de saberes previos por los alumnos.

3.2.3 Diseño cuasi experimental:

Dado que no habrá grupo control, sino que se trabajará con todos los grados séptimos del año escolar 2018 de ambos establecimientos, comprende la definición de diseño cuasi experimental.

3.2.4 Estructura metodológica

Para el desarrollo de los objetivos tanto el general como los específicos se realizarán las siguientes actividades:

Fase 1

Para el primer objetivo específico:

Se hará una revisión de los registros de valoración de los estudiantes de grado séptimo entre los años escolares 2015, 2016 y 2017, buscando evidenciar el bajo desempeño de los alumnos en lo correspondiente al estudio de los números enteros; mediante el análisis de los denominados parámetros estadísticos.

De igual modo se realizará una entrevista estructurada con al menos cinco preguntas escrita a tres docentes encargados del área de matemáticas de grado séptimo para que describan sobre la metodología, recursos didácticos, pedagógicos y el uso de las TICs y las TACs.

Se entrevistará como mínimo a cinco estudiantes del grado séptimo entre niños y niñas mediante un formato con al menos cinco preguntas que se refieran a los siguientes temas: comprensión del concepto de números enteros, operaciones y propiedades y resolución de problemas.

También se aplicará un taller diagnóstico de los números enteros que será desarrollado por los estudiantes.

Fase 2

Para el segundo objetivo específico:

Se implementarán guías de trabajo interactivas apoyadas con el Software Geogebra, donde el estudiante podrá desarrollar, verificar, afianzar, el concepto, operaciones y propiedades, y la resolución de problemas, actividades que se registrarán digital y fotográficamente, en los dos establecimientos.

Fase 3

Para el tercer objetivo específico:

Se aplicará un cuestionario de evaluación de impacto de la percepción que genera en los estudiantes del sector rural y urbano, la implementación de los Applet en el contexto de las TIC y las TAC

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1 Introducción

En esta sección se presenta el análisis del rastreo de las calificaciones de los estudiantes de grados séptimos de las dos instituciones durante los tres últimos años mediante la descripción de histogramas y polígonos de frecuencias y los criterios fijados por el decreto 1290 de 2009, que establece una escala de valoración con los conceptos de desempeño bajo, básico, alto y superior. También se relata, el resultado de las encuestas tanto a estudiantes como a docentes acerca del tema de los números enteros y el análisis de un taller de competencias. En el mismo orden se narran los resultados del diseño y ejecución de las llamadas guías interactivas o Applet que vincula las fases de: diagnóstico, conceptualización de los números enteros y sus operaciones.

4.2 Análisis de diagnóstico

En concordancia con el orden de los objetivos específicos planteados, para empezar se realizó un análisis de los registros de evaluación de los estudiantes entre los años 20015 a 2017, correspondiente al primer periodo de cada año escolar por cuanto es en ese periodo donde se incorpora el tema de los números enteros en la mayoría de establecimientos educativos del territorio nacional. Para el análisis de los registros de evaluación se utilizó las herramientas de la estadística descriptiva mediante la construcción de histogramas y polígonos de frecuencias. Apéndice B

El sistema de evaluación y promoción de los establecimientos educativos cuentan con una escala de valoración, en concordancia con el decreto 1290 de 2009, expedido por el MEN que establece los siguientes desempeños, facultando a las instituciones emplear criterios de tipo icónico o numéricos.

Por lo tanto las instituciones educativas, analizadas tienen adoptaron la siguiente escala:

Desempeño Bajo = 1.0 a 2.9)

Desempeño Básico = 3.0 a 3.9

Desempeño Alto= 4.0 a 4.9

Desempeño Superior = 5.0

En el año 2015 se analizó el comportamiento de las evaluaciones de 19 estudiantes y se observa que tan solo un estudiante alcanzó el nivel de desempeño alto. Siendo el desempeño básico el más predominante .No hubo desempeño superior.

En el año 2016 se revisó el comportamiento de las evaluaciones de 25 estudiantes, aquí se evidencia que tan solo un estudiante alcanzó el nivel de desempeño alto. Sigue predominando el desempeño básico. Nuevamente no hay desempeño superior.

En el año 2017 se realizó un análisis a 24 estudiantes. En esta ocasión predomina el desempeño bajo, lo cual hace más alarmante la decadencia por el aprendizaje de los números enteros. De nuevo se evidencia que tan solo un estudiante alcanza el nivel de desempeño alto. Pocos están en el desempeño básico, lo cual tampoco es adecuado.

Ahora, se describe el comportamiento de las calificaciones de los estudiantes de la Institución Educativa Nuestra Señora de los Dolores de Quinchía Risaralda.

En el año 2015, se revisó las calificaciones de 31 estudiantes del grado séptimo B donde se observa que predomina el desempeño básico. No hay desempeño superior. Pocos tienen desempeño alto y los demás quedan con desempeño bajo.

Durante el año 2016, se revisó el desempeño de 64 estudiantes correspondiente a los grados, séptimo A y séptimo B. Predomina el desempeño bajo y básico. Realmente no se observa desempeño superior.

En el año 2017, se estudió el desempeño de 93 estudiantes, correspondiente a tres grados, séptimo A, séptimo B y séptimo C. Tristemente se evidencia una vez más que prevalece de nuevo el desempeño bajo. Séptimo B presenta el comportamiento más débil en torno al proceso de aprendizaje. En los tres grados tan solo dos estudiantes alcanzaron el nivel de desempeño superior.

Comparando el comportamiento de los desempeños de los dos establecimientos, uno ubicado en el sector rural y de tendencia indígena y otro ubicado en el sector urbano de tendencia campesina o mestiza, geográficamente muy distantes las dos instituciones y de contextos muy distintos, se evidencia que no son muy grandes las diferencias lo cual indica que en definitiva hay serios problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números enteros.

Continuando este orden de ideas, con el fin de evidenciar lo mejor posible las dificultades que se presentan en torno al problema expuesto, también se adelantó la aplicación de seis entrevistas escritas a docentes de las dos instituciones que orientan las matemáticas de grado séptimo y veinte estudiantes también de ambas instituciones.

Al respecto, los docentes de la Institución Educativa Juana Tama de Mosoco, en el orden de los interrogantes del cuestionario, sus respuestas se pueden sintetizar del siguiente modo: La vinculación de los ejemplos concretos es un aspecto común a la hora de introducir el concepto de los números enteros y algo de historia sobre el mismo conjunto numérico. Sobre los recursos didácticos empleados se evidencia que en general siguen siendo los mismos que se han utilizado tradicionalmente, como el tablero, la exposición, la recta numérica, el concepto

de valor absoluto, números opuestos, sin embargo ya se advierte el uso de audiovisuales aunque de modo muy leve. Con relación a la metodología, los profesores manifiestan que en términos generales la metodología es buena, aunque están conscientes de que en los tiempos actuales la incorporación de las TICs y las TACs, potencia y mejora el proceso de enseñanza y aprendizaje. Consideran, que la operación más compleja de explicar y asimilar por el aprendiz, indudablemente es la adición. Finalmente manifiestan que a algunos estudiantes se les observa poco interés, no sólo en el saber matemático sino en otras disciplinas.

Por otra parte al revisar las respuestas de los estudiantes de la Institución Educativa Juan Tama de Mosoco y en el orden de las preguntas , se notó que sus comentarios fueron poco concordantes con lo que se les interrogó ; sin embargo se puede resumir así: Los ejemplos concretos son adecuados para iniciar el tema de los números enteros, no acertaron sobre los conceptos de signos predicativos y de operación , consideran que la operación más compleja es la división y paradójicamente dicen que la metodología es buena. Para finalizar, se evidencia así que no les quedó claro la conceptualización de los números enteros, ya que tan solo por tocar un ejemplo, un estudiante pensaba que los números enteros eran muy grandes.

Los docentes de la Institución Educativa Nuestra señora de los Dolores compartieron algunas inquietudes que se pueden generalizar de la siguiente manera, en orden de las preguntas de la encuesta: El abordaje inicial de la enseñanza de los números enteros parte de situaciones concretas relacionando conceptos como entradas, salidas, desplazamientos a la derecha, a la izquierda e incorporan el concepto de valor absoluto. Con relación al uso de recursos didácticos, la mayoría manifiesta que emplean usualmente la pizarra basándose en la correspondencia biunívoca de los números enteros con la recta numérica. Afirman que metodológicamente es un proceso adecuado y que se está en permanente aprendizaje tanto por parte del docente como del aprendiz. Muy pocos docentes afirmaron el empleo de las guías

interactivas. Corroboran que las operaciones más complicadas a ser enseñadas y asimiladas son la adición y la sustracción. Afirman también, que observan poca receptividad del estudiante, más bien notan en ellos una antipatía.

Análisis de la encuesta:

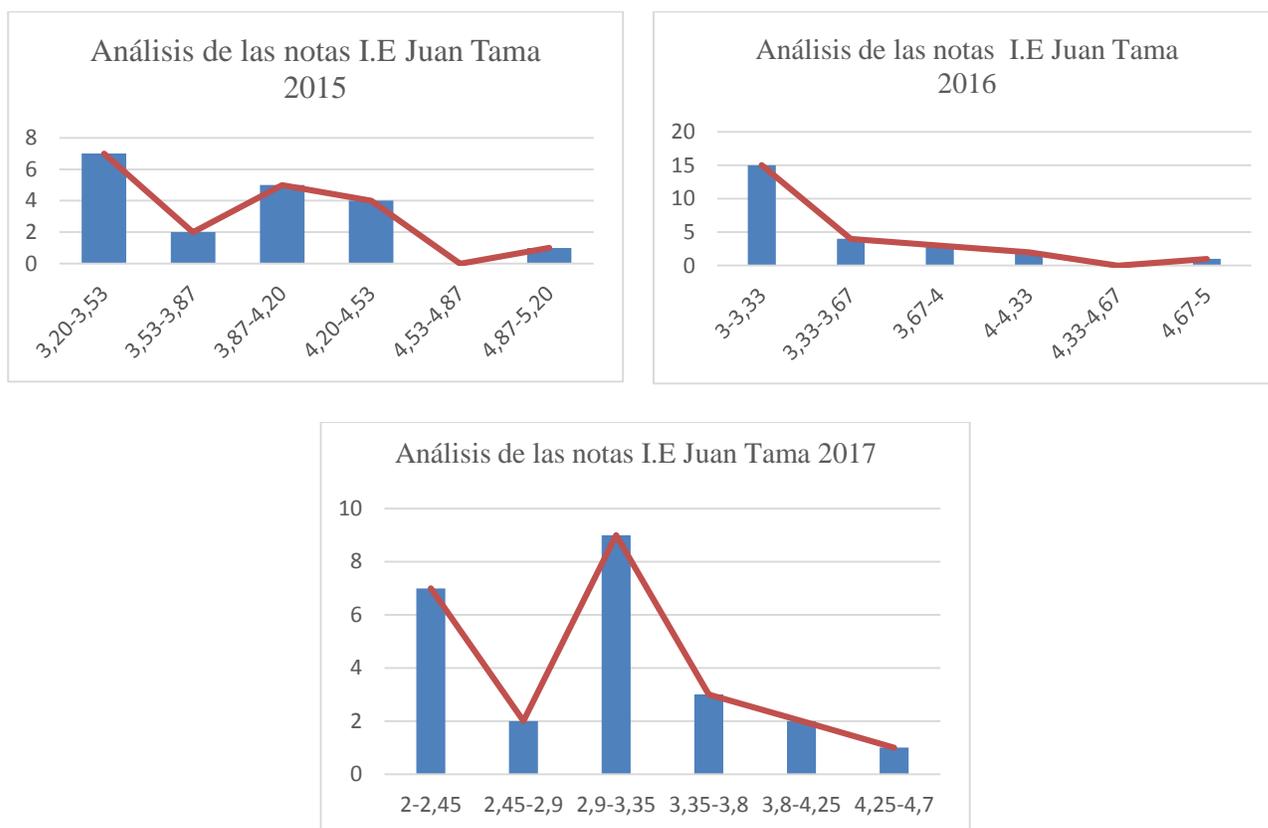
Al aplicar las encuestas a los estudiantes y revisar las respuestas, igualmente se pueden generalizar algunos puntos en común, así, al ser preguntados sobre qué se imaginan cuando se les habla de los números enteros, hallamos que la mayoría de las respuestas carecen de claridad aunque obviamente tienen una mínima idea, se nota difícil contar con una definición apropiada, por cuanto algunos afirman que los números enteros son los que van del uno al diez, otros dicen que son los números negativos y positivos, algunos estudiantes sostienen que son aquellos números que contienen a los racionales, etc. Manifiestan que los ejemplos concretos sí ayudan a las denominaciones de cantidades positivas y negativas y que igualmente distinguen los signos predicativos de los signos de operación, pero le conceden poca importancia. En cuanto a las operaciones, estiman que es la adición y la sustracción que más les cuesta. También en términos generales opinan que la metodología del docente es buena.

De igual manera, se aplicaron diez (10) talleres exploratorios a los estudiantes de ambos establecimientos, cinco por cada institución.

El taller se diseñó con doce (12) actividades que incluyó aspectos generales y sencillos de ejemplos concretos, las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división y eliminación de signos de agrupación. Cada actividad se valoró con un punto, es decir; una actividad acertada se valoró con un punto, dos actividades acertadas, dos puntos etc. En la figura 6, Así, en la Institución educativa Juan Tama, de los cinco talleres tan solo dos estudiantes acertaron con 5,5 puntos del total de actividades, porcentualmente equivalente al

45,8% de las actividades. Los demás estudiantes no alcanzaron el desarrollo de un número significativo de las actividades, ratificándose así, las dificultades que existen en la enseñanza y aprendizaje de los números enteros.

Figura 6. Análisis comparativo de las notas I.E Juan Tama 2015, 2016, 2017

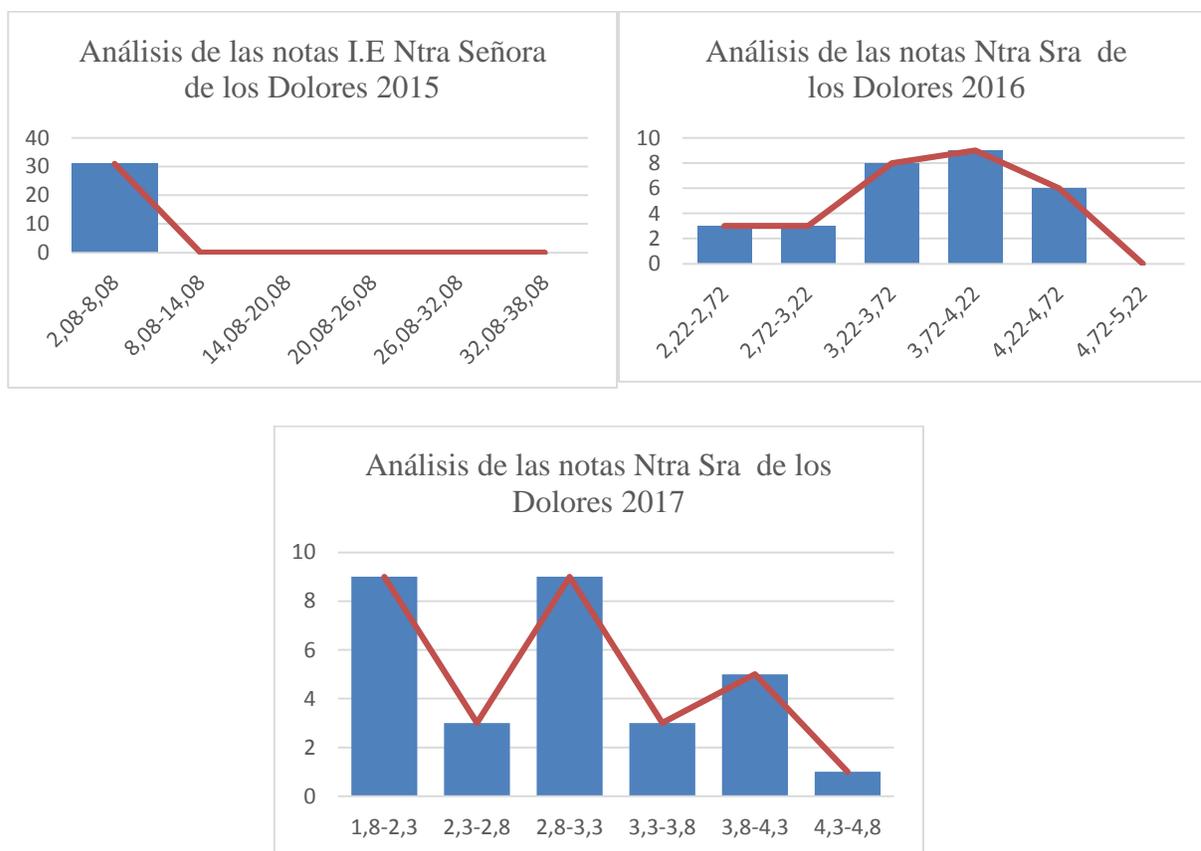


Fuente: Construcción propia 2018

En la figura 7, se pueden analizar los resultados comparativos de los años 2015, 2016 y 2017 de la Institución Educativa Nuestra Señora de los Dolores, con relación al desarrollo del taller de competencias se observó que presentan diversas falencias, ya que primero no se toman el tiempo para leer, no identifican bien los signos predictivos y los signos de operación, al momento de representar operaciones como la suma y resta del conjunto de números enteros en la recta numérica estos no grafican bien el proceso, por otro lado no aplican bien la ley de los

signos y resuelven las operaciones sin tener en cuenta sus reglas , algunos de ellos al momento de hablarles de pérdidas o ganancias no identifican bien cuales valores son positivos o negativos.

Figura 7. Análisis de las notas I.E Ntra Sra de los Dolores 2015, 2016, 2017



Fuente: Construcción propia 2018

Continuando en el orden del desarrollo de los objetivos específicos y en cumplimiento de diseñar y aplicar las guía interactivas, en la fase diagnóstica, se construyó un Applet bastante atractivo, que constó a su vez de unas actividades, textos e imágenes llamativas que se relacionan en el siguiente orden: Una imagen de apertura agradable, un problema descriptivo de un caracol en vista gráfica 1, con la opción de ser comprobada la resolución correcta

mediante la frase: ¡Muy bien! o inténtalo de nuevo si la respuesta no es apropiada, e igualmente el estudiante tuvo la oportunidad de manipular en vista gráfica 2, mediante los botones sube y baja el desplazamiento del caracol sobre la pared y corroborar así, la resolución del problema propuesto.

Luego mediante el botón continuar, abre nuevas vistas y encuentra un texto describiendo la historia de los números enteros y el surgimiento de los mismos como una necesidad del ser humano, texto que se corrobora con una imagen llamativa de un nómada comparando objetos y el número de animales.

En figura 8, se puede ver el desarrollo de la aplicación por parte de los estudiantes, que por un lado evidencia la activa participación y el interés que les genera operar con la ayuda del computador y la aplicación y por otra parte el trabajo en un ambiente estilo juego, donde los estudiantes sin percatarse de ello, se introducen a los conceptos de los números enteros.

Figura 8. Registro fotográfico Prueba Diagnóstica



Fuente: construcción propia (2018)

Así, la actividad que sigue, se llama la rana saltarina, la cual de igual forma consta de un texto, con la posibilidad de vincular la respuesta correcta y de nuevo sentir la satisfacción de la frase : ¡Muy bien! o inténtelo de nuevo, en el caso de que el estudiante no acierte. Lo interesante del juego es que la rana se desplaza mediante los botones avanzar o retroceder en una especie de recta numérica y que igualmente permite ratificar la solución adecuada del problema.

Luego el estudiante al avanzar en el Applet, encuentra un problema denominado el tesoro escondido, que mediante el botón llamado “animar”, se pone en movimiento en las direcciones izquierda, abajo, derecha e izquierda hasta que el personaje denominado pirata halla el tesoro. Todo esto es muy divertido y así se notó en el estudiante a la hora de manipular el juego propuesto.

El Applet continúa con una nueva actividad denominada “poniendo orden”, la cual consiste en que el problema le plantea al estudiante recorrer unas ciertas distancias tanto a la derecha como a la izquierda, para recoger unos objetos, sobre una recta numérica y finalmente con la posibilidad de que el estudiante de un like, aprobando su gusto o disgusto por las actividades de la aplicación.

El segundo Applet, que es la guía de la conceptualización en sí de los números enteros, consta de cuatro actividades que son: los presaberes con un problema que plantea el desplazamiento de un ascensor que sube y baja, el desarrollo central del tema que consta de un texto y una recta numérica explicando la relación biunívoca de los números enteros con la recta, un ejercicio de completar números con sus respectivos signos en una recta según sea el caso donde el estudiante al hacerlo bien es estimulado con una viñeta que le indica que está

bien, una recta numérica indicando las cantidades negativas y positivas donde al estudiante se le plantea llenar unos pequeños recuadros y al hacerlo bien se le estimula con una carita feliz y si se equivoca le sale una imagen indicando preocupaciones y finalmente una actividad complementada con una imagen que indica niveles de profundidad a los que se encuentran unos pequeños peces dentro del mar y alturas sobre el mismo indicadas con una isla y unas palmas. Los recuadros se completan en el e texto y si se hacen correctamente el estudiante es estimulado con una carita feliz y si por el contrario, el estudiante se equivoca, aparece un emoticón indicando tristeza.

El tercer Applet, consiste en el desarrollo de las operaciones con los enteros y consta de siete actividades además de unas presentaciones agradablemente diseñadas al comienzo y al final.

El Applet, abre con una presentación de niños que tienen en la parte superior los principales signos de las operaciones y con un título muy atractivo invitando a operar con los enteros. La actividad con la que inicia es el concepto de valor absoluto explicado de manera breve y lo esencial, que se corrobora con el desplazamiento de una persona sobre la recta numérica una distancia de tres espacios tanto a la izquierda como a la derecha desde un punto llamado referencia que viene a ser el origen o el punto cero (0), y al completar el recuadro del texto, el estudiante es compensado con las frases muy bien o inténtelo de nuevo, según sea el caso, la actividad que sigue es la operación de la adición en una pizarra y si el estudiante acierta le sale una viñeta indicando la aprobación y caso contrario no sale nada, estos ejercicios van siempre acompañados de un texto breve y bien explicado y con ejemplos, en seguida se presenta la actividad de la sustracción y el procedimiento es similar a la adición, la actividad que sigue es la multiplicación y como ya se ha reiterado estas prácticas van siempre con un texto y unos

ejemplos bien explicados y además con una imagen en colores sobre la ley de los signos, el estudiante opera y si el procedimiento es correcto igualmente le sale una viñeta aprobando la respuesta y si el estudiante está equivocado, no sale nada, la operación de la división es similar al de la operación de la multiplicación e igualmente se presenta la ley de los signos, continúa un problema titulado Nairomán, , que consiste en una bicicleta que desciende y asciende unas pendientes y se le plantea al estudiante si las los valles y las cimas se anulan, crecen o decrecen , por lo que el estudiante tiene la función de completar un recuadro el cual lo estimula con las frases muy bien o inténtelo de nuevo, según sea el caso y finalmente se le presenta al estudiante dos problemas, que igualmente le dan la opción de llenar recuadros y ser estimulado con las frases que se han empleado con frecuencia en estos Applet, es decir muy bien o inténtelo de nuevo. La presentación final invita al estudiante a dar un like o desaprobar, según sea de su agrado o no.

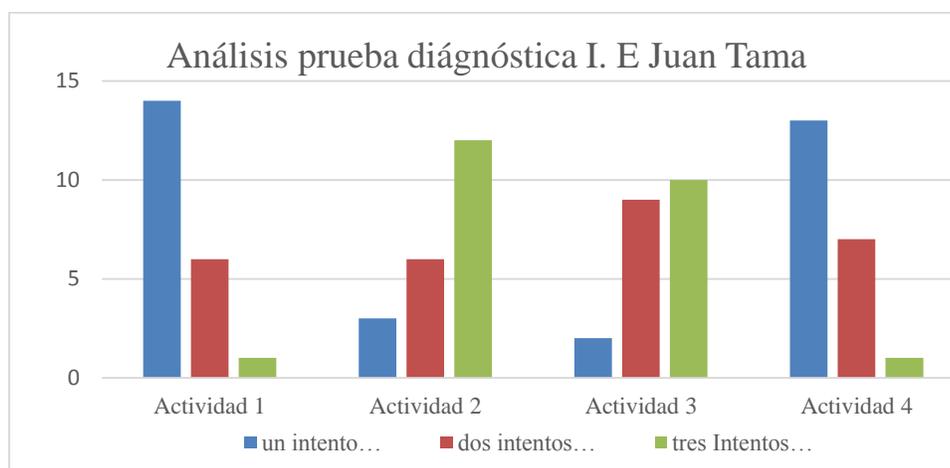
4.3 Análisis de instrumentos aplicativos en el software geogebra.

El primer análisis se hace a la prueba diagnóstica que está dada para que el estudiante deduzca la temática de números enteros, sin necesidad de dar el concepto inicialmente. En la figura 9, se puede observar los resultados obtenidos por 21 estudiantes de grado séptimo, de la Institución Educativa Juan Tama de Mosoco, municipio de Páez en zona rural, territorio indígena.

En la actividad uno, se puede evidenciar en detalle los siguientes resultados, 14 estudiantes resolvieron el problema con un intento y equivale a desempeño alto, 6 estudiantes lo hicieron en segundo intento y corresponde a desempeño medio y 1 estudiante lo resolvió en tres intentos que equivale a desempeño bajo. En la actividad dos, 3 estudiantes resolvieron el problema con un intento y equivale a desempeño alto, 6 estudiantes lo hicieron con dos

intentos y corresponde a desempeño medio y 12 estudiantes lo realizaron con tres intentos lo que corresponde a desempeño bajo. En la actividad tres, 2 estudiantes resolvieron el problema con un intento y equivale a desempeño alto, 9 alumnos lo realizaron con dos intentos y corresponde a desempeño medio y 10 estudiantes lo resolvieron con tres intentos lo que corresponde a desempeño bajo. En la actividad cuatro, 13 estudiantes resolvieron el problema con un intento y equivale a desempeño alto, 7 estudiantes lo realizaron con dos intentos y corresponde a desempeño medio y 1 estudiante resolvió el problema con tres intentos lo que corresponde a desempeño bajo.

Figura 9. Análisis Prueba Diagnóstica I.E Juan Tama



Fuente: Construcción propia (2018)

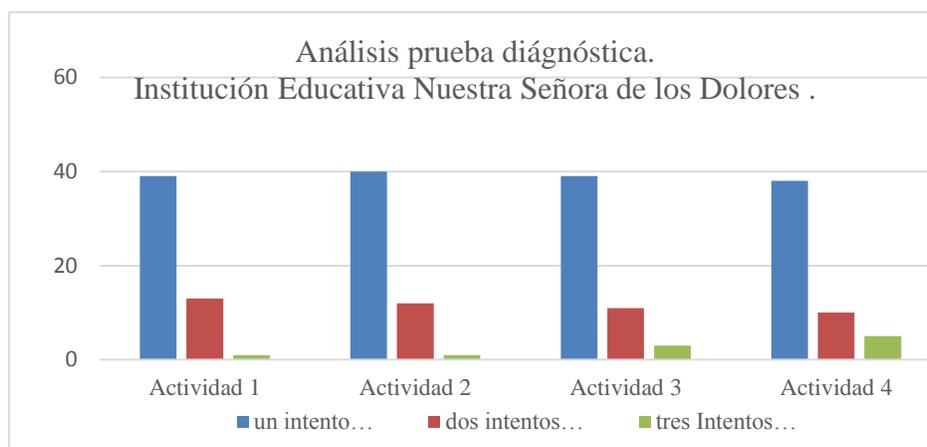
En la figura 10, se puede observar la participación de 53 estudiantes de todos los grados séptimos de la Institución Educativa Nuestra Señora de los Dolores del municipio de Quinchía en zona urbana.

En esta institución, en la actividad uno se pueden observar los siguientes resultados: 39 estudiantes resolvieron el problema con un intento que corresponde a desempeño alto, 13

estudiantes realizaron el problema en dos intentos y equivale a desempeño medio y 1 estudiante lo realizó con tres intentos que corresponde a desempeño bajo.

En la actividad dos, 40 estudiantes resolvieron el problema en un intento y equivale a desempeño alto, 12 estudiantes realizaron el problema en dos intentos que corresponde a desempeño medio y 1 estudiante resolvió el problema en tres intentos lo que equivale a desempeño bajo. En la actividad tres, 39 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento y equivale a desempeño alto, 11 estudiantes lo lograron con dos intentos y corresponde a desempeño medio y 3 estudiantes lo realizaron con tres intentos lo que corresponde a desempeño bajo. En la actividad cuatro, 38 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento lo que equivale a desempeño alto, 10 estudiantes lo resolvieron el problema con dos intentos y corresponde a desempeño medio y 5 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos que corresponde a desempeño bajo.

Figura 10. Análisis Prueba Diagnóstica I.E.Nuestra Señora de los Dolores.

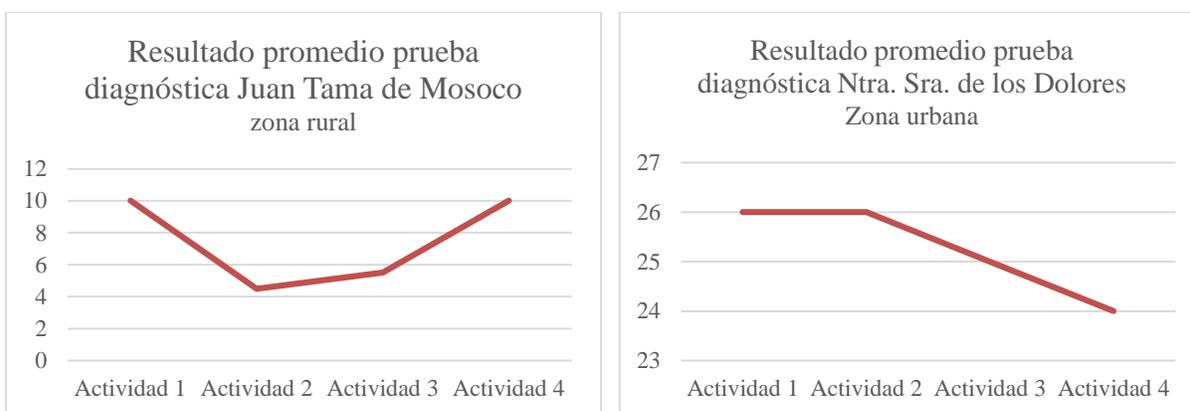


Fuente: Construcción Propia (2018)

Haciendo una comparación entre las dos instituciones educativas, donde una de ellas pertenece a la zona rural e indígena y la otra a la zona urbana, se pretende hacer un análisis a través de promedios

para la actividad diagnóstica, la cual se ve reflejada en la figura 11. En la actividad 1, los estudiantes de ambos colegios comprenden conceptos de direccionalidad arriba – abajo, indispensable en el plano cartesiano. En la actividad 2, el colegio de la zona urbana reconoce mejor la direccionalidad horizontal con el ejercicio de la rana, con conceptos básicos como avanzar o retroceder. El comportamiento de la actividad tres es similar a la anterior. En la actividad cuatro mejoran los desempeños tanto en la zona rural como en la zona urbana respecto del movimiento con relación n al punto de referencia u origen.

Figura 11. Comparación de resultados de promedio zona rural y zona urbana.



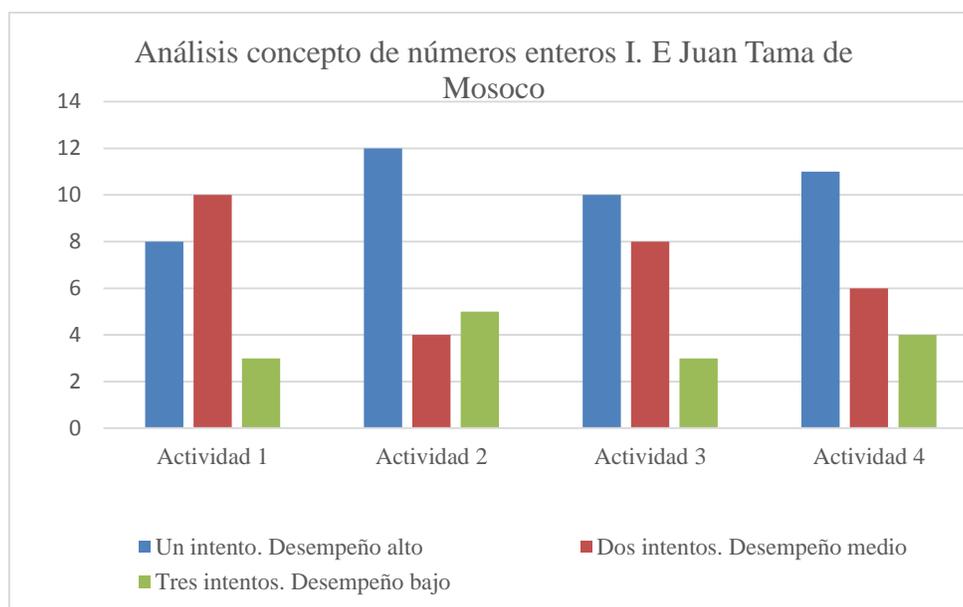
Fuente: Construcción Propia (2018)

Siguiendo en el orden que se formularon los objetivos específicos, a continuación se presenta la descripción del segundo Applet, que se desarrolló en la institución educativa Juan tama de Mosoco, con la participación de 21 estudiantes en zona rural indígena. Figura 12.

En la actividad uno, 8 estudiantes resolvieron el problema en un solo intento y corresponde a desempeño alto, 10 estudiantes lo realizaron con dos intentos y equivale a desempeño medio y 3 estudiantes lo lograron con tres intentos lo que corresponde a desempeño bajo. En la actividad dos, 12 estudiantes resolvieron el problema en un solo intento lo que corresponde a desempeño alto, 4 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos lo que equivale a desempeño medio y 5 estudiantes lo resolvieron con tres intentos lo que significa desempeño bajo. En la actividad tres, 10 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento lo que equivale a desempeño alto, 8 estudiantes

resolvieron el problema con dos intentos lo que equivale a desempeño medio y 3 estudiantes lo resolvieron con tres intentos y corresponde a desempeño bajo. En la actividad cuatro, 11 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento y corresponde a desempeño alto, 6 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos y corresponde a desempeño medio y 4 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos lo que corresponde a desempeño bajo.

Figura 12 . Análisis concepto de números enteros



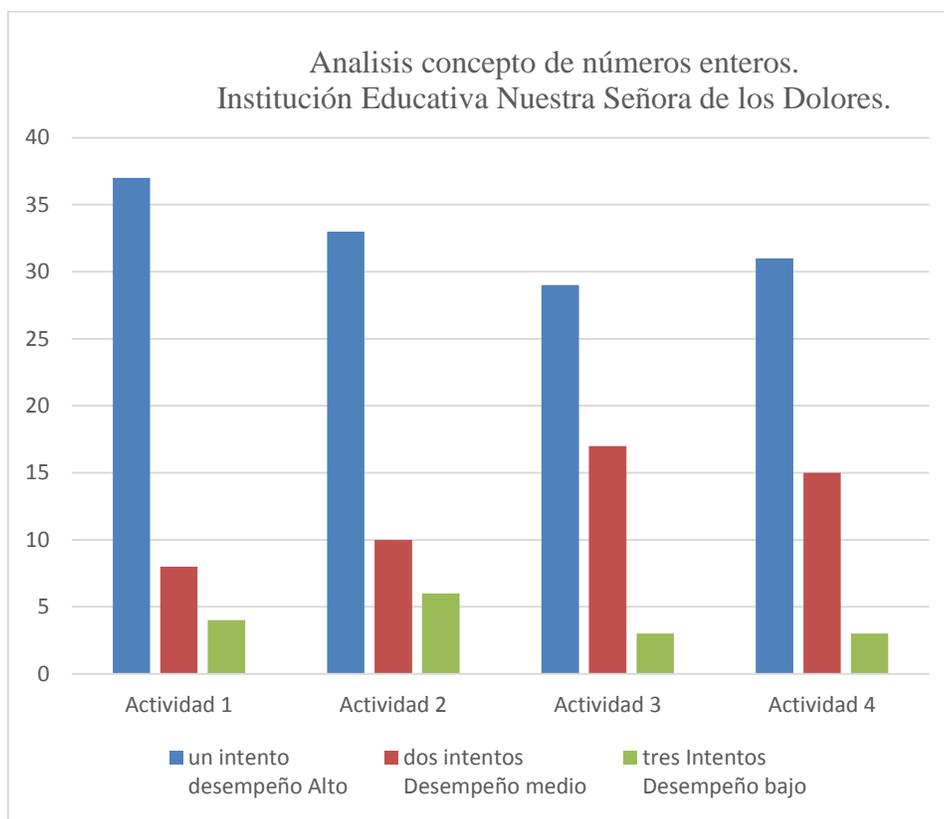
Fuente: Construcción propia (2018)

Ahora se revisa el comportamiento de los resultados del segundo Applet, aplicación en la cual participaron 49 estudiantes de los tres grados séptimos de la institución educativa Nuestra Señora de los Dolores del municipio de Quinchía zona urbana. Figura 13.

En la actividad uno, 37 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento lo que corresponde a desempeño alto, 8 estudiantes lo resolvieron con dos intentos y corresponde a desempeño medio y 4 estudiantes lo resolvieron con tres intentos, lo que corresponde a desempeño bajo. En la actividad dos, 33 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento lo que corresponde a desempeño alto, 10 estudiantes resolvieron el problema con dos

intentos lo que significa desempeño medio y 6 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos, lo que corresponde a desempeño bajo. En la actividad tres, 29 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento lo que significa desempeño alto, 17 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos lo que corresponde a desempeño medio y 3 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos, lo que equivale a desempeño bajo. En la actividad cuatro, 31 estudiantes resolvieron el problema con un intento lo que significa desempeño alto, 15 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos lo que significa desempeño medio y 3 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos lo que equivale a desempeño bajo.

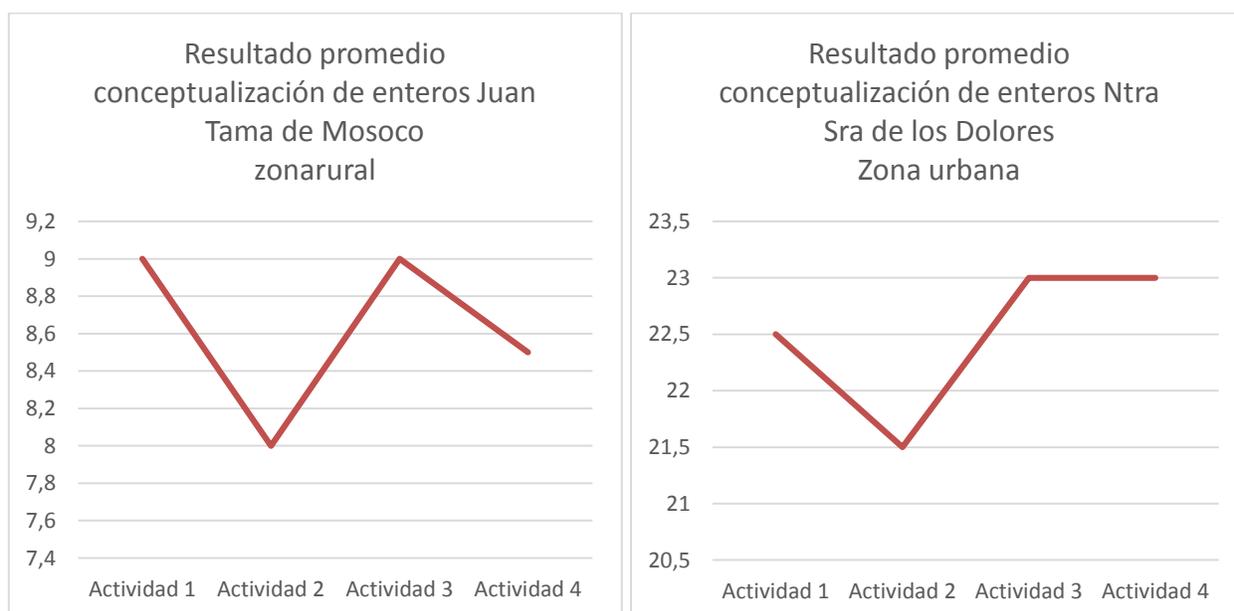
Figura 13. Análisis concepto de número enteros I.E Nuestra Señora de los Dolores



Fuente: Construcción propia (2018)

Realizando una comparación de los dos establecimientos educativos uno ubicado en zona rural indígena y otro en zona urbana, se desea comparar cómo son los desempeños en lo relacionado con la conceptualización de los números enteros. En la actividad uno los estudiantes de ambas instituciones presentan desempeño alto, lo cual es positivo. En la actividad dos la tendencia del desempeño alto es la misma para las dos instituciones ya que con cierta facilidad ubicaron las cantidades con sus respectivos signos en la recta numérica. En la actividad tres, el comportamiento de los resultados es equivalente a la hora de comprender las cantidades mayores y menores y finalmente en la actividad cuatro los resultados siguen teniendo características similares, a la hora de asimilar cantidades que en este caso están señaladas bajo el mar y sobre el mar, generando así en el estudiante comprensión sobre la necesidad de emplear números que representan cantidades positivas y negativas. Figura 14.

Figura 14 Comparación de resultados promedio conceptualización de resultados zona rural y zona urbana.



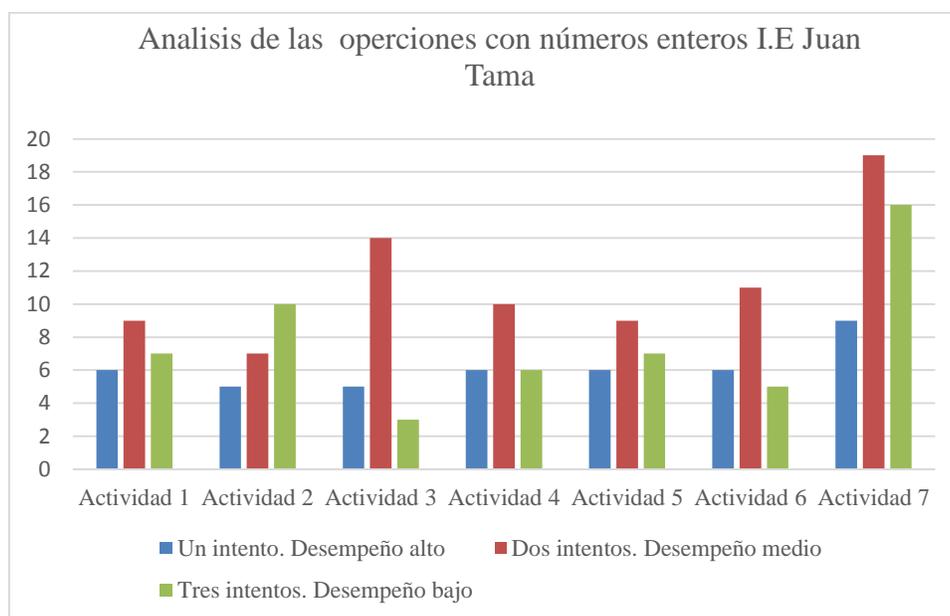
Fuente: Construcción propia

En el desarrollo del tercer Applet, en la institución educativa Juan Tama de Mosoco, participaron 22 estudiantes y a continuación se relacionan los resultados. Figura 15.

En la actividad uno, 6 estudiantes resolvieron el problema con solo un intento y corresponde a desempeño alto, 9 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos lo que corresponde a desempeño medio y 7 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos que equivale a desempeño bajo. En actividad dos, 5 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento y corresponde a desempeño alto, 7 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos lo que significa desempeño medio, 10 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos y equivale a desempeño bajo. En la actividad tres, 5 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento lo cual significa desempeño alto, 14 estudiantes realizaron el problema con dos intentos que significa desempeño medio y 3 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos lo que corresponde a desempeño bajo. En la actividad cuatro, 6 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento que corresponde a desempeño alto, 10 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos lo cual significa desempeño medio y 6 estudiantes resolvieron el problema mediante tres intentos que equivale a desempeño bajo. En actividad cinco, 6 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento que equivale a desempeño alto, 9 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos lo cual significa desempeño medio y 7 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos que corresponde a desempeño bajo. En la actividad seis, 6 estudiantes resolvieron el problema con solo un intento que corresponde a desempeño alto, 11 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos y significa desempeño medio y 5 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos, que equivale a desempeño bajo. En la actividad siete se planteó dos problemas, por lo tanto teóricamente se duplica el número de estudiantes, así, 9 estudiantes resolvieron los dos

problemas con un solo intento lo que corresponde a desempeño alto, 19 estudiantes los resolvieron con dos intentos lo que corresponde a desempeño medio y 17 estudiantes resolvieron los problemas con tres intentos, lo que significa desempeño bajo.

Figura 15 Operaciones con los números enteros



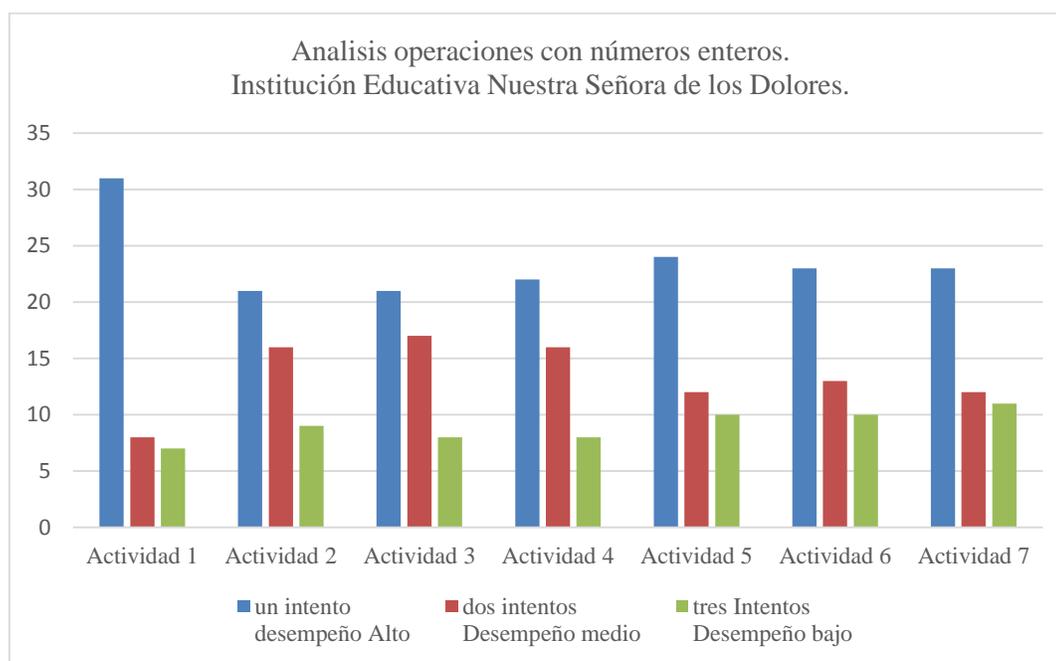
Fuente: construcción propia (2018)

A continuación se presentan los resultados de la institución educativa Nuestra Señora de los Dolores, donde participaron 49 estudiantes. Figura 16.

En la actividad uno, 31 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento, lo que corresponde a desempeño alto, 8 estudiantes realizaron el problema con dos intentos y corresponde a desempeño medio y 7 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos, lo que corresponde a desempeño bajo. En la actividad dos, 21 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento y corresponde a desempeño alto, 16 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos que equivale a desempeño medio y 9 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos, lo cual corresponde a desempeño bajo. En la actividad tres, 21

estudiantes resolvieron el problema con un intento y corresponde a desempeño alto, 17 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos que equivale a desempeño medio y 8 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos, que corresponde a desempeño bajo. En la actividad cuatro, 22 estudiantes realizaron el problema con un solo intento y se relaciona con desempeño alto, 16 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos y equivale a desempeño medio y 8 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos que se relaciona con desempeño bajo. En la actividad cinco, 24 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento y se relaciona con desempeño alto, 12 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos y se relaciona con desempeño medio y 10 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos, que corresponde a desempeño bajo. En la actividad seis, 23 estudiantes resolvieron el problema con un solo intento y corresponde a desempeño alto, 13 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos y corresponde a desempeño medio y 10 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos que se relaciona con desempeño bajo. En la actividad siete, 23 estudiantes resolvieron el problema con un intento y corresponde a desempeño alto, 12 estudiantes resolvieron el problema con dos intentos y se relaciona con desempeño medio y 11 estudiantes resolvieron el problema con tres intentos y significa desempeño bajo.

Figuran 16. Análisis de las operaciones con números enteros

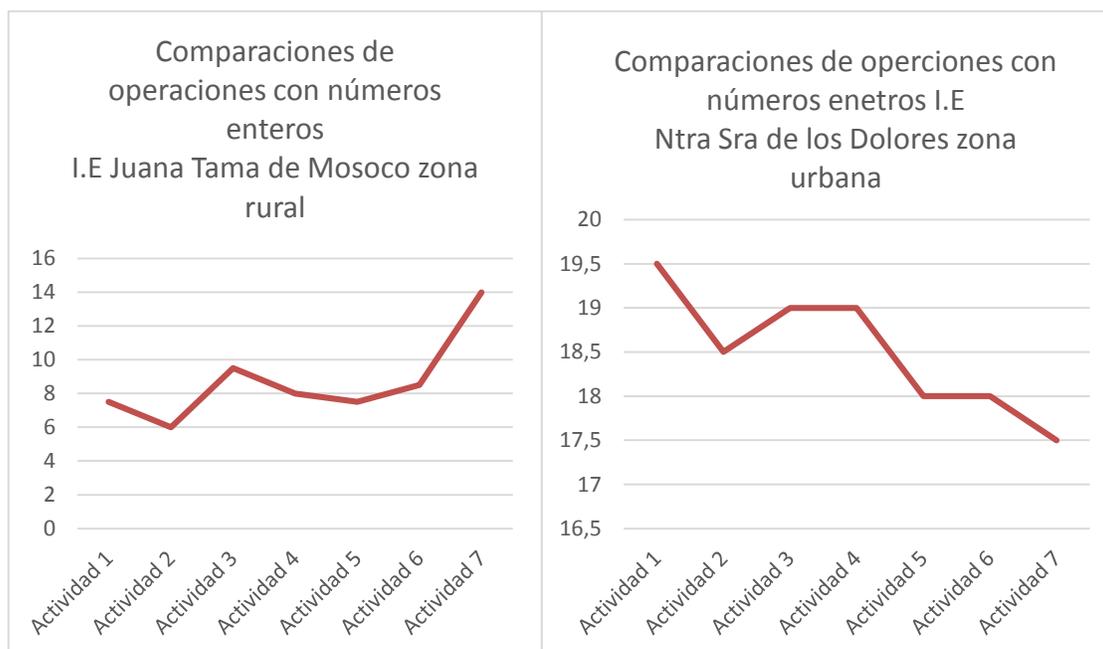


Fuente: Construcción propia (2018)

Comparando los desempeños entre los dos establecimientos, figura 17, uno en zona rural e indígena y otro en ubicado en zona urbana, en la actividad uno, la mayoría de estudiantes de la zona rural se ubican en desempeño medio, mientras que los de la zona urbana se posicionan en desempeño alto, a la hora de conceptualizar el valor absoluto. En la actividad dos, en la zona rural, la mayoría de estudiantes obtiene un desempeño bajo, mientras que la mayoría de estudiantes de la zona urbana se posicionan en desempeño alto, en lo relacionado a la adición de los números enteros. En la actividad tres, la mayoría de los estudiantes de la zona rural, alcanzan un desempeño medio, mientras que la mayoría de los estudiantes de la zona urbana obtienen desempeño alto, en lo correspondiente a la sustracción de los números enteros. En la actividad cuatro, la mayoría de los estudiantes de la zona rural obtuvieron desempeño medio y la mayoría de estudiantes de la zona urbana, obtuvieron desempeño alto, con respecto a la multiplicación. En la actividad cinco, la mayoría de estudiantes de la zona rural obtuvieron desempeño medio y la mayoría de estudiantes de la zona urbana, alcanzaron

desempeño alto, con respecto a la división. En la actividad seis y siete, el desempeño es similar, a los anteriores resultados.

Figura 17. Comparaciones de operaciones con números enteros



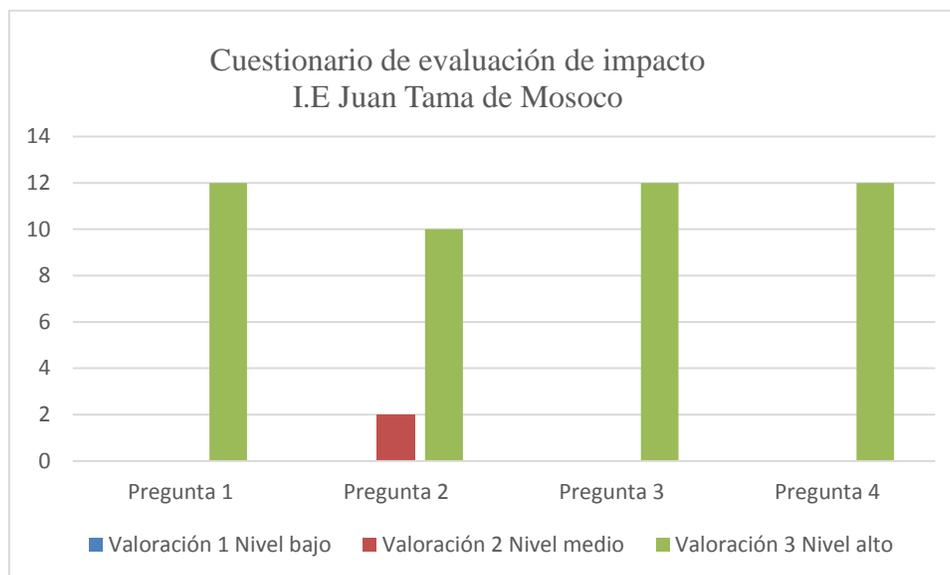
Fuente: Construcción propia (2018)

En concordancia con la realización del objetivo específico tres, se aplicó un cuestionario de evaluación de impacto a 12 estudiantes escogidos al azar de la institución educativa Juan Tama de Mosoco y 5 estudiantes igualmente escogidos al azar de la institución educativa Nuestra Señora de los Dolores. El cuestionario consta de cuatro preguntas y tres niveles de valoración. Apéndice C.

Los estudiantes de la institución educativa Juana Tama de Mosoco justificaron sus respuestas manifestando que las actividades les agradó, las comprendieron, se divirtieron, les gustaron, fueron comprensibles y les pareció fácil la asimilación del proceso de aprendizaje de los números enteros. En síntesis en la escala de valoración bajo, medio y alto, se observa que

la gran mayoría de estudiantes valoraron las actividades en nivel alto, lo cual se corrobora con la figura 18.

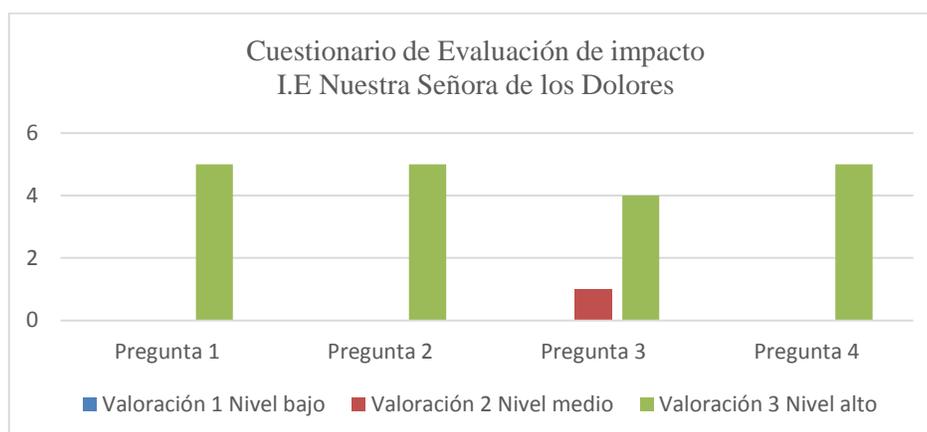
Figura 18. Cuestionario de evaluación de impacto



Fuente: Construcción propia (2018)

Los estudiantes de la institución educativa Nuestra Señora de los Dolores, manifiestan que también les agradó inmensamente, las actividades apoyadas con las guías interactivas, en sus opiniones expresan diciendo que son “son súper chéveres” y también dicen que salir de los textos a una nueva metodología de aprendizaje ayuda a una mejor comprensión de los temas. En este establecimiento, también la gran mayoría de estudiantes valoraron las actividades con nivel alto, cuyos resultados se evidencian en la figura 19.

Figura 19. Cuestionario de evaluación de impacto



Fuente: Construcción propia (2018)

5. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

5.1 Introducción

Finalmente, en este capítulo se presentan las conclusiones, recomendaciones y sugerencias del trabajo investigativo, teniendo presente que el trabajo se desarrolló en dos contextos muy diferentes entre sí, no solo por estar distantes geográficamente, sino también por su idiosincrasia, un establecimiento educativo en la zona rural e indígena y otro ubicado en la zona urbana de población mestiza que hizo del trabajo algo enriquecedor a la hora de comparar los resultados y verificar las potencialidades de cada contexto.

5.2 Respuestas a las preguntas investigativas

5.2.1. Respuesta a la pregunta central

¿Cómo Fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números enteros, haciendo uso de las TIC y las TAC en estudiantes de grado séptimo en las instituciones educativas Juan Tama de Mosoco y Nuestra Señora de los Dolores, municipio de Páez departamento del Cauca y municipio de Quinchía departamento de Risaralda?

El diseño, la implementación y la evaluación de los resultados de las aplicaciones o Applet en el contexto de las Tecnologías de la Información y la Comunicación TIC y las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento TAC, en estudiantes de grado séptimo tanto en la zona rural como en la zona urbana en los procesos de aprendizaje y enseñanza, se observó una notable mejoría, en los procesos de saberes previos, conceptualización y resolución de problemas con el conjunto de los número enteros; corroborándose de este modo que desde la perspectiva teórica del aprendizaje por descubrimiento los estudiantes a la hora de manipular instrumentos atractivos hacen del aprendizaje un proceso más autónomo.

5.2.2 Respuestas a las preguntas auxiliares

¿El uso de la tecnología computacional fortalece los procesos de enseñanza y aprendizaje de las operaciones con los números enteros?

Tanto los antecedentes como los resultados de la presente investigación, dan fe en que la tecnología computacional es una herramienta que fortalece enormemente los procesos de la enseñanza y el aprendizaje por cuanto el estudiante lo hizo con gran motivación debido a que tuvo la oportunidad de manipular textos, imágenes y desarrollos mentales, a la hora de la obtener las respuestas correctas.

¿La implementación de la tecnología computacional ayuda a superar los obstáculos epistemológicos que se presentan en los estudiantes a la hora de operar con los números enteros?

Aseverar que con el uso de la tecnología computacional, se superaron los obstáculos epistemológicos sería muy prematuro, ya que es a través de un largo proceso que se podrían superar estos hechos, porque aunque se mejoren los conceptos queda mucho terreno por

recorrer todavía, ya que las dificultades provienen de muy distintos factores o solo del aspecto cognitivo, sino otros factores de tipo social, cultural y económico que influyen negativamente en todo el proceso educativo.

¿El uso de la tecnología computacional contribuye en la comprensión científica que implica el estudio de los números enteros?

La comprensión científica del conjunto de los números enteros es otro proceso que implica un largo y paulatino caminar con los estudiantes y habría que diseñar actividades que evidencien los problemas que surgen a la hora de resolver ecuaciones de primer grado y de segundo grado y de cómo ellos dieron origen a otro conjunto numérico, denominado los números complejos. En definitiva también es aventurado afirmar que se comprende científicamente a los números enteros.

¿La incorporación de la tecnología computacional resuelve las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del número entero?

En gran parte la tecnología computacional resuelve las dificultades de los procesos de enseñanza y aprendizaje del conjunto de los números enteros, lo cual indica que si el uso de estas herramientas se hace con frecuencia y debidamente planificadas las guías didácticas, indudablemente se obtendrán resultados satisfactorios.

¿Las falencias en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las operaciones de los números enteros es la carencia de herramientas tecnológicas o las deficiencias metodológicas?

Las deficiencias en los procesos de enseñanza y aprendizaje del conjunto de los números enteros, no solo se debe a las falencias de metodológicas y a la falta de herramientas

computacionales, sino a muchos otros factores, sin embargo, para responder al interrogante aquí planteado, consideramos que la carencia de equipamiento, el desconocimiento de la existencia de softwares matemáticos y su aplicación, infraestructura apropiada, influye negativamente en el proceso de aprendizaje. Como tampoco se niega las posibles falencias del docente en su proceso metodológico a la hora de abordar los números enteros. En resumen las falencias se deben en mayor o menor grado a las falencias metodológicas y carencia computacional adecuada.

5.3 Conclusiones generales del trabajo

El trabajo de grado que se realizó en las dos instituciones educativas, en zona rural y zona urbana, sobre la enseñanza y aprendizaje del conjunto de los números enteros, mediante la aplicación de las guías interactivas con el uso de geogebra permitió establecer las siguientes conclusiones:

- ❖ El proceso de rastreo y análisis de las calificaciones de los años 2015,2016 y 2017 y la aplicación de encuestas a docentes y estudiantes y la solución de talleres de saberes previos, reflejó las falencias sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del conjunto de los números enteros, en los dos establecimientos.
- ❖ La aplicación de las guías interactivas diseñadas mediante la aplicación de geogebra en el contexto de las TIC y las TAC como herramienta computacional, permitió la participación activa del estudiante en concordancia con el aprendizaje por descubrimiento en la medida en que pudo constatar respuestas analíticas y la verificación geométrica.
- ❖ Se observó que a los estudiantes les llamó la atención las guías interactivas , lo cual les permitió un proceso de aprendizaje agradable y atractivo por cuanto pudieron

interpretar los textos explicativos, ver imágenes y sus movimientos que se relacionaban con el tema y la comprobación a través de respuestas como muy bien o inténtelo de nuevo.

- ❖ Analizando los resultados de la ejecución de las guías interactivas se observó que en el primer Applet, las tendencias son similares tanto en la zona rural como en la zona urbana. En el segundo Applet la zona urbana repunta mientras que la zona rural queda un tanto rezagada y ocurre lo mismo en el tercer Applet o de las operaciones. En definitiva, a la zona urbana le va mucho mejor.
- ❖ No quedan dudas de que la tecnología computacional mejora, potencia los conceptos, la solución de operaciones y problemas, sin embargo no resuelve todas las dificultades por cuanto son muchos los factores que inciden en un proceso de enseñanza de calidad.

5.4 Sugerencias para próximas investigaciones

- ❖ Los procesos investigativos no deben quedar en los anaqueles, sino que deben ser continuos y tener aplicación e innovación para que generen aportes y sirvan de referentes en la toma de decisiones adecuadas por los establecimientos educativos.
- ❖ En un proceso investigativo se requiere que desde el comienzo se tenga muy claro cada una de las fases y sus actividades y además conocer bien las normas APA, para evitar posibles plagios por desconocimiento.

Referencias

Aguilar M. José Luis, Alonso L. Mercedes, Arriaza M. Juan Carlos, Cortina V. María Luisa.

(s.f). *www.juntadeandalucia.es*. Recuperado el 5 de 10 de 2015, de

<http://www.juntadeandalucia.es/educacion/webportal/abaco-portlet/content/aca52fcb-f247-4c4b-88b6-690486023ca3>

Cabrera Martín, M. (24 de 11 de 2009). *"LOS DISTINTOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN*.

Obtenido de REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS

EDUCATIVAS:

https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Número_24/MARIA%20DEL%20CARMEN_%20CABRERA%20MARTIN_1.pdf

Cabrera Martín, M. (24 de 11 de 2009). *"LOS DISTINTOS SISTEMAS DE*

NUMERARACIÓN". Obtenido de REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y

EXPERIENCIAS EDUCATIVAS:

https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Número_24/MARIA%20DEL%20CARMEN_%20CABRERA%20MARTIN_1.pdf

Cabrera Martín, M. (24 de 11 de 2009). *"LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN"*. Obtenido de

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS:

https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Número_24/MARIA%20DEL%20CARMEN_%20CABRERA%20MARTIN_1.pdf

Cardona Valencia, K. (2015). *Enseñanza - aprendizaje del sistema de numeración decimal, regularidades y características, y relaciones numéricas a través de una secuencia*

didáctica. Obtenido de UNIVERSIDAD DE ANTIOQUI Facultad de Educación:

<http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1913/1/JC0982Katerine.pdf>

Casado, S. (s.f.). Obtenido de <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/SISTNUM.html>

Casado, S. (s.f.). *LOS SISTEMAS DE NUMERACION A LO LARGO DE LA HISTORIA*.

Obtenido de LOS SISTEMAS DE NUMERACION A LO LARGO DE LA

HISTORIA: <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/SISTNUM.html>

Casado, S. (s.f.). *LOS SISTEMAS DE NUMERACION A LO LARGO DE LA HISTORIA*.

Obtenido de LOS SISTEMAS DE NUMERACION A LO LARGO DE LA

HISTORIA: <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/SISTNUM.html>

Casado, S. (s.f.). *LOS SISTEMAS DE NUMERACION A LO LARGO DE LA HISTORIA*.

Obtenido de <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/SISTNUM.html>

Franco Dorian M., Osorio G. Paula A. (06 de 2011). Desarrollo del pensamiento lógico a través de técnicas visuales. *Desarrollo del pensamiento lógico a través de técnicas visuales*. Manizales, Colombia.

G.Polya. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

García de Cossio, J. (14 de 5 de 2015). *Lo que implica saber "Contar"*. Obtenido de Apoyo

Pedagógico: <http://propuestas-didacticas.blogspot.com/2015/05/>

García S. B., M. J. (2012). <http://cvi.mes.edu.cu>. Recuperado el 2015, de Pedagogía

Universitaria, 17(1),:

<http://cvi.mes.edu.cu/peduniv/index.php/peduniv/article/viewFile/9/10>

Hernández Sampieri, R. (2014). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill Education.

León Olga L., Calderón Dora I., & Orjuela Manuel. (2009). *www.cultura-sorda.eu*. Recuperado el 5 de 10 de 2015, de http://www.cultura-sorda.eu/resources/Leon_Calderon_Orjuela_Relacion_lenguaje_matematicas_didactica_sistemas_numeracion_aplicaciones_poblacion_sorda_2009.pdf

Lerma González, H. (2016). *Metodología de la Investigación*. Bogotá: ECOE EDICIONES.

libre, W. L. (02 de 12 de 2010). <https://es.wikipedia.org/wiki/Quinch%C3%ADa>. Obtenido de <https://es.wikipedia.org/wiki/Quinch%C3%ADa>

Lori, M. (05 de 05 de 2015). *Matemática y semiótica en el aula: un punto de vista necesario*. Obtenido de *Matemática y semiótica en el aula: un punto de vista necesario*: <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/iori/Matema%CC%81tica%20y%20semio%C%81tica%20en%20el%20aula-%20un%20punto%20de%20vista%20necesario.pdf>

Lozano, R. (12 de 01 de 2011). *B.3 De la TIC a las TAC: tecnologías del aprendizaje y del conocimiento*. Obtenido de <https://recyt.fecyt.es/index.php/ThinkEPI/article/viewFile/30465/16032>: <https://recyt.fecyt.es/index.php/ThinkEPI/article/viewFile/30465/16032>

Maca , D. (Junio de 2016). *La Enseñanza de los Número enteros Un Asunnto sin Resolver en las Aulas*. Obtenido de <http://revistasum.umanizales.edu.co>: <http://revistasum.umanizales.edu.co>

Pérez porto & Gardey, J. (2012). *Concepto de computación*. Obtenido de

<https://definicion.de/computacion/>: <https://definicion.de/computacion/>

Polya, G. (1965). *Cómo resolver y plantear problemas*. México: Editorial Trillas.

Polya, G. (1995). *Cómo plantear y resolver problemas* . México: Trillas.

Santos Trigo, L. (1997). *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el*

Aprendizaje de las Matemáticas. Obtenido de Ciidet:

<http://www.redined.mec.es/oai/indexg.php?registro=008200020127>

Woolfolk, A. (2014). *PSICOLOGÍA EDUCATIVA*. México: PEARSON.

Zapatera, C. &. (Abril de 2014). *Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación*

de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria. Obtenido de

<http://www.scielo.br/pdf/bolema/v28n48/04.pdf>:

<http://www.scielo.br/pdf/bolema/v28n48/04.pdf>

Apéndices

Apéndice A. El GeoGebra.

Abánades, Botana, Escribano y Tabera (2006) afirman que GeoGebra es un software matemático interactivo para educación secundaria con funcionalidades para el estudio de la Geometría, el Algebra y el Cálculo.

Por un lado, GeoGebra es un sistema de geometría dinámica, es decir permite realizar construcciones geométricas planas que a posteriori pueden modificarse dinámicamente. Por otra parte, se pueden introducir ecuaciones y coordenadas directamente. Así, GeoGebra tiene la potencia de manejar variables vinculadas a números ofreciendo un repertorio de comandos propios del análisis matemático, aptos para tareas como identificar puntos singulares de una función.

Estas dos perspectivas caracterizan a GeoGebra: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa.

Desde la perspectiva histórica, GeoGebra surgió en el año 2001 como el trabajo de fin de máster en Educación Matemática en la universidad de Salzburgo (Austria) de Markus Hohenwarter.

Se suponía que iba a ser una herramienta menor de uso personal, pero se reconoció en 2002 con el premio de la academia europea de software (EASA) en la categoría de matemáticas y en el 2003 el premio al mejor software académico austriaco. Según el propio Markus, se vio obligado a continuar con el proyecto que se convirtió en el tema central de su tesis doctoral en la misma universidad.

Apéndice B. Entrevista a docentes



REPÚBLICA DE COLOMBIA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTAL CAUCA RESGUARDO INDÍGENA DE MOSOCO – PÁEZ
INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN TAMA MOSOCO
Resolución No. 08313 de 26-10-2012
CODIGO DANE 21951700075401 RUT 900266120-2

TÍTULO: Entrevista al docente titular de grado séptimo, sobre la enseñanza y aprendizaje de los números enteros.

Docente: A Fecha:

Hora:

Lugar: Institución Educativa Juan Tama de Mosoco, municipio de Páez departamento del Cauca.

INTRODUCCIÓN: la presente entrevista se aplica al único docente del establecimiento en mención, encargado de la orientación de clases de matemáticas en el grado séptimo durante el año escolar 2018. Esta herramienta hace parte de uno de los instrumentos de la metodología para explorar cualitativamente las percepciones que posee el docente con el fin de afianzar, corroborar y evidenciar las causas del bajo rendimiento a que han dado lugar los estudiantes de grado séptimo en el aprendizaje de los números enteros.

Objetivo: Conocer la metodología y los recursos didácticos que utiliza el docente en la enseñanza de los números enteros.

1. ¿Cuál es la forma inicial de abordar el concepto de los números enteros?

2. ¿Qué recursos didácticos y estrategias utiliza a la hora de explicar los números enteros?

3. ¿Considera que la metodología empleada por usted, es apropiada para afianzar el concepto de los números enteros?

4. ¿Qué operaciones se le dificultan al estudiante entender mejor? |

5. ¿Qué percibe usted de las actitudes de los estudiantes a la hora de trabajar con el conjunto de los números enteros?



REPÚBLICA DE COLOMBIA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
 DEPARTAMENTAL CAUCA RESGUARDO INDÍGENA DE MOSOCO – PÁEZ
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN TAMA MOSOCO
 Resolución No. 08313 de 26-10-2012
 CODIGO DANE 21951700075401 RUT 900266120-2

TÍTULO: Entrevista al estudiante de grado séptimo año escolar 2018, sobre el aprendizaje de los números enteros

Estudiante: A

Fecha:

Hora:

Lugar: Institución Educativa Juan Tama de Mosoco, municipio de Páez departamento del Cauca.

INTRODUCCIÓN: con el desarrollo de esta entrevista se desea saber cuál es la percepción del estudiante frente al aprendizaje de los números enteros, qué importancia le concede, qué opina sobre la metodología del docente y fundamentalmente conocer si está consciente que asume un nuevo conjunto numérico con nuevas y muy diferentes concepciones que superan las definiciones de los números naturales.

Objetivo: Conocer las percepciones y dificultades en el proceso de aprendizaje que posee el estudiante sobre el conjunto de los números enteros.

1. ¿Cuándo le dicen la expresión "números enteros", que se imagina?

2. ¿Considera que los ejemplos concretos, como la altura sobre el nivel del mar y bajo el nivel del mar, escalada y descenso de montañas, temperatura sobre cero y bajo cero, etc. son adecuados para comprender los números enteros?

3. ¿Diferencia los signos predicativos y los signos de operación de los números enteros?

4. ¿Cuál es la operación que le parece más compleja de asimilar?

5. ¿Considera que el docente debe mejorar la metodología de enseñanza?



REPÚBLICA DE COLOMBIA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
 DEPARTAMENTAL CAUCA RESGUARDO INDÍGENA DE MOSOCO – PÁEZ
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN TAMA MOSOCO
 Resolución No. 08313 de 26-10-2012
 CODIGO DANE 21951700075401 RUT 900266120-2

POR EL SENDERO DE LOS NÚMERO ENTEROS

Saberes Previos

1. El contador de una empresa informó los ingresos en pesos durante los primeros seis meses del año, de la siguiente manera.

Enero: \$150.000 de utilidad
 Febrero: \$230.000 de utilidad
 Marzo: \$70.000 de utilidad
 Abril: \$100.000 de pérdida
 Mayo: \$30.000 de utilidad
 Junio: \$ 50.000 de pérdida

Expresa los movimientos mediante números enteros.

2. Las alturas sobre el nivel del mar de algunas montañas y las profundidades de algunos océanos y fosas marinas medidas en metros, se dan en la siguiente tabla. Expresa cada una de ellas mediante números enteros.

Pico de San Elías	5489 m
Océano Atlántico	3334 m
Fosa de Mindanao	10790 m
Monte Everest	8840 m
Monte Aconcagua	6958 m
Monte Kilimanjaro	5895 m
Fosa de Chile	7650 m
Monte Blanco	4807 m
Volcán del Chimborazo	6267 m
Fosa de Cabo Verde	6290 m

3. A las 7 a.m. el termómetro marca -8°C . De las 7 a.m. a las 12 m sube la temperatura a razón de 3°C por hora. Expresa la temperatura a las 8 a.m., 9 a.m. y 11 a.m.
4. Una ciudad fue fundada el año 122 a. de C. y destruida 150 años después. Expresa la fecha de su destrucción.
5. Representa sobre la recta numérica cada una de las siguientes expresiones y encuentra los resultados correspondientes.
- a. $(3+2) - 5$ c. $(5-3) + 7$
 b. $((7-4)-3) + 2$ d. $((3+2)-4) - 10$



REPÚBLICA DE COLOMBIA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTAL CAUCA RESGUARDO INDÍGENA DE MOSOCO – PÁEZ
INSTITUCIÓN EDUCATIVA JUAN TAMA MOSOCO

Resolución No. 08313 de 26-10-2013.

CÓDIGO DANE 21951700075401 RUT 900266120-2.

6. Determinar cuál de los siguientes números enteros está a una distancia mayor del origen de la recta numérica (explica la respuesta):

- a. -13 y $+2$ c. -5 y -7
b. $+4$ y $+5$ d. -3 y 0 .

7. Recuerda: para sumar dos número enteros:

- Si tienen el mismo signo: se suman los valores absolutos y se deja el mismo signo.
 - Si tienen distinto signo: se restan los valores absolutos y se pone el signo del mayor.
- Calcula, teniendo en cuenta que ambos números tienen el mismo signo.

a) $6 + 5$ b) $+4 + 8$ c) $+10 + 7$ d) $-6 - 2$

Opera, teniendo en cuenta que los dos números llevan signos diferentes.

a) $+9 - 5$ b) $+3 - 7$ c) $+6 - 10$ d) $-2 + 7$

8. Completa la siguiente tabla:

A	+5	-7	+31	-52	-17	+19	-41	+13	-5	-8
B	-13	-12	-11	0	-10	-9	+20	+21	0	-23
a+b										
a-b										

9. Recuerda: para multiplicar o dividir dos número enteros:

- Se calcula el signo con la regla de los signos.
 - Se calcula el número natural multiplicado o dividiendo los número naturales.
- Calcula los siguientes productos:

a) $3 \cdot (-2)$ b) $4 \cdot (+5)$ c) $8 \cdot (-6)$ d) $-5 \cdot (+3)$

Calcula el cociente entero, si existe.

a) $(-8) \div (+2)$ b) $(+20) \div (-10)$ c) $(-12) \div (-4)$ d) $(-4) \div (+3)$

10. Efectúa las siguientes operaciones:

- a. $(-5 + 4 - 10 + 25) - (4 - 15) + (8 - 15 - 19)$
b. $13 - [-8 - (-4 + 3 - 8)] + (15 - 20) - (13 - 40)$

11. Encuentra un factor común en las siguientes expresiones

- a. $-15 + 18 - 30 + 21$ b. $4 \cdot (-3) - 4 \cdot 8 + 12 \cdot 3 - 60$

12. En el conjunto de los números enteros determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

- a. $x + 2 = 3$
b. $[2 + 7] - x = 3$

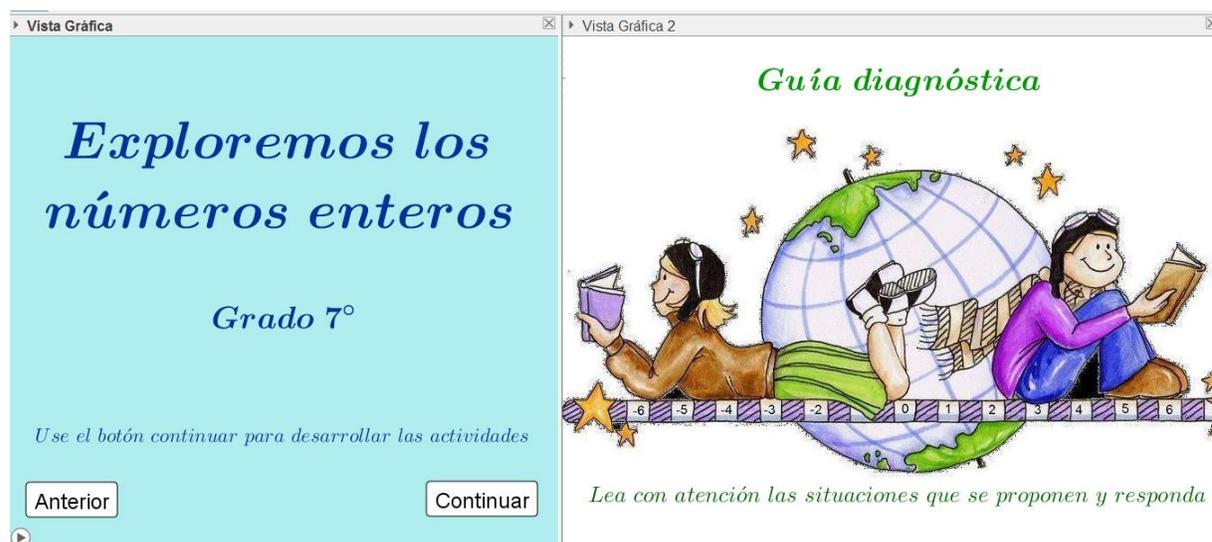
Apéndice C. Diseño y construcción de la herramienta aplicativa en GeoGebra

Prueba diagnóstica.

A continuación, se mostrarán los pantallazos del Applet 1. Prueba diagnóstica. La cual consta de 4 actividades que deben ser desarrolladas por el estudiante además de presentar algunas imágenes y textos llamativos. Un caracol que asciende y desciende una pared, una rana que avanza y retrocede en una recta horizontal enumerada, un pirata que busca un tesoro avanzando en todas las direcciones y un niño que igualmente se desplaza tanto a la derecha como a la izquierda para recoger unos objetos.

En la figura 20, se tiene una pantalla (imagen) llamativa, donde el estudiante puede leer las instrucciones del uso de la aplicación, además, el docente, hace acompañamiento en esta primera parte.

Figura 20. Applet 1. Prueba diagnóstica



Fuente: Construcción propia (2018)

En la figura 21, se observa una actividad correspondiente a un presaber, donde el estudiante, deberá leer el problema y seguir la instrucción ayudándose de los botones subir y bajar para verificar a través de esa interacción la solución del problema, es importante completar el espacio de la respuesta, si el estudiante lo hace bien, entonces, tendrá un reconocimiento y si no lo hace bien, la actividad lo invita a intentar de nuevo.

La actividad el problema de un caracol que asciende y desciende una pared, donde el estudiante debe corroborar la solución adecuada de la posición final.

Figura 21. Applet 1. Actividad presaberes.

The image shows a software interface for a math problem. On the left, a light blue panel titled 'Presaberes' contains the following text: 'A continuación encontrará un caracol travieso. Sube verticalmente por el muro de 4 metros de altura. Durante el día sube dos metros, y durante la noche resbala, retrocediendo un metro. ¿Cuántos días tardará en subir el muro? Digite la respuesta Respuesta = ?'. Below the text are buttons for 'Anterior' and 'Continuar'. On the right, a window titled 'Vista Gráfica 2' displays a 3D illustration of a brick wall. A vertical green scale is attached to the wall, marked from 0 to 4. A snail is positioned at the 0 mark. To the right of the wall are two buttons: 'Sube' with an upward arrow and 'Baja' with a downward arrow.

Fuente: construcción propia (2018)

La figura 22, no es propiamente una actividad sino un texto y una imagen que ilustran al estudiante sobre la larga historia por la cual tuvo que pasar el proceso de contar y sobre cómo surgieron los números en consecuencia de la necesidad humana.

Figura 22. Algo de historia sobre números enteros



Fuente: Construcción propia (2018)

La figura 23, corresponde a una nueva actividad que consiste en poner en movimiento una rana que se desplaza sobre unas piedras en un lago mediante los botones avanza y retrocede.

El problema le plantea al estudiante desplazamientos a la derecha y a la izquierda, para finalmente ubicarse en una posición respecto del origen.

Si el estudiante realiza correctamente la solución, es reconocido con la frase ¡Muy bien! y sino, la actividad lo invita a invita a intentar de nuevo.

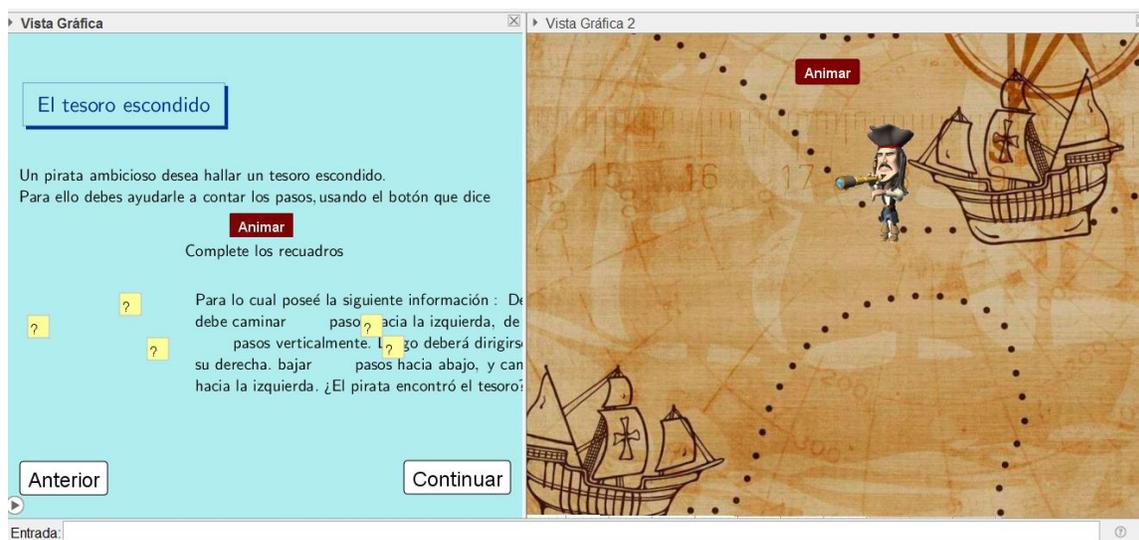
Figura 23. La rana saltarina

Fuente: construcción propia (2018)

La figura 24, es otra actividad que consiste en un pirata que desplazándose en distintas direcciones, debe hallar un tesoro escondido. Esta actividad se pone en movimiento mediante el botón animar y es muy divertida, ya que cuando el pirata encuentra el tesoro recorriendo las posiciones exactas que indica el problema, hay un cofre que se abre y el tesoro resplandece.

El estudiante es estimulado con la frase, ¡Muy bien, el pirata encontró el tesoro!, todo esto funciona de modo sincronizado entre texto e imagen y desplazamiento, lo que llama motiva al estudiante, sin proponérselo, incorporarse a los conceptos de los números negativos.

Figura 24. El tesoro escondido



Fuente. Construcción propia (2018)

La figura 25, la actividad denominada “Poniendo orden”, invita al estudiante a llenar los recuadros y si lo hace bien, le sale una viñeta que le indica que está bien y caso contrario no le sale nada, lo que le indica que la respuesta está errada.

Figura 25. Poniendo orden

Poniendo orden

Al pequeño Juan le pusieron la tarea de recoger los juguetes.
El niño está ubicado en la posición inicial cero (0) y cada unidad está representada por una figura.
Use los botones mover a la derecha y a la izquierda y valide.

¿A qué distancia está la volqueta del niño? ?

¿A qué distancia está la pelota? ?

¿A qué distancia están las roscas? ?

¿Hacia dónde debe caminar Juan para recoger la pelota?

¿Qué signo hay si quiere ir primero por la volqueta?

Anterior Continuar

Entrada: miércoles, 07 de noviembre de 201

Fuente: Construcción propia

La figura 26, no es propiamente una actividad o un problema como tal, sino una invitación al estudiante a dar un like, si la aplicación le agradó o no, pero es imposible pensar una respuesta negativa, ya que los estudiantes contemporáneos les fascina todo lo que tenga que ver con el empleo de los computadores y los juegos.

Figura 26. Gracias por participar



Fuente. Construcción propia (2018)

La figura 27, es una imagen con la que comienza el segundo Applet, no es una actividad propiamente dicha sino una pantalla atractivamente diseñada para generar en el estudiante gusto y motivación.

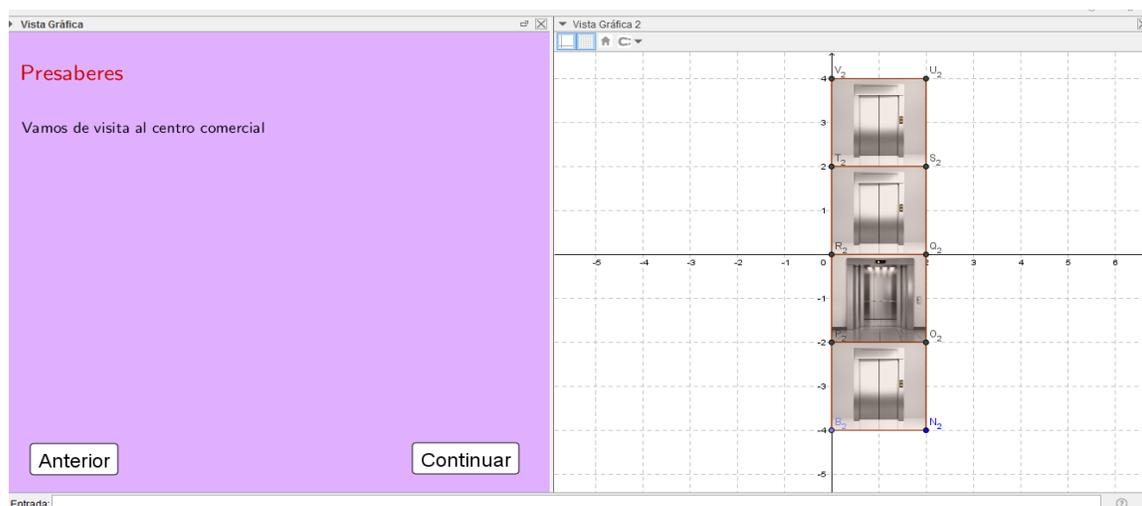
Figura 27. Concepto de números enteros



Fuente: Construcción Propia (2018)

La figura 28, consiste en una actividad que corresponde a los presaberes e invita al estudiante ir a un centro comercial y opera del siguiente modo:

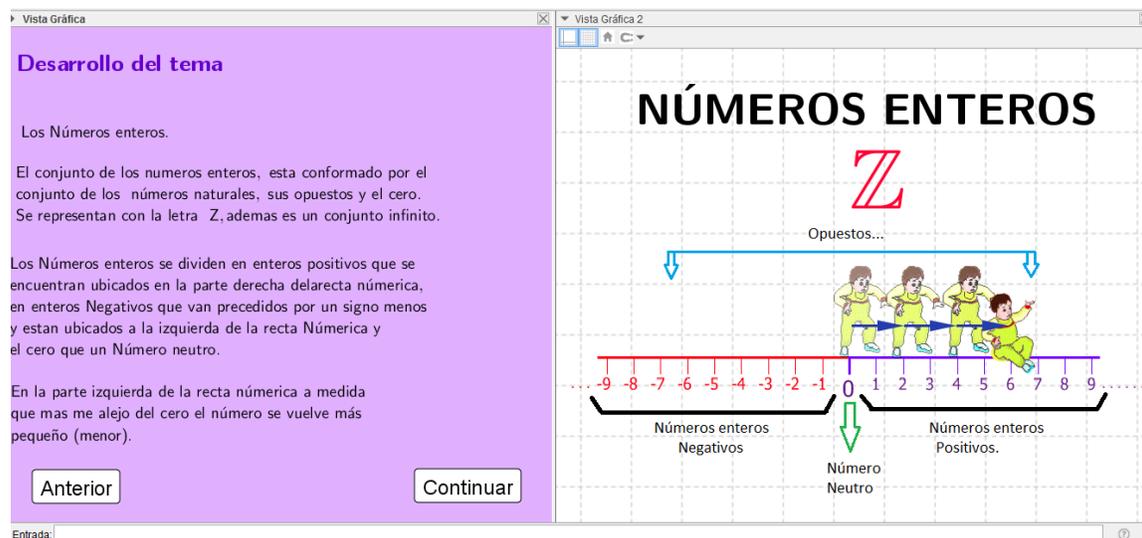
Figura 28 .Presaberes



Fuente: Construcción propia (2018)

La figura 29, es otra pantalla que consta de un texto explicativo a cerca de lo que son los números enteros y tiene a lado una imagen que indica los número positivos y los negativos, como también indica los número opuestos. No es una actividad propiamente dicha, sino un texto que le recuerda al estudiante el concepto de los números enteros.

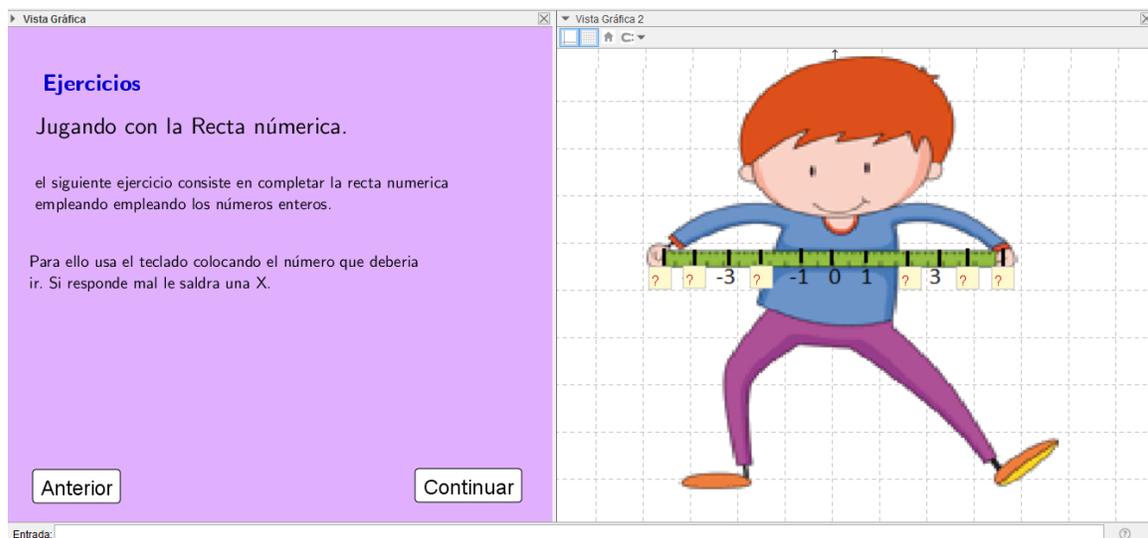
Figura 29. Desarrollo del tema



Fuente: Construcción propia (2018)

La figura 30, se denomina jugando con la recta numérica y consiste en llenar unos recuadros vacíos, según corresponda el orden de las cantidades y si el estudiante lo hace bien, le sale una viñeta indicando que está bien y caso contrario le sale una x, reprobándolo.

Figura 30 . Jugando con la recta numérica



Fuente: Construcción propia (2018)

La figura 31, es una actividad que consiste en colocar cantidades en los recuadros y si el número es el indicado le saldrá una carita feliz y caso contrario sale un rostro triste y pensativo. La actividad es muy práctica por cuanto estimula al estudiante a tener presente las cantidades mayores y menores, que son aspectos muy claves sobre todo si se trata del número negativo.

Figura 31. Relación mayor que y menor que.

Fuente: construcción propia

La figura 32, es un problema de aplicación en el que se tiene que completar unos recuadros, observando el nivel de profundidad a la que se encuentran los peces y el nivel de altura sobre el amar a la que se encuentre la isla y unas palmas. A llenar correctamente los recuadros sale un emoticón alegre y caso contrario un emoticón triste.

Figura 32. Problema de aplicación

Fuente: construcción propia (2018)

La figura 33, corresponde al tercer Applet, que abre con una pantalla muy agradable, llamativa y que invita a operar con los números enteros.

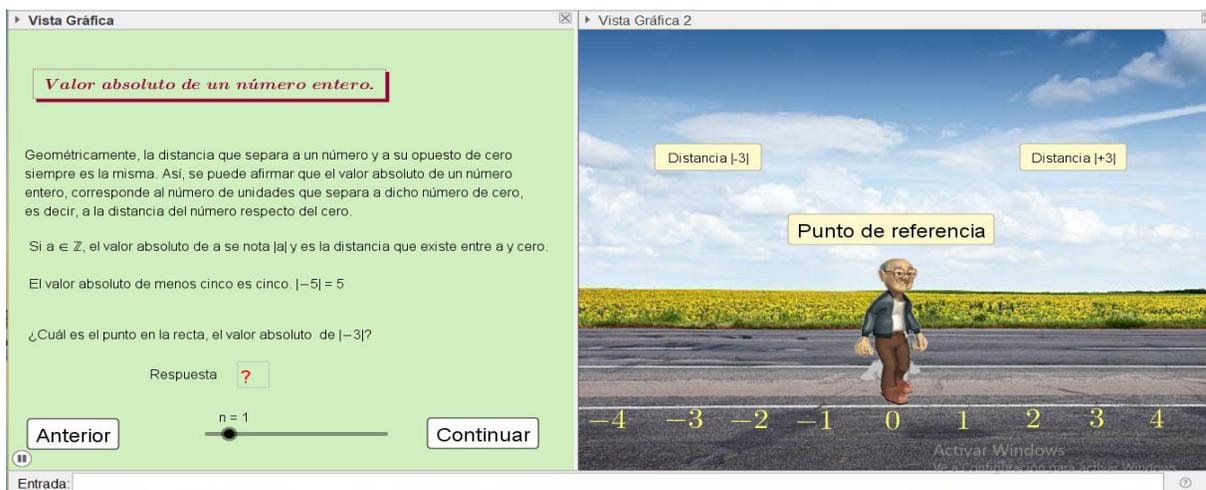
Figura 33. Operemos con los números enteros



Fuente: Construcción propia (2018)

La figura 34, es una actividad denominada, valor absoluto de un número entero y consta de un texto explicativo donde se completa un recuadro, teniendo en cuenta la cantidad de espacios que una persona se mueve tanto a la derecha como a la izquierda de un punto de referencia.

Figura 34. Valor absoluto de un número entero



Fuente: Construcción propia (2018)

La figura 35, es una actividad de adición de número enteros de signos iguales y de signos distintos. Contiene un texto explicativo y ejemplos, luego en la pizarra se le propone al estudiante realizara las operaciones correspondientes y completar los recuadros, de manera que si lo hace correctamente, le arroja una viñeta y caso contrario no sale nada.

Figura 35. Operaciones en los \mathbb{Z}

Fuente: Construcción Propia (2018)

La figura 36, es la actividad de la sustracción de los números enteros. Consta de un texto explicativo y algunos ejemplos. En la pizarra se le proponen unos ejercicios al estudiante y completar los recuadros, y de resolverlos bien les sale una viñeta y caso contrario no sale nada.

Figura 36. Sustracción en los números enteros.

Fuente: Construcción propia (2018)

La figura 37, es la actividad de la multiplicación de los números enteros y consta de un texto explicativo, una imagen con la ley de los signos y algunos ejemplos. En la pizarra se le plantea al estudiante desarrollar unas multiplicaciones y completar los recuadros. La viñeta es la que indica si los ejercicios son resueltos correctamente.

Figura 37. Multiplicación de número enteros

Vista Gráfica

Multiplicación de números enteros.

Para multiplicar dos o más números enteros se multiplican sus valores absolutos. El signo del producto se obtiene mediante la regla de los signos.

Ejemplos:

$(+) \cdot (+) = (+)$	Multiplicar $(-8) \times (-5)$ $(-8) \times (-5) = 40$	Multiplicar $(+6) \times (+7)$ $(+6) \times (+7) = 42$
$(+) \cdot (-) = (-)$		
$(-) \cdot (+) = (-)$	Multiplica $(+4) \times (-15)$ $(+4) \times (-15) = -60$	
$(-) \cdot (-) = (+)$	Multiplicar $(-5) \times (+6)$ $(-5) \times (+6) = -42$	

Anterior n = 4 Continuar

Entrada:

Vista Gráfica 2

Resuelve los siguientes productos:

$7 \times 9 = ?$

$(-6) \times (-8) = ?$

$(?) \times (?) = -143$

$(-5) \times (-12) \times (-1) = ?$

$(-2) \times (-4) \times (-8) \times (-10) = ?$

Activar Windows
Vea a Configuración para activar Windows

Fuente: Construcción propia (2018)

La figura 38, es la operación de la división de número enteros, consta de un texto explicativo, una imagen con la ley de los signos y ejemplos. En la pizarra se le propone al estudiante desarrollar las operaciones de división y completar los recuadros, si el estudiante acierta le sale una viñeta, caso contrario no le sale nada.

Figura 38. División de números enteros

Fuente: Construcción propia (2018)

La figura 39, es una actividad llamada Nairomán asciende y desciende una montaña. Consta de un texto explicativo y hallar la respuesta completando el recuadro, y el estudiante es estimulado con las frases muy bien o inténtelo de nuevo, según sea el caso.

Figura 39. Ascenso y descenso de montañas.

Fuente: Construcción propia (2018)

La figura 40, se denomina resolución de problemas, consta de dos textos que se deben solucionar y completar los recuadros. Si el estudiante lo hace correctamente, le sale la frase muy bien y caso contrario le sale la frase inténtelo de nuevo, el ascensor es solo una guía y carece de animación.

Figura 40. Resolución de problemas

Resolución de problemas.

1. Un ascensor se encuentra en el piso 4º. A continuación, baja 5 pisos, sube 6, baja 3, sube 2, baja 4, baja 2. ¿En qué piso se encuentra ahora? Indica la solución mediante una expresión de números enteros.

Respuesta

2. Una ciudad fue fundada el año 122 a. de C. y destruida 160 años después. Expresa la fecha de su destrucción.

Respuesta

Anterior n = 7 Continuar

Entrada:

Fuente: construcción propia (2018)

La figura 41, es una pantalla que le permite al estudiante dar un like según haya sido de su agrado o no la actividad.

Figura 41. Dale like si te gustó la aplicación

Dale like si te gusto la aplicación

Me gusta No me gusta

Gracias por participar

Pregunta a tu profesor sobre el tema de números enteros

Anterior n = 8 Continuar

Entrada:

Volver al inicio

Inicio

Activar Windows
Vea Configuración para activar Windows

Fuente: construcción propia (2018)

Apéndice D. Ficha de re respuestas**Ficha de respuesta prueba diagnóstica**

Actividad 1. Caracol travieso.

Respuesta _____

1 intento	2 intento	3 intento

Actividad 2. Rana saltarina.

Respuesta _____

1 intento	2 intento	3 intento

Actividad 3. El tesoro escondido.

Respuesta _____

1 intento	2 intento	3 intento

Actividad 4. Poniendo orden.

Respuesta _____

1 intento	2 intento	3 intento

Ficha de respuesta concepto de los números enteros

Actividad 1. Presaberes

Respuesta _____

1 intento	2 intentos	3 intentos

Actividad 2. Jugando con la recta numérica.

Respuesta _____

1 intento	2 intentos	3 intentos

Actividad 3. Ejercicios sobre mayor que y menor que.

Respuesta _____

1 intento	2 intentos	3 intentos

Actividad 4. Problema de aplicación.

Respuesta _____

1 intento	2 intentos	3 intentos

Ficha de respuesta operaciones con números enteros

Actividad 1. Valor absoluto.

Respuesta _____

1 intento	2 intentos	3 intentos

Actividad 2. Adición de números enteros.

Respuesta _____

1 intento	2 intentos	3 intentos

Actividad 3. Sustracción de números enteros.

Respuesta _____

1 intento	2 intentos	3 intentos

Actividad 4. Multiplicación de números enteros.

Respuesta _____

1 intento	2 intentos	3 intentos

Actividad 5. División de números enteros.

Respuesta _____

1 intento	2 intentos	3 intentos

Actividad 6. Ascenso y descenso.

Respuesta _____

1 intento	2 intentos	3 intentos

Actividad 7. Problemas.

Respuesta _____

1 intento	2 intento	3 intento

1 intento	2 intento	3 intento

Apéndice E. Cuestionario de evaluación de impacto

INSTITUCIONES EDUCATIVAS.

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN DE IMPACTO

El siguiente cuestionario pretende documentar la percepción de los estudiantes en la investigación desarrollada en el sector rural y urbano, estimando la secuencia didáctica que se expone en el fortalecimiento de los números enteros en términos de eficacia e implementación de los Applets.

Cada pregunta consta de dos respuestas a las cuales deberá:

- Dar una valoración de 1 a 3, siendo 1, nivel bajo; 2, nivel medio y 3, nivel alto.
- Acompañarlo con una justificación del por qué su apreciación.

I. ¿La información suministrada en las aplicaciones son comprensibles?

3	2	1
---	---	---

Justificación, ¿Por qué?

II. ¿Las instrucciones de las distintas actividades se pueden seguir con claridad?

3	2	1
---	---	---

¿Por qué?

III. ¿La interpretación de los problemas son más sencillos
para solucionar a partir del esquema?

3	2	1
---	---	---

¿Por qué?

IV. ¿La plataforma es agradable para el desarrollo de las
actividades?

3	2	1
---	---	---

¿Por qué?
