

**MANUAL DIDÁCTICO PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO
MÉTRICO ESPACIAL EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO A TRAVÉS DE
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FIGURAS TRIDIMENSIONALES**

Estudiante: María Camila Zapata Buriticá.

Facultad de Educación, Universidad Católica de Manizales
Licenciatura en matemáticas y física

Asesora: Mg. Paula Andrea Osorio Gutiérrez

4 de diciembre de 2021

Dedicatoria

Este proyecto se lo dedico principalmente a Dios, que me ha dado la oportunidad de seguir mis estudios, en especial una carrera en la cual encontré vocación y amor. De manera muy especial a mi familia, mis padres, abuela y hermano los cuales han sido de gran apoyo en todo el proceso educativo, a mi asesora de grado Paula Andrea Osorio Gutiérrez, la cual ha guiado en buen camino en este proyecto, me ha brindado apoyo e inspirado en la práctica docente. A todas estas personas por sus palabras de aliento y motivación.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por guiarme en esta carrera de docencia, de darme la oportunidad de formarme como profesional en la Universidad Católica de Manizales, por brindarme grandes oportunidades y perseverancia en todo mi proceso de formación.

A mi familia, los cuales han sido un pilar en mi formación académica y futura profesional, una gran motivación e impulsores para alcanzar mis metas y mis expectativas para ser una persona profesional y lograr una calidad de vida

A mi asesora de proyecto de grado Paula Andrea Osorio Gutiérrez, la cual me ha guiado en todo este proceso, me ha inspirado y me ha enseñado la realidad educativa y el gran compromiso que un docente tiene ante la sociedad.

Resumen

La idea principal del presente proyecto es dejar una herramienta didáctica para docentes e instituciones para la enseñanza de la geometría, con el objetivo de desarrollar el pensamiento métrico espacial en estudiantes de grado noveno, aplicando la estrategia de resolución de problemas, material en concreto y digitales.

Este proyecto se desarrolla en un contexto complejo de la pandemia y pospandemia del COVID-19, donde se tuvo que evaluar cada estrategia aplicada, buscando que fuera adecuada para los estudiantes en el contexto actual individual de cada uno de ellos.

Lo que se busca con este proyecto es rescatar la importancia de la enseñanza de la geometría, ya que se ha perdido en estos últimos años y/o se enseña de manera muy leve y sin relevancia, demostrando la gran importancia en la formación y desarrollo educativo en los estudiantes, con una metodología de enfoque cualitativo y tipo descriptivo, mediante evidencia fotográfica, revisión de documentos y videos tomados en todo el proceso.

Se recalca la gran importancia de evaluar diferentes estrategias didácticas como la aplicación de material en concreto y digital para la comprensión de conceptos y procesos, la aplicación de resolución de problemas que demuestren el desarrollo en sistemas geométricos, siempre en un contexto de virtualidad y post pandemia.

A pesar del contexto estudiantil, de la falta de recursos de una gran mayoría de los estudiantes, se obtuvieron grandes avances en su desarrollo métrico-espacial, estos resultados se presentan de manera descriptiva y evidenciada con documentos y fotografías, además con un taller final de resolución de problemas tipo prueba saber, donde se comprueba el avance individual del estudiante.

Abstract

The main idea of this project is to leave a didactic tool for teachers and institutions for the teaching of geometry, with the objective of developing spatial metric thinking in ninth grade students, applying the strategy of problem solving, concrete and digital material.

This project is developed in a complex context of the pandemic and post-pandemic of COVID-19, where each applied strategy had to be evaluated, seeking that it was adequate for the students in the current individual context of each one of them.

What is sought with this project is to rescue the importance of teaching geometry, since it has been lost in recent years and/or it is taught in a very light and irrelevant way, demonstrating the great importance in the formation and educational development of students, with a qualitative approach methodology and descriptive type, through photographic evidence, review of documents and videos taken throughout the process.

The great importance of evaluating different didactic strategies such as the application of concrete and digital material for the understanding of concepts and processes, the application of problem solving that demonstrate the development of geometric systems, always in a context of virtuality and post pandemic, is emphasized.

In spite of the student context, the lack of resources of a great majority of the students, great advances were obtained in their metric-spatial development, these results are presented in a descriptive way and evidenced with documents and photographs, in addition to a final workshop of problem solving type saber test, where the individual progress of the student is verified.

Tabla de Contenidos

Resumen.....	4
Lista de tablas.....	8
Lista de figuras.....	9
Capítulo 1. Planteamiento Del Problema.....	1
1.2 Introducción.....	1
1.3 Justificación.....	1
1.4 Objetivos.....	3
1.4.1 Objetivo General.....	3
1.4.2 Objetivos específicos.....	3
1.5 Formulación Del Problema.....	4
Capítulo 2. Marco Referencial.....	8
2.1 Introducción.....	8
2.2 Marco de antecedentes.....	9
2.3 Marco conceptual.....	12
2.3.1 Teoría del Aprendizaje significativo de Ausubel.....	12
2.3.2 Manual Didáctico Como Herramienta Didáctica Mediadora.....	13
2.3.3 Hablemos Del Pensamiento Métrico Espacial.....	15
2.3.4 Implementación Del trabajo Colaborativo En El Aula – Vygotsky.....	20
2.3.5 El Papel Del Docente En El Proceso De Enseñanza – Piaget.....	21
2.3.6 Resolución De Problemas Como Didáctica En El Pensamiento Métrico- Espacial.....	24

2.3.7 Estrategias Para La Solución De Un Problema Matemático – Polya, Schoenfeld, Bransford y Stein	28
2.3.8 Cómo Se Aprende La Geometría	31
Capítulo 3. Diseño Metodológico.	37
3.1 Introducción	37
3.2 Descripción general del estudio	38
3.2.1 Enfoque	39
3.2.2 Tipo de estudio.....	39
3.3 Identificación de los sujetos de investigación.....	40
3.4 Estrategia metodológica.....	41
3.5 Fases de estudio	43
Capítulo 4. Resultados y discusión.	45
4.1 Introducción	45
4.2 Análisis de prueba diagnóstica.....	45
4.4 Resolución de problemas del pensamiento métrico – espacial.....	62
4.5 Aplicación prueba saber.....	65
Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones.....	74
5.1 Respuesta a la pregunta central.....	74
5.2 Respuesta a las preguntas auxiliares	75
5.3 Conclusiones	78
5.4 Recomendaciones.....	79
Referencias.....	81
Apéndice	85

Lista de tablas

Tabla 1 procesos en cada etapa de aprendizaje teniendo en cuenta eventos externos que puedan influir en el proceso	27
Tabla 2 Geometría Euclidiana	31
Tabla 3. Escala de valoración	42
Tabla 4. Resultados taller diagnóstico de los pensamientos matemáticos.....	46
Tabla 5 Competencias y nivel de preguntas saber	67
Tabla 6 Comparación entre niveles y fases de Van Hiele	69
Tabla 7 Triangulación de teoría de Van Hiele con el método IDEAL de Bransford y Stein	70

Lista de figuras

Figura 1. Institución Educativa Colegio Andrés Bello	5
Figura 2. Método Ideal, definición	30
Figura 3. Desarrollo de las fases de aprendizaje y los niveles de razonamientos. Tomada de Gutiérrez y Jaime (1991)	33
Figura 4. Fases de estudio.....	44
Figura 5. Resultados preguntas del pensamiento métrico - espacial	49
Figura 6. Componentes del manual didáctico para la enseñanza de la geometría	50
Figura 7. Aplicación de ángulos en Geogebra 2.0.....	52
Figura 8. Evidencia de ángulos por un estudiante	53
Figura 9. Evidencia de polígonos de un estudiante.....	53
Figura 10. Evidencia de áreas de un estudiante	54
Figura 11. Evidencia de geoplano virtual y casero	55
Figura 12. Evidencia Material en concreto tema de triángulos	57
Figura 13. Evidencia de propiedades de la circunferencia con material en concreto y cuaderno	58
Figura 14. Evidencia Poliedro en material en concreto y dibujado en el cuaderno.....	59
Figura 15. Evidencia medición de poliedros y pirámides.....	60
Figura 16. Evidencia Cuerpos redondos material en concreto	61
Figura 17. Evidencia resolución de problemas	62
Figura 18. Evidencia de resolución de problemas 2	63
Figura 19. Evidencia taller de resolución de problemas cuerpos geométricos	64
Figura 20. Resultados pruebas saber.....	66

Capítulo 1. Planteamiento Del Problema

1.2 Introducción

El grupo al cual se va a realizar un diagnóstico son los grados novenos (9-1 y 9-2), donde se cuenta con un total de 55 estudiantes, 22 niñas y 33 jóvenes, en edades de 13 a 18 años. De los 55 estudiantes, solo 30 estudiantes en promedio tienen la posibilidad de conexión wifi o datos para conectarse a las clases que se orientan por la plataforma Google meet. La mayoría de los estudiantes no cuentan con computador, sino con dispositivo celular con suficiente Wifi y/o datos. Los otros 25 estudiantes trabajan por vía whatsapp, con guías diseñadas por la docente y videos que se envían durante las clases virtuales, donde algunos lo hacen por medio de celulares de sus padres o familiares.

Se ha diagnosticado en el mencionado grupo problemas en resolución de problemas en ejercicios con base a la geometría, mediante un ejercicio en clase (google meet y guía didáctica). Los estudiantes aclararon que no conocían algunos conceptos de las palabras empleadas en las preguntas, aunque el docente siempre estuvo presente en la solución de ejercicios como un guía y mediador, el estudiante no comprendía el proceso de la solución

1.3 Justificación

Se van a llevar a cabo en la presente investigación una descripción del desarrollo del pensamiento métrico espacial a través de resolución de problemas de figuras tridimensionales mediadas en un manual didáctico a estudiantes de grado noveno.

Una vez culminado el proyecto los estudiantes puedan implementar el desarrollo y conocimientos métrico espacial en las pruebas Saber del estado, existen pruebas saber 3°, 5° y

9º, las cuales brindan información sobre el mejoramiento de la calidad educativa previamente a las pruebas Saber 11 (Escorcía et al., s. f.)

Según el ministerio de educación nacional (MEN) de Colombia establecidos en el artículo 3 del decreto 869 de 2010 (MEN, 2010), los estudiantes que deseen continuar sus estudios, es decir a una educación superior, debe realizar las pruebas saber 11 como un requisito obligatorio, todo con el fin de evaluar la calidad de educación colombiana y con una gran puntuación individual de los estudiantes tendrán la oportunidad de ingresar a grandes universidades e incluso con becas del estado.

Se va a analizar el desarrollo métrico espacial con la investigación del modelo de Van Hiele, la cual ayudará a describir con gran detalle la evolución y/o desarrollo de cada estudiante gracias a sus etapas o niveles. Todo este desarrollo es promovido desde el trabajo del docente en el modelamiento matemático basado en Fernando Hitt, desde la aplicación de una situación problema con un acercamiento sociocultural, promoviendo pensamientos diversificados, promoviendo representaciones funcionales, espontaneas e institucionales las cuales se demandan un conversión y tratamiento, todo en un trabajo colaborativo todo con el fin de a un pensamiento dirigido que se puedan articular entre representaciones para así construir conceptos matemáticos.(Hitt & Quiroz Rivera, 2017).

El trabajo del desarrollo del métrico espacial por parte del estudiante conlleva a realizar 5 procesos generales de la matemática según los lineamientos curriculares que son formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. (Schmidt Q. & Kolumbien, 2006). Es decir que al desarrollo del pensamiento se puede aplicar en resolución de problemas, en

modelación de fenómenos de la realidad (contexto) y en la ejercitación de procedimientos y algoritmos, los cuales se van a razonar y compartir entre estudiante-estudiante, estudiante-docente.

Todo el proceso de la investigación está realizado de manera descriptiva, donde se detalla los procesos de asimilación y evolución, los efectos de las estrategias propuestas en el contexto del estudiante. Tales datos pueden ser de gran apoyo o aporte a futuras investigaciones los cuales se encuentran en un contexto y/o objetivo similar, pueden generar conjeturas al comparar datos obtenidos para así llegar a conclusiones relevantes.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General.

Desarrollar el pensamiento métrico espacial a través de resolución de problemas de figuras tridimensionales mediadas en un manual didáctico a estudiantes de grado noveno

1.4.2 Objetivos específicos.

-Identificar las propiedades y relaciones geométricas empleadas en las figuras bidimensionales a través de un taller diagnóstico.

-Diseñar un manual didáctico con el uso de material concreto y tecnología computacional para la comprensión de objetos tridimensionales.

-Aplicar conjeturas y semejanzas en la relación de figuras bidimensionales a objetos tridimensionales en la solución de problemas diseñados en el manual didáctico.

- Evaluar la estrategia del manual didáctico en términos del conocimiento construido y competencia adquirida por el estudiante en la comprensión de objetos tridimensionales en resolución de problemas y preguntas tipo pruebas saber.

1.5 Formulación Del Problema.

La Institución educativa Andrés Bello está ubicado en la Calle 27 # 32 a 3 / Barrio El nevado en la ciudad de Manizales Caldas y cuenta con un modelo pedagógico de escuela activa urbana.

Misión

El “Colegio Andrés Bello” es una Institución de carácter oficial, que ofrece todos los niveles de Educación Formal y el Programa de Educación para adultos; con enfoque humanista, enmarcado en el Modelo Pedagógico Escuela Activa Urbana; apoyado en las didácticas flexibles GEEMPA, Aceleración del aprendizaje, educación de adultos y el Programa Todos a Aprender; caracterizada por ser inclusiva, generadora de ambientes educativos orientados a desarrollar en nuestros educandos competencias básicas y ciudadanas, en aras de desenvolverse en la sociedad como personas útiles y comprometidas con su entorno.

Visión

Hacia el año 2020 la I. E. Colegio Andrés Bello” será reconocida por impactar positivamente el entorno entregando seres humanos formados para transformar su proyecto de vida personal, laboral y social basado en competencias en y para la vida que confluyan en procesos sociales, culturales y ambientales en beneficio de sí mismos y de sus comunidades.

Contexto Escolar

La institución cuenta aproximadamente con 361 estudiantes y 14 docentes en los grados de bachiller (grados 6 a 11), cuenta con aulas de clase, una cancha y dos aulas de sistemas, no cuenta con laboratorios.

Figura 1. Institución Educativa Colegio Andrés Bello



Tomado de: <https://cutt.ly/gxhzBt4>

Recordemos que estamos en épocas de pandemia y en la institución educativa Andrés Bello no está manejando por ahora la alternancia, las clases y actividades se están realizando de manera virtual.

El grupo al cual se va a realizar un diagnóstico son los grados novenos (9-1 y 9-2), los cuales cuentan con un total de 55 estudiantes, los cuales en un promedio solo 25 estudiantes tienen la posibilidad de conectarse a las clases virtuales, ya que no cuentan con el dispositivo o

con suficiente Wifi y/o datos, los otros 30 estudiantes trabajan por vía whatsApp por guías diseñadas por la docente y videos que se envían durante las clases virtuales, donde algunos lo hacen por medio de celulares de sus padres o familiares.

Gracias a una encuesta diseñada en Google drive a los estudiantes, ninguno cuenta con ningún tipo de discapacidad ni física ni de aprendizaje diagnosticado por un especialista y más del 50% de los estudiantes lleva dentro de la institución entre 9 a 10 años, donde solo el 30% ha tenido que repetir el año.

De los 55 estudiantes más del 80% son de extracto 1 y 2, además el 30% tanto de padres y madres no terminó la educación media y más del 45% de las familias obtienen un sueldo mensual menos de un mínimo. Estas variables son las más posibles causantes de la falta de recursos tecnológicos de los estudiantes para asistir a sus clases virtuales.

Al preguntarles a los estudiantes acerca de la materia que más le gusta y la que menos le gusta, más de un 30% escogieron las matemáticas como asignatura preferida por razones como su futura carrera de ingeniería, por el manejo de números y lógica aclaran ellos. De los 55 estudiantes, solo uno escogió las matemáticas como asignatura que más le disgusta, la gran mayoría escogió el idioma extranjero inglés. Esto refleja que los docentes pasados y actuales han hecho un gran trabajo donde se genera interés hacia ellos y manejan unas grandes estrategias de enseñanza hacia ellos.

Pregunta de investigación central

¿Cómo desarrollar el pensamiento métrico espacial en estudiantes de grado noveno a través de resolución de problemas de figuras tridimensionales?

Preguntas Auxiliares.

- ¿Cuál es la manera adecuada de verificar conceptos, propiedades y procesos geométricos en los estudiantes de grado noveno?
- ¿Cómo fundamentar teórica y metodológicamente el desarrollo del pensamiento métrico espacial en estudiantes de grado noveno?
- ¿Qué efecto surge en los estudiantes la implementación de las estrategias propuestas para el aprendizaje de las figuras tridimensionales?
- ¿Cómo describir la evolución de los estudiantes de noveno al utilizar herramientas que le permitan desarrollar el pensamiento métrico espacial?
- ¿Cómo validar la funcionalidad de las herramientas utilizadas para el logro del desarrollo del pensamiento métrico espacial en estudiantes de grado noveno?

Capítulo 2. Marco Referencial

2.1 Introducción

Existen varias investigaciones y artículos que apoyan, sustentan y resaltan la importancia de la enseñanza de la geometría con la implementación de estrategias didácticas como es el modelo de Van Hiele y el método heurístico de resolución de problemas de Pólya, implementando materiales tanto digitales como material manipulable fomentando el proceso empírico para lograr un desarrollo en percepción, la inspiración, la visualización y las distintas herramientas de la geometría fundamentado desde una teoría, los cuales se van a tomar como base en la presente investigación.

Para Polya (1965), en su libro “Cómo plantear y resolver problemas”, el término “heurística” lo describe como “el arte de la resolución de problemas. La heurística trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso” (p. 102).

Se va a analizar el desarrollo métrico espacial con la investigación del modelo de Van Hiele, la cual ayudará a describir con gran detalle la evolución y/o desarrollo de cada estudiante gracias a sus etapas o niveles. El modelo de Van Hiele, explica cómo se genera el desarrollo del razonamiento geométrico del estudiante en cinco niveles en un orden específico y consecutivos. Este proceso siempre parte desde el inicio en cada proceso de un nuevo aprendizaje, donde el estudiante solo pasa de nivel solo si ha cumplido la meta de la etapa donde se encuentra.

Todo este desarrollo es promovido desde el trabajo del docente en el modelamiento matemático basado en Fernando Hitt, desde la aplicación de una situación problema con un acercamiento sociocultural, promoviendo pensamientos diversificados, promoviendo

representaciones funcionales, espontaneas e institucionales las cuales se demandan un conversión y tratamiento, todo en un trabajo colaborativo todo con el fin de a un pensamiento dirigido que se puedan articular entre representaciones para así construir conceptos matemáticos.(Hitt & Quiroz Rivera, 2017)

2.2 Marco de antecedentes

Antecedentes Internacionales

Estrategias lúdicas aplicando el modelo Van Hiele como una alternativa para la enseñanza de la geometría desarrollada por Claudia J. Pérez y María Eugenia Ruíz, elaborada en el año 2010 en Mérida - Venezuela, en la Universidad de los Andes. Esta investigación propone estrategias didácticas del modelo Van Hiele para así promover el aprendizaje significativo, usando la herramienta como el juego para lograr una motivación e interés en los estudiantes. La investigación cuenta con un enfoque cualitativo bajo la modalidad investigación – acción, con el objetivo de elevar el razonamiento geométrico en los estudiantes; obteniendo resultados como la resolución de problemas a través de las experiencias, perspectivas y estructura por parte de los estudiantes. También recalca el papel del docente como un acompañante y motivador en todo el proceso epistemológico. (Claudia J, María R, 2010.)

la propuesta didáctica para la aplicación de la enseñanza basada en problemas a la formación semipresencial en la disciplina de la geometría, diseñada por la doctora en ciencias de la educación María Cristina González Dósil, publicada en 2006 en el Instituto superior pedagógico Enrique José Varona de la Habana Cuba. En esta investigación proponen una didáctica basada en la resolución de problemas con el fin de contribuir al mejoramiento del

proceso enseñanza – aprendizaje de la geometría, Su forma de validación fue someterse a unos procesos heurísticos en la solución de los problemas presentados, en las reflexiones meta cognitivas de los procesos por parte de los estudiantes, donde al final obtuvieron unos resultados favorables en la modalidad semipresencial, por tal modalidad el docente tuvo la tarea de una rigurosa elaboración de contenidos. (Pajoy et al., s. f.)

Antecedentes Nacionales

En la revista colombiana de educación, según el artículo de Leonor Camargo de “El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría”, nos menciona que Piaget considera que el desarrollo del razonamiento permite el avance en el proceso de aprendizaje. Mientras que los Van Hiele gracias a sus procesos de enseñanza y aprendizaje se promueve el desarrollo del razonamiento, es decir que estos puntos de vistas son opuestos. La autora afirma que la didáctica de la geometría está en deuda a la teoría de Piaget, a pesar que la teoría de Van Hiele cuenta con los procesos de enseñanza y aprendizaje que promueve el desarrollo del razonamiento, no establecen una conexión directa entre este razonamiento y la edad, por el contrario, cada vez que los estudiantes se aproximan a un nuevo objeto de conocimiento, pasan por cada uno de los niveles de razonamiento independiente de esta, aunque el tránsito de un nivel a otro si puede ser más veloz en estudiantes con mayor edad y experiencia. Así que la autora se encuentra a favor con el autor Piaget ya que sus trabajos llevaron a cabo a una serie de investigaciones en el campo geométrico, no solo de forma contextual y metodológica en la práctica profesional de enseñanza de este, sino también en propuestas investigativas enfocados en procesos de visualizar, conceptualizar, representar, justificar y resolver problemas (Camargo Uribe, 2011)

El artículo “la geometría, su enseñanza y su aprendizaje” por Leonor Camargo y Martín Acosta. Bogotá (2012) en la revista Tené, Epistemi y Didaxis, mencionan la multidimensionalidad de la geometría, la cual consiste en el proceso empírico, donde se ubican la percepción, la intuición, la visualización y el carácter instrumental de la geometría; y el teórico, relacionado con los aspectos abstractos, conceptuales, deductivos, formales y rigurosos de la geometría, como disciplina científica.. Cada uno depende uno del otro en el proceso de práctica y enseñanza pedagógica. Los autores concluyen que la forma correcta de transitar los procesos empíricos y teóricos es gracias al diseño de campos de experiencias adecuados en donde la argumentación es fundamental por parte del docente. (Camargo, L., & Acosta, M. 2012).

Antecedentes Locales

Aprendizaje de la geometría mediada con herramientas didácticas por Diana Paola Rojas Pajoy, Alexander Gaviria Sterling Y José Alirio Valderrama Cuellar del 2014 de la universidad católica de Manizales. Esta investigación tiene como objetivo Potenciar el aprendizaje de la geometría por medio de la compilación y diseño de herramientas didácticas tanto tangibles como digitales enfocadas a un contexto implementando un modelo cognitivo. La investigación cuenta con un enfoque cualitativo y metodología mixta. Al final obtuvieron como resultado, el 68% de los estudiantes opinaron que el lenguaje implementado en las herramientas didácticas fue claro y relacionado a su cotidianidad y el 80% de estos consideran los temas y conceptos importantes para su formación.

2.3 Marco conceptual

En la presente investigación se realizó un proceso de búsqueda bibliográfica, donde se han encontrado grandes autores que han cambiado la historia de la educación y aún influyen en el mejoramiento y progreso de esta.

2.3.1 Teoría del Aprendizaje significativo de Ausubel

Para lograr el objetivo de cualquier docente, el cual es lograr un conocimiento integral en los estudiantes, es bastante complejo y conlleva varios factores, el docente y la acción de su enseñar, el currículo y la estructura del conocimiento en este y el entorno social. Lo anterior se desarrolla dentro del aula de clase, donde se analizan todos estos factores influyentes y el docente es el encargado de analizarlos, generar estrategias eficaces de enseñanza logrando evitar el proceso de “ensayo y error” (Ausubel, 1983).

La información que se obtiene del análisis de la teoría de Ausubel es: ¿cómo aprende el estudiante?, ¿cuáles son las limitaciones de aprendizaje del estudiante? ¿Por qué el estudiante olvida lo enseñado? Según (Molina, s. f.) Esta teoría marca “Los principios del aprendizaje, ya que se ocupan de estudiar a los factores que contribuyen a que ocurra el aprendizaje”, marcando la función del docente, el saber desde el currículo, reconociendo el saber previo del estudiante y el ambiente social del estudiante dentro y fuera del aula.

Ausubel plantea que el desarrollo de un nuevo conocimiento depende de la estructura cognitiva previa del estudiante, es decir, que este empieza a organizar y relacionar los saberes previos con un saber nuevo generando un aprendizaje significativo. Pero debemos recordar que el acompañamiento del docente en cada proceso es fundamental para lograr este objetivo.

(Molina, s. f.) Menciona que “los principios de aprendizaje propuestos por Ausubel, ofrecen el marco para el diseño de herramientas meta cognitivas que permiten conocer la organización de la estructura cognitiva del educando” Pág. 1. Esto quiere decir que ayudará al docente a obtener una mejor orientación en su labor educativa gracias al análisis de los conceptos y proporciones de cada estudiante, en vez de basarse de “mentes en blanco” o empezar un diseño de clase “desde cero”, tomar los conocimientos y experiencias beneficiando el proceso de aprendizaje.

Es importante mencionar que la Institución Andrés Bello cuenta con un modelo pedagógico de Escuela Activa Urbana la cual consta de la identificación de las estrategias y mediaciones para un desarrollo adecuado en los momentos pedagógicos, y una de ellas es la Vivencia. Esta se basa en proponer una situación problema en donde se pueda reconocer los saberes previos del estudiante, estos saberes van a ser fundamentales para el desarrollo del nuevo conocimiento. Esta etapa de la clase es muy beneficiosa tanto para el docente al obtener información del nivel conceptual en el cual se encuentra el estudiante como para el estudiante, el cual generará una relación entre conocimientos.

2.3.2 Manual Didáctico Como Herramienta Didáctica Mediadora

Es por tal que el presente proyecto “Manual didáctico para desarrollar el pensamiento métrico espacial de problemas de figuras tridimensionales” empieza desde el conocimiento de la geometría bidimensional, partiendo cada capítulo con una actividad problema de vivencia que pueda ayudar al estudiante a generar una relación entre conocimientos en su proceso de aprendizaje, siempre contando con el acompañamiento del docente como un guía mediador.

El proceso de la vivencia y/o reconocimiento de los saberes previos del estudiante para el docente y el mismo, ayuda a formar parte del desarrollo de un aprendizaje significativo, ¿qué quiere decir un aprendizaje significativo? , Ausubel aclara que es un aprendizaje: “por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición” (1983, pag.18). Esto marca un nuevo objetivo al docente, no generar aprendizajes mecánicos lo cual por consecuencia va a olvidar con el tiempo, por lo que el estudiante memoriza el saber sin analizarlo ni relacionándolo con su entorno.

¿Cuál sería la estrategia para evitar un aprendizaje mecánico en el saber de la geometría tridimensional?, la propuesta es un manual didáctico en el que consiste en fases como la vivencia, marco teórico (contextualizado al entorno del estudiante), ejercitación y aplicación, estas últimas dos etapas en un enfoque de resolución de problemas implementando material tanto computacional como concreto.

¿Por qué un manual didáctico? Según (Hall & López, 2010) los manuales didácticos “persiguen un efecto facilitador con fines didácticos, dicho de otro modo, y según estas perspectivas, los manuales pretenden hacer fácil lo difícil y para ello sus autores alternarían expresiones científicas con lenguaje de todos los días”(pág. 174), con el fin de contextualizar el saber, que el estudiante lo asocie con su entorno con sus conocimientos previos, reorganice estos saberes generando una meta cognición.

Además la finalidad de un manual didáctico es brindar información de forma general, no posee contenido para alguien especializado, ya que no contiene opiniones o puntos de vista del autor, sino que expone y/o explica contenidos con un objetivo (Hall & López, 2010).

El manual didáctico que se pretende aplicar como estrategia de intervención en el aula, será abordado desde el pensamiento métrico – espacial, donde se busca que los estudiantes propicien y construyan su propio conocimiento a partir del uso de material tangible, concreto y tecnológico. A continuación, se detalla las características de este pensamiento matemático.

2.3.3 Hablemos Del Pensamiento Métrico Espacial

Otra pregunta que se puede plantear es ¿por qué un manual en geometría?, el área de la geometría se halla perdida dentro del currículo, ella en la mayoría de los casos se encuentra desplazada en los últimos contenidos del currículo y no ven la importancia de ella. La enseñanza de este saber tiene algunos objetivos generales los cuales el estudiante debe cumplir durante su formación, desarrollar una cultura geométrica en ellos es fundamental, ya que estos conocimientos geométricos los puede aplicar en la resolución de problemas de situaciones reales que pueden encontrar en distintas disciplinas e incluso en la cotidianidad, usando diferentes lenguajes y representaciones.(Araya & Alfaro, s. f.)

(Araya & Alfaro, s. f.) Menciona algo muy cierto “El desarrollo de la geometría ha estado relacionado con las necesidades del ser humano por comprender su mundo. La aplicación de ella en la vida cotidiana muchas veces pasa inadvertida durante la enseñanza de esta disciplina” pág. 115. Esta realidad es bastante lamentable, ya que la enseñanza de la geometría desarrolla en el estudiante un razonamiento lógico, habilidades como en la visualización, el pensamiento crítico y la intuición al resolver problemas, al realizar conjeturas, razonamientos y al argumentar en

procesos o demostraciones con mayor rigor matemático. Por lo anterior mencionado, se propone la relación entre la resolución de problemas con la geometría, es decir generar una relación entre los pensamientos métrico, geométrico-espacial y analítico-deductivo. Y esto nos lo corrobora Patiblanco:

La historia de la geometría nos muestra de qué manera ha sucedido su evolución en una dinámica soportada por la interacción entre procesos de visualización (ligados al pensamiento espacial), procesos de justificación (ligados al pensamiento deductivo) y aplicaciones instrumentales que se llevan a cabo con el objeto de resolver problemas de la vida cotidiana, las ciencias o la misma matemática, modelar el mundo para interpretarlo, ampliar los horizontes conceptuales con teorías construidas axiomáticamente e interrelacionar campos diversos de conocimiento buscando en ellos una estructura común, entre otras cosas. (Castiblanco et al., 2004, p. 9)

El objetivo de la enseñanza de esta rama de la matemática no es por cumplir el currículo y cuando esto sucede la idea no es exponerlo ante los estudiantes, es decir como una receta paso a paso, ni simplemente platearlas como figuras que se dibujan sobre un papel, el objetivo es que el estudiante aprenda a pensar lógicamente con la ayuda de un desarrollo métrico-espacial y visual-analítico. Existen otros objetivos resumidos por Hernández y Villalba (2001) como: describir y medir figuras como una base para la construcción de fenómenos del mundo, diseñar representaciones visuales para expresar conceptos que se aplican a otras áreas de las matemáticas e incluso de otras materias, enseñar un razonamiento deductivo, enseñar una forma deductiva de pensar y su aplicación en herramientas digitales computacionales.

Duval (1998), citado por Castiblanco et al., 2004, señala tres niveles de razonamiento en geometría:

- Nivel global de percepción visual, el cual nos permite relacionar figuras planas los cuales el estudiante dibuja con objetos físicos 3D como poliedros pirámides, entre otros.
- Nivel de percepción de elementos constitutivos, donde no solamente se percibe la imagen globalmente, sino formada por elementos de una misma dimensión o inferiores. En este nivel el estudiante debe establecer las relaciones entre los elementos que conforman una imagen.
- Nivel operativo de percepción visual, en el cual se puede “operar” sobre las figuras, es decir, permite la manipulación mental de los elementos constitutivos de ésta. Aquí es donde el estudiante desarrolla un nivel de análisis métrico-espacial, en realizar y relacionar operaciones matemáticas tanto en figuras 2D como 3D.

En el escenario de práctica se ha encontrado que el estudiante demuestra dificultad con el análisis de las geometrías, aún tienen la percepción de este como el análisis de figuras y no de un proceso más formal basado en razonamiento y análisis. Pero ¿a qué se debe esta problemática?, el estudiante manifiesta:

No le encuentra interés a esta área, no ve la aplicación a su cotidianidad y solo es una materia más a cumplir.

Es una materia con un amplio contenido que se enseña en un corto periodo de tiempo, por lo cual no alcanza a asimilar cada concepto, propiedades y procedimientos

Es muy complicada y teórica por lo tal es difícil de generar un análisis.

En la primaria y parte de su secundaria solo ha visto geometría plana, conceptos y propiedades los cuales no recuerdan

Reclaman que el docente solo ha implementado el tablero en su enseñanza, y las pocas veces que implementan otros materiales no le encuentra utilidad posterior.

El docente solo evalúa la parte conceptual en un examen final y no en el proceso de aprendizaje.

Por lo anterior la enseñanza de la geometría se encuentra en crisis, por lo tanto, nos conlleva a encontrar alternativas de solución. A continuación, se presentarán algunas ideas de algunos autores.

Báez e Iglesias (2007) señalan seis principios didácticos que consideran fundamentales dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría:

- Principio globalizador o interdisciplinar, que consiste en un acercamiento consciente a la realidad, donde todos los elementos están estrechamente relacionados entre sí. Es decir que los temas estén conectados de manera sucesiva para que el estudiante pueda realizar una relación de conceptos y desarrolle un carácter analítico.

- Integración del conocimiento, donde se parte de que el conocimiento no está dividido, sino que simboliza un saber integrado, lo que además envuelve una integración de los objetivos, contenidos, metodología y la evaluación. En esta idea el autor plantea marcar unos objetivos de aprendizaje donde en casa proceso se esté realizando una recolección de datos para el análisis de evaluación, implementado una metodología y diferentes didácticas de la geometría.

- Contextualización del conocimiento, lo que implica adaptar los conocimientos a las necesidades y características del estudiante a partir del uso de hechos concretos. Es decir, conceptualizar el contenido geométrico a la vida cotidiana de los estudiantes.

- Principio de flexibilidad, pues, aunque todo proceso educativo demanda de una planificación, de acuerdo a los estudiantes a los cuales está dirigido, su organización y administración debe ser adaptable a las necesidades de los educandos, sin desviarse del logro de y los objetivos propuestos. El docente debe tener en cuenta los factores externos que puedan variar el proceso de aprendizaje afectando los objetivos planteando, por tal es necesario el currículo flexible.

- Aprendizaje por descubrimiento, que implica que todo proceso de enseñanza debe considerar una participación activa del estudiante, que propicie la investigación, reflexión y búsqueda del conocimiento. Es importante que el docente durante la clase proponga situaciones problemas donde el estudiante realice procesos de análisis, investigación y reflexión para así activar la participación.

- Innovación de estrategias metodológicas, lo que “obliga” al docente a buscar y emplear estrategias metodológicas que incentiven al estudiante hacia la investigación, descubrimiento y construcción del aprendizaje. El papel del docente es el principal en el proceso de aprendizaje, es el encargado del proceso de enseñanza, tiene que analizar las situaciones en el aula t el alumno y las posibles que puedan suceder que afecten su currículo.

Por otra parte, Veloso (1998) [citado por Almeida, 2002] menciona:

- Integrar la historia de la geometría en su enseñanza, que permita al estudiante tener la noción de que existen otras geometrías. La epistemología es muy importante y el estudiante pueda comprender sus usos actuales y relacionarlos con sus futuras carreras universitarias.

- Buscar la conexión de la geometría con otras ramas de las matemáticas, con otras disciplinas como el arte y su aplicabilidad a contextos reales. Esta es una gran estrategia ya que,

aunque el estudiante no esté interesado en la geometría, siempre va a tener una materia preferida y una gran estrategia es relacionarla con el tema a enseñar para así generar un interés, se pueden implementar varias estrategias para esto, por ejemplo proyectos con materiales concretos y herramientas digitales.

Desde un marco pedagógico esta sesión del manual se va a manejar desde un campo de trabajo colaborativo.

Por los tiempos de pandemia a pesar de la educación virtual, se propone un desarrollo del manual de manera colaborativa entre docente-estudiante, estudiante-estudiante en los encuentros virtuales a través de una socialización, donde a través del dialogo se llegarán a generar aportes al tema y diferentes soluciones al problema para así proponer una transformación en el proceso de enseñanza y aprendizaje, fomentando las relaciones sociales en este difícil tiempo de pandemia, valores como el respeto, el compañerismo, la tolerancia y el pensamiento crítico analítico.

2.3.4 Implementación Del trabajo Colaborativo En El Aula – Vygotsky

Según (Peñaloza-Guerrero, s. f.). Desde el enfoque pedagógico, el estudiante, se concibe como ser humano. Es por naturaleza un ser social. En tal sentido, no aprende en solitario, sino que, por el contrario, su estructura de pensamiento, estará mediada por la influencia de los otros. Pág. 48. Lo anterior quiere decir que el conocimiento de una persona se construye y se desarrolla en conjunto, analizando una serie de diferentes perspectivas, por tal razón la comunicación e interacción con otros es fundamental para este proceso.

En el desarrollo de la guía, el docente trabaja como un medidor y los equipos serán entre los estudiantes, para así realizar el desarrollo del contenido con las experiencias y prácticas que se darán en el proceso.

El trabajo colaborativo se fundamenta esencialmente en los preceptos difundidos por Vygotsky (1995) que menciona:

“El aprendizaje despierta una variedad de procesos de desarrollo que son capaces de operar sólo cuando el niño interactúa con otras personas y en colaboración con sus compañeros”. (p.167).

En este sentido, el trabajo colaborativo es un camino viable para el docente donde ayuda al estudiante a despertar su interés frente al contenido y lo ayuda en su proceso de desarrollo social además del conceptual. Con esta estrategia cada persona dentro del aula de clase tiene un papel fundamental donde el docente es el guía, mediador e impulsor entre las interacciones de los estudiantes, mediadas por medio de exposiciones, charlas, discusiones en el proceso de resolver un problema todo mediado en socializaciones en el aula de clase logrando una construcción del conocimiento integral.

Falta aclarar que el contexto social es esencial en este proceso de aprendizaje, es decir, es contexto social de cada estudiante influye en las discusiones y/o socializaciones que se generan en el proceso de aprendizaje aclara Vygotsky en su postulado de aprendizaje colaborativo y cooperativo.

2.3.5 El Papel Del Docente En El Proceso De Enseñanza – Piaget

El postulado de Piaget menciona 3 niveles que el docente debe tener en cuenta al aplicar el trabajo colaborativo con el estudiante, los cuales se tienen que analizar para así lograr una transformación social. Según lo señala Wadsworth (1991) esos tres niveles son:

- Los esquemas del sujeto y los acontecimientos externos
- Los propios esquemas del sujeto

-Integración jerárquica de esquemas diferenciados.

-Los tres niveles deben ser analizados en busca de un equilibrio de cada uno, y así observar los esquemas mentales del estudiante durante el proceso de construcción del conocimiento que influenciará en la formación integral. Para ello es necesario un diseño de estrategias que ayude a desarrollar la información mencionada. (Peñaloza-Guerrero, s. f.)

En las estrategias propuestas en la aplicación del trabajo colaborativo, el docente juega un papel fundamental en el proceso de aprendizaje del estudiante, como lo menciona Vygotsky (1995) “lo que un niño puede hacer hoy con la ayuda de alguien, es capaz mañana de hacerlo por sí sólo” (p. 5). Esto quiere decir que el docente debe brindar un acompañamiento y guía en el proceso del estudiante generando una formación integral y el día de mañana lo aplique de manera individual.

Para estos el docente debe tener en cuenta los siguientes aspectos según (Peñaloza-Guerrero, s. f. p. 53)

1. La asignación o actividad, debe ser una responsabilidad compartida por todos los integrantes del equipo.

2. El docente debe señalar los parámetros de evaluación, esto con el fin de tener un desarrollo procedimental de las tareas ejecutadas durante las clases.

3. En las actividades grupales siempre es importante mantener un ambiente cálido, agradable y de respeto

4. El docente debe ser mediador del proceso, porque facilita la relación entre los estudiantes y los acerca al conocimiento.

5. Se debe evitar la descontextualización en opiniones que estén fuera de lo tratado, con el fin de no tener momentos de discordia o malentendidos.

6. El docente debe incitar al diálogo entre los integrantes del equipo, para lograr satisfacer las distintas necesidades y llegar a acuerdos.

7. Es necesario incentivar la autorregulación de los miembros del equipo, para promover la autonomía, participación y desarrollo de las actividades propuestas.

Se debe aclarar que lo anterior suena un poco dificultoso por los tiempos de pandemia, pero en la virtualidad con ayuda de las redes sociales y diferentes aplicaciones (web 2.0) se puede lograr estos aspectos, creando las correctas estrategias.

Las estrategias planteadas deben ser diseñadas teniendo en cuenta varios puntos, el entorno social los cuales afecta a los esquemas mentales del estudiante y el desarrollo cognitivo del estudiante en la resolución de problemas.

Teoría del desarrollo cognitivo de Piaget

Piaget dividió por etapas el desarrollo cognitivo de una persona, las etapas son: etapas sensomotoras, etapa preoperacional, etapa de las operaciones concretas y etapas de las operaciones formales. (Linares, s. f.)

Por lo que el proyecto está enfocado en estudiantes de noveno, se analizará la etapa cognitiva de operaciones formales, en esta etapa Piaget citado por (Linares, s. f.) Explica que el estudiante aprende sistemas abstractos del pensamiento, en este caso métrico-espacial, y estos aprendizajes le ayudarán a desarrollar su lógica y razonamiento científico y proporcional.

Cuando el estudiante pasa de la etapa de operaciones concretas a operaciones formales, tiene la capacidad de realizar procesos más analíticos, lógicos, abstractos, gracias a sus

herramientas cognitivas desarrolladas. Pasará a ver su ambiente más allá de lo físico, ya que tendrá la capacidad de realizar discusiones, opiniones e hipótesis de ambientes o contexto a los cuales puedan o pudieron ser diferentes a la actualidad, además de realizar análisis o procesos de lógica al resolver un problema matemático.

Piaget explica que el estudiante a través de su edad y experiencias, el niño va formando esquemas del su propio mundo conociéndolo de forma física, mientras que adolescentes o niños con mayor edad los cuales se están enfocados en este proyecto, tienen la capacidad de usar esos esquemas en operaciones mentales, análisis a través de símbolos como las imágenes, por lo tanto cada vez que el estudiante se desarrolla, empleará esquemas más complejos y abstractos que ayudara a su desarrollo cognitivo, pero hay que mencionar que el punto de este proceso de madures no es solo formar esquemas cada vez más avanzados sino reorganizarlos al mismo tiempo. (Linares, s. f.)

Otro factor de aprendizaje que se va a implementar y reforzar a los estudiantes es la resolución de problemas y los problemas planteados van a ser relacionados con figuras tridimensionales para así fomentar el pensamiento analítico, deductivo en un campo visual.

2.3.6 Resolución De Problemas Como Didáctica En El Pensamiento Métrico-Espacial

Para lograr este desarrollo en la resolución de problemas del estudiante, existen algunos principios como: Organización y adaptación estos principios Piaget los llama funciones invariables ya que estos dos principios son los que rigen el desarrollo. Todo ser humano está predispuesto a la organización de esquemas buscando un equilibrio entre ellos, que surgen durante un ambiente y maduración, al mismo tiempo pasa por un proceso de adaptación el cual

es lo más humano, todo ser humano tiene la capacidad de adaptarse a cualquier ambiente que permita el desarrollo y ajustando estructuras mentales. Los otros dos principios son la asimilación y a la acomodación, en este principio se realiza una descripción del desarrollo del estudiante según su entorno, este principio explica como el estudiante toma nueva información de su ambiente y forma nuevos esquemas realizando un proceso de asimilación con sus esquemas actuales, cuando este nuevo esquema y el actual no encajan no se logra un equilibrio por lo tanto se pasa al principio de acomodación, donde el docente toma en cuenta el nivel cognitivo del estudiante y trata de modificar estos esquemas para que haya un equilibrio.

¿Qué debe tener en cuenta el docente al aplicar estrategias que ayudan al estudiante a crear y relacionar sus esquemas?, Un punto a analizar es el procesamiento de la información del estudiante.

Merril y Gagné- Procesamiento de la información

Gagné menciona que existe un gran problema con el proceso de enseñanza, se sabe que el estudiante es un receptor pasivo y a veces más de lo que espera el docente, por esta razón este no analiza el proceso de asimilación del estudiante, ignorando el carácter interactivo del proceso educativo.(Zabaleta, s. f.)

Para que el estudiante realice el proceso de asimilación de información para lograr solucionar un problema matemático se debe tener en cuenta los siguientes aspectos según (Zabaleta, s. f.):

El docente tiene la tarea de establecer metas y objetivos al estudiante, para que este busque las respuestas en el contenido preparado en un proceso de asimilación.

El docente debe realizar un buen contenido ante el tema, contextualizado y enfocado a sus objetivos planteados repasando los múltiples elementos que intervienen en el desarrollo del procesamiento de información del estudiante.

Se debe dejar de reforzar la conducta del estudiante, este al inicio generará respuestas hasta que habitualmente se agotará de la presión y dejará de hacerlas.

Generar motivación y/o estímulos, si se refuerza en este aspecto al estudiante, después de un tiempo este generará respuestas de forma independiente y automática.

Generar consecuencias, dejar en claro al estudiante las futuras consecuencias ante una mala conducta, para así lograr un posible cambio en estas.

El modelo de procesamiento y asimilación de la información al aplicarla a la resolución de problemas, debe tener una serie de instrucciones estructuradas y/u organizadas donde se relacionen con la unidad de formación. Merrill (1991) adiciona que es necesario modelos mentales variados para el resultado de logros de aprendizaje.

El aprendizaje a través de este modelo impulsa al estudiante a considerar varias formas de pensar, de perspectivas y diferentes conocimientos, con la motivación generada por el docente se generará un interés por el problema generando una construcción y organización de una actividad mental por el este.

El aprendizaje generado se realiza en base de procesos y esto brinda una serie de información organizada para ser analizada y modificada que ayudará a tener respuestas y conclusiones acerca de los objetivos planteados en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Según Merrill (1991), el aprendizaje se debe lograr a través de contacto entre estudiante-docentes y teniendo como intermediario el entorno social y educativo, el docente tiene como

tarea lograr este aprendizaje progresivo y por tal se les hace obligatorio en modificar el entorno para lograr los objetivos planteados.

Para emplear el modelo de procesamiento y asimilación por Merrill y Gagné en la resolución de problemas, se debe realizar los siguientes pasos o procesos en cada etapa de aprendizaje teniendo en cuenta eventos externos que puedan influir en el proceso mencionado (Zabaleta, s. f. P.26):

Tabla 1 procesos en cada etapa de aprendizaje teniendo en cuenta eventos externos que puedan influir en el proceso

Etapas del aprendizaje	Procesos	Eventos externos que influyen en el aprendizaje
La motivación	Las expectativas	Comunicar los objetivos a realizarse. Confirmar expectativas a través de experiencias propias o ajenas válidas.
La comprensión	La atención y/o percepción selectiva	Intervenir en la estimulación y atraer su atención. Aprendizaje a priori de la Percepción Señalamientos diferenciados para la percepción
La adquisición	El cifrado y/o acceso a la acumulación	Organización de proyectos que se sugieran para el cifrado
La retención	Almacenar	Elementos desconocidos
Recordar	La recuperación	Organización de proyectos para su recuperación. Señalamientos para su recuperación.

La generalización	La transferencia	Diversos contextos orientados a recuperar.
La actuación	La respuesta	Casuística de actividades o Actuación. Conocido como “ejemplos”.
La retroalimentación	El fortalecimiento	Retroalimentación que permita comparar modelos a través de eventos informativos

Fuente: Adaptada de Las fases de un acto de aprendizaje, y los procesos asociados con ellas (Gagné, 1975)

2.3.7 Estrategias Para La Solución De Un Problema Matemático – Polya, Schoenfeld, Bransford y Stein

Además, cabe mencionar uno de los grandes autores que cambio la enseñanza de las matemáticas, Pólya estableció unos parámetros, unos pasos a pasos, unas estrategias en su libro “how to solve it” para ayudar al estudiante a resolver un problema matemático, el cual hoy en día se toma como una de las didácticas por su gran impacto de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Pólya establece los siguientes pasos:

1. Entender el problema
2. Configurar un plan (conoce y desarrollar una heurística)
3. Ejecutar el plan
4. Mirar hacia atrás

En cada etapa el estudiante realiza un procedimiento de razonamiento, por tal se le conoce como “razonamiento pausal” ya que realiza análisis, conjetura hipótesis, evalúa sus conocimientos y estrategias con el objetivo de desarrollar y solucionar un problema matemático.

Por lo anterior mencionado, se considera la resolución de problemas con el método de Pólya como una estrategia didáctica, este ayuda a desarrollar en el estudiante habilidades de análisis, de percepción y cognitivos en el área.

Chavarría, J., & Alfaro, mencionan que Schoenfeld en su libro “Mathematical Problem Solving” (1985), habla de que las 4 estrategias de Pólya no son suficientes, ya que el proceso de solucionar un problema matemático es más complejo de lo que aparenta, así que existen más factores. (2005)

Chavarría, J., & Alfaro, C. cita a Schoenfeld, donde establece la existencia de cuatro aspectos que intervienen en el proceso de resolución de problemas: los recursos (entendidos como conocimientos previos, o bien, el dominio del conocimiento), las heurísticas (estrategias cognitivas), el control (estrategias metacognitivas) y el sistema de creencias” (2005, p. 3)

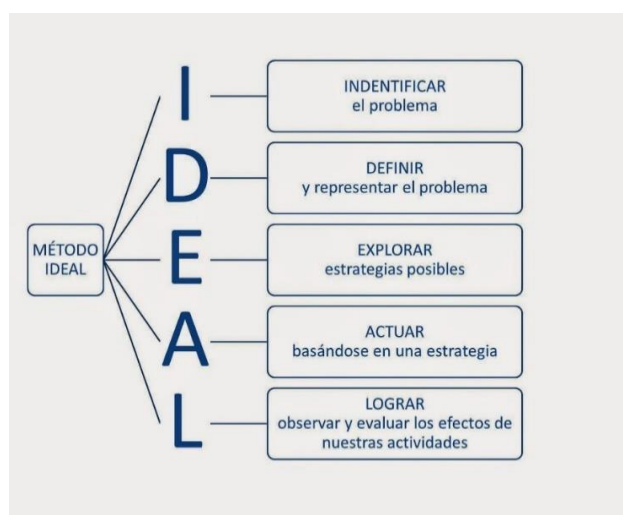
Lo que él instituye es que el estudiante tiene que analizar sus saberes previos, después aplicar una heurística (son los planteamientos que el estudiante se establece para solucionar un problema) y en este proceso debe tener unas creencias y un control. ¿A qué se refiere Schoenfeld con creencias y control? Se ha evidenciado en el aula de clase unas creencias que el estudiante posee, este cree que un problema matemático se debe resolver en menos de 10 minutos o por lo tanto no tiene solución, que el problema matemático no tiene ninguna relación a su cotidianidad y que solo los genios son los que descubren algo nuevo en la matemática. En estas creencias es

donde el estudiante debe tener un control de sus convicciones, de sí mismo y de su trabajo.

Chavarría, J., & Alfaro, C. (2005).

Otros autores importantes en el tema de resolución de problemas son Bransford y Stein, ellos establecen el método ideal:

Figura 2. Método Ideal, definición



Recuperado de: <https://acortar.link/vWTSoi>

En opinión este método se obtiene como resultado de autores pioneros en el tema tal como Pólya y Schoenfeld, ya que se toma en cuenta varios de sus aspectos. En Identificar el problema, Pólya lo plantea como Entender el problema, en Definir el problema el estudiante debe analizar sus saberes previos como lo menciona Schoenfeld, Explorar estrategias es donde ambos autores mencionados establecen las heurísticas, en Actuar es decir ejecutar el plan teniendo unas creencias y control y por lo último Lograr donde se mira hacia atrás los efectos de la actividad.

2.3.8 Cómo Se Aprende La Geometría

Para saber cómo se aprende la geometría, primero tenemos que analizar su origen, su historia. El gran fundador de la geometría fue Euclides, por él se llama la famosa geometría Euclidiana. Él fue un griego conocido como “el padre de la geometría” y nos dejó 13 libros o capítulos sobre la geometría que conocemos hoy en día en las aulas de clase.

Tabla 2 Geometría Euclidiana

LIBRO	Contenido del libro
LIBRO 1	Los fundamentos de la geometría plana, teoría de los triángulos, paralelas y áreas
LIBRO 2	Algebra geométrica
LIBRO 3	Teoría de la circunferencia
LIBRO 4	Figuras inscritas, circunscritas
LIBRO 5	Teoría de las proporciones abstractas
LIBRO 6	Figuras geométricas semejantes y proporcionales
LIBRO 7	Fundamento a la teoría de los números
LIBRO 8	Continuación de proporciones a teoría de los números
LIBRO 9	Teoría de los números
LIBRO 10	Clasificación de los inconmensurables
LIBRO 11	Geometría de los sólidos
LIBRO 12	Medición de figuras
LIBRO 13	Sólidos regulares

Autoría Propia 2021

El gran dilema del docente es ¿cómo pueden analizar el proceso y desarrollo del aprendizaje y enseñanza de la geometría por parte del estudiante y docente?, en este factor se toma a un gran autor y su teoría La Teoría de Van Hiele.

2.3.8.1 Descripción Del Desarrollo Del Pensamiento Métrico- Espacial Del Estudiante

La Teoría de Van Hiele es una gran herramienta para los docentes la cual ayuda a explicar el desarrollo y análisis de la enseñanza y aprendizaje de la geometría por medio de 5 niveles.

El modelo de Van Hiele abarca dos aspectos básicos según lo menciona Jaime (1993):

- Descriptivo: El docente identifica y analiza diferentes tipos de razonamientos geométricos por parte del estudiante para así valorar su proceso.

- Instructivo: El docente tiene la tarea de establecer pautas los cuales el estudiante debe seguir según de los 5 niveles en el que se encuentre para así generar y favorecer al avance de su razonamiento geométrico.

Nivel 1: Visualización

Nivel 2: Análisis

Nivel 3: Clasificación

Nivel 4: Deducción informal

Nivel 5: Rigor

El estudiante pasa de un nivel a otro de manera ascendente según los parámetros establecido por el docente desarrollando y aumentando su nivel de razonamiento y conocimiento geométrico.

Las fases de aprendizaje correspondientes al Modelo de Van Hiele son las siguientes según las plantea (Araya, R. G., & Alfaro, 2013):

Fase 1: Información.

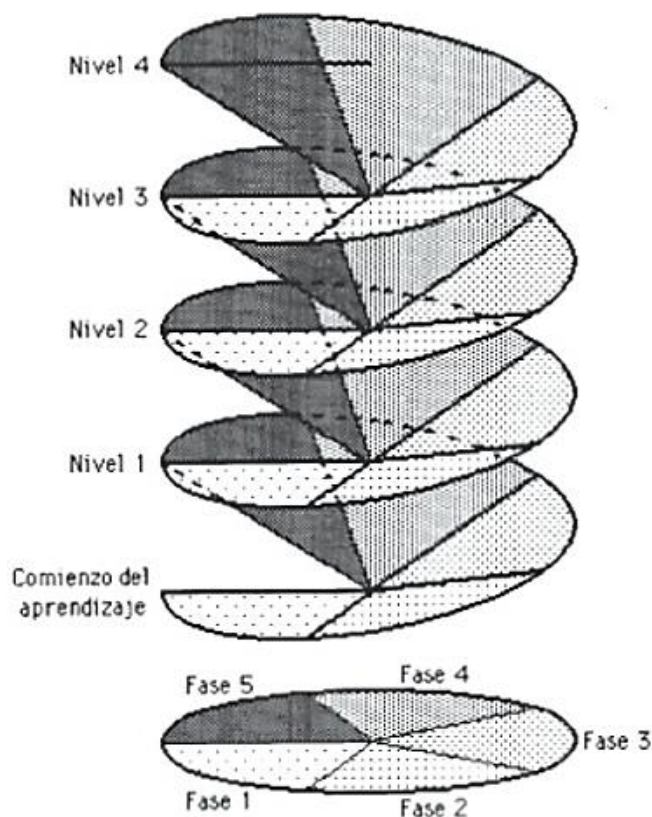
Fase 2: Orientación dirigida.

Fase 3: Explicitación.

Fase 4: Orientación libre.

Fase 5: Integración.

Figura 3. Desarrollo de las fases de aprendizaje y los niveles de razonamientos.



Tomada de Gutiérrez y Jaime (1991)

La siguiente descripción de los niveles del razonamiento geométrico de Van Hiele se ha tomado de los Lineamientos Curriculares del (MEN)

El nivel 1 es conocida como la familiarización o visualización por parte del estudiante. En esta primera fase el estudiante recibe la información de las figuras geométricas de manera visual pero aún no establece una relación entre ellas y demás propiedades.

El nivel 2 se empieza un nivel de análisis de las propiedades de las figuras gracias a una orientación dirigida del docente, estableciendo diferentes didácticas como el dibujo, mediciones,

construcción de modelos, etc. Por lo tanto, en este nivel se quiere que el estudiante inicie un razonamiento de la relación de las propiedades con las figuras geométricas.

El nivel 3 es también conocido como el ordenamiento o clasificación. Aquí el estudiante empieza a clasificar y ordenar las definiciones de manera más explícita, es decir que este genera un proceso de clasificación de las figuras geométricas jerárquicamente ordenando sus propiedades, siempre generando argumentos informales para justificar su clasificación. Aquí cabe mencionar que en esta fase la guía y la ayuda del docente es esencial.

El nivel 4 en esta fase se desea generar un razonamiento deductivo, se necesita un alto grado de razonamiento lógico ya que el estudiante debe razonar ante los axiomas, teoremas y definiciones. El estudiante se orienta libremente en su propio razonamiento generando sus propias secuencias que lo hacen llegar a un mismo resultado, pero cabe mencionar que en esta etapa el estudiante aun no entiende con gran severidad las demostraciones aun no genera un razonamiento abstracto.

El nivel 5 es de gran rigor, es donde el estudiante integra axiomas, definiciones y teoremas manipulándolos para generar formalmente un razonamiento en el estudio de la geometría sin el uso de un modelo de referencia, es decir que desarrolla una geometría abstracta.

(Fortuny y Pérez (1997), Gutiérrez y Jaime (1991) como se citó en Vargas & Araya, 2013) afirman que es el último nivel solo se desarrolla en el estudiante universitario. También en los lineamientos curriculares el (MEN) afirma según algunos estudios que la población estudiantil media no alcanza los dos últimos niveles, ya que se necesita y exige un nivel matemático elevado.

La Importancia De Las Representaciones Visuales En La Geometría. La enseñanza es promovido desde el trabajo del docente en el modelamiento matemático basado en Fernando Hitt, desde la aplicación de una situación problema con un acercamiento sociocultural, promoviendo pensamientos diversificados, promoviendo representaciones funcionales, espontaneas e institucionales las cuales se demandan un conversión y tratamiento, todo en un trabajo colaborativo todo con el fin de a un pensamiento dirigido que se puedan articular entre representaciones para así construir conceptos matemáticos.(Hitt & Quiroz Rivera, 2017)

Lo que plantea Fernando Hitt es la importancia del análisis de las diferentes representaciones que los estudiantes plantean al solucionar un problema dado por el docente en actividades individuales y grupales, ya que las representaciones proyectadas por la intuición y saber son de gran importancia en el proceso de aprendizaje, por lo que estas demuestran la idea y manera de que el estudiante entiende o comprende el problema es decir muestra la concepción.

Así que lo que se propone es presentar ante al estudiante diferentes situaciones problemas donde en su proceso de solución desarrolle representaciones geométricas por medio de material concreto y/o tecnología computacional para que el docente realice un proceso de análisis ante diferentes concepciones y guiar al estudiante a la construcción de conceptos geométricos todo con el fin de lograr una meta inicial de aprendizaje.

Es de gran importancia el trabajo colaborativo, la comunicación entre docente- estudiante y estudiante-estudiante para lograr una evolución de las representaciones de tal manera que los estudiantes obtengan un concepto similar a lo que espera el docente. (Hitt & Quiroz Rivera, 2017)

Por lo mencionado anteriormente se establece que “es realmente necesario profundizar hacia el estudio de este tipo de representaciones dentro de la investigación en didáctica de las matemáticas con el fin de definir las de manera adecuada y cada vez más completa” (Hitt & Quiroz Rivera, 2017, p.173) con el fin de evaluar las estrategias planteadas por el docente en la resolución de problemas.

Capítulo 3. Diseño Metodológico.

3.1 Introducción

Introducción

El estudio investigativo, permite resaltar los procesos metodológicos que se tuvieron en cuenta al momento de la intervención de aula con la enseñanza del pensamiento métrico – espacial en la resolución de problemas de figuras tridimensionales en el cálculo de áreas totales y volúmenes.

Toda la investigación se apoya en las teorías desde en un marco pedagógico a Ausubel desde su teoría del aprendizaje significativo, Ronny Gamba Araya en la construcción de un manual didáctico, Vygotsky en su trabajo colaborativo y Piaget. Desde un marco didáctico a Van hiele como herramienta de análisis del desarrollo geométrico del estudiante, a Polya, Bransford y Stein desde sus teorías de resolución de problemas y a Fernando Hitt con sus representaciones visuales. Por último, desde un marco disciplina se menciona a Euclides con la geometría plana y a Alan Schoenfeld en la heurística de la resolución de problemas. Fundamentales para el diseño, desarrollo y análisis de resultados de la presente investigación.

Los instrumentos que se integraron en la presente investigación, da pío para resaltar el manual de geometría creado y diseñado por la autora, el cual permite la interacción y la participación por parte de los estudiantes, en el que se documentan unos resultados desde un análisis cualitativo que permiten reconocer las fortalezas en el conocimiento adquirido por los estudiantes de grado noveno en la intervención de guías diseñadas y contenidas dentro de un manual, donde su mayor propósito es mejorar los resultados de las pruebas de estado.

3.2 Descripción general del estudio

Se realizó un diagnóstico en estudiantes de grado noveno en la Institución Educativa Andrés Bello donde se evidencio mediante una actividad de resolución de problemas de diferentes pensamiento matemáticos, falencias en la solución de problemas de pensamiento métrico-espacial, por lo tanto se realizó un mapeo de diferentes autores que fundamenten y argumenten el diseño del material de intervención (manual didáctico) en un modelo de educación activa urbana que ayude al desarrollo del pensamiento métrico espacial.

Para desarrollar el pensamiento métrico- espacial en la resolución de problemas con figuras 3D, se partió desde una serie de guías (recopiladas en el manual) de geometría plana es decir geometría euclidiana para que el estudiante cuente con unos saber previos que pueda relacionar con figuras 3D.

En el desarrollo de la guía se presentan varias actividades donde exige una interacción entre docente-estudiante, y con la implementación de material en concreto y aplicaciones tecnológicas se forman y argumentan conceptos geométricos los cuales se asimilan en el proceso de la resolución de problemas en coordinación y apoyo con el docente y demás estudiantes, presentándose unas series representaciones que demuestran el nivel de concepción del estudiante.

Como se ha mencionado anterior mente el propósito de desarrollar el pensamiento métrico-espacial con la implementación de resoluciones de problemas es mejorar los resultados de las pruebas de estado. Así que al concluir las actividades contenidas en el manual tanto como en la parte de la geometría plana como la de los cuerpos geométricos, se presenta una actividad que contiene 12 preguntas tipo Icfes las cuales ya han sido presentadas en estas pruebas del

estado, y así analizar el desarrollo métrico-espacial teniendo en cuenta las representaciones visuales las cuales el estudiante plantea como justificación a su respuesta.

3.2.1 Enfoque

El enfoque de la investigación es cualitativo, el cual se implementa para la recolección y análisis de los datos obtenidos durante el proceso de investigación el cual llevará a responder la pregunta problema y las preguntas auxiliares planteadas desde un inicio.

El proceso de recolección de datos será por medio de una observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, evaluación de las experiencias del estudiante, es decir información simbólica verbal, audiovisual o en forma de texto e imágenes. (Hernández Sampieri et al., 2014)

3.2.2 Tipo de estudio

El trabajo de investigación permite recolectar información a partir de la intervención que se implementa con el manual geométrico, donde se documenta y se describe detalladamente el desarrollo de las actividades y el progreso que logran los estudiantes con dichas actividades, reconociendo las fases 1, 2 y 3 de Van Hiele, mediante el uso de material en concreto, aplicaciones tecnológicas y la resolución de problemas obteniendo una serie de representaciones de las concepciones del estudiante.

Por lo tanto, el tipo de estudio es descriptivo, el cual tiene como objetivo “especificar propiedades y características importantes de cualquier fenómeno que se analice, describiendo las tendencias de un grupo o población” (Hernández Sampieri et al., 2014, p.92)

3.3 Identificación de los sujetos de investigación

El proyecto de investigación se desarrolla en la Institución educativa Andrés Bello está ubicado en la Calle 27 # 32 a 3 / Barrio El nevado en la ciudad de Manizales Caldas y cuenta con un modelo pedagógico de Escuela Activa Urbana.

El grupo en el cual se desarrolla la investigación cuenta con estudiantes de básica secundaria de grado noveno, en la ciudad de Manizales. La población es de 55 estudiantes, 22 niñas y 33 jóvenes, entre las edades de 13 a 18 años. De Los 55 estudiantes, solo 30 estudiantes en promedio tienen la posibilidad de conexión wifi o datos para conectarse a las clases que se orientan por la plataforma Google meet.

La mayoría de los estudiantes no cuentan con computador, sino con dispositivo celular con suficiente Wifi y/o datos.

Los otros 25 estudiantes trabajan por vía whatsapp, con guías diseñadas por la docente y videos que se envían durante las clases virtuales, donde algunos lo hacen por medio de celulares de sus padres o familiares

Cabe mencionar que la última parte del manual didáctico se ha realizado de manera presencial, ya que la Institución cuenta con las medidas de bioseguridad las cuales permitieron culminar con la virtualidad y proceder con la presente investigación de manera presencial.

Es importante aclarar que esta investigación ha contado con el tiempo suficiente para el desarrollo de toda la geometría plana para llegar al tema de figuras tridimensionales y dar solución a problemas de contextos reales.

3.4 Estrategia metodológica

El desarrollo metodológico de la investigación, se orienta a partir del diseño y la creación del manual didáctico para desarrollar el pensamiento métrico espacial en estudiantes de grado noveno a través de resolución de problemas de figuras tridimensionales, el cual se implementa con estudiantes de grado noveno, considerando diferentes estrategias didácticas que permitan la manipulación de material en concreto, incorporación de tecnología computacional, el desarrollo de guías de trabajo presentes en dicho manual y finalmente dar solución a situaciones problema que se consideran y se plantean desde el contexto; todo esto se genera a partir del propósito inicial que implica fortalecer la enseñanza de la geometría en grado noveno, de acuerdo a los lineamientos curriculares del MEN y lo estipulado en la malla curricular de la I. E. Andrés Bello, para mejorar no solo los conocimientos aplicados, sino los resultados de las prueba saber.

Para lograr este objetivo se da respuesta considerando acciones que faciliten desde el estudio propuesto en la presente investigación a los objetivos específicos, los cuales se presentan a continuación:

El primer objetivo específico *identificar las propiedades y relaciones geométricas empleadas en las figuras bidimensionales a través de un taller diagnóstico*, donde se busca que el estudiante pueda revisar sus conocimientos previos como lo menciona Ausubel (1983) en el que considera que un nuevo conocimiento depende de la estructura cognitiva previa del estudiante, es decir, que este empieza a organizar y relacionar los saberes previos con un saber nuevo generando un aprendizaje significativo

Para hacer el análisis del taller diagnóstico implementado (Ver Apéndice A), se basó en resolución de problemas de diferentes pensamientos matemáticos, donde se evidencia un déficit

muy alto en el pensamiento métrico espacial. Dichos resultados se analizan en la siguiente tabla, considerando la escala de valoración implementada por la I. E Andrés Bello

Tabla 3. Escala de valoración

Superior	Alto	Básico	Bajo
4.7 a 5.	4.1 a 4.6	3.0 a 3.9	0.1 a 2.9

Nota: Escala de valoración según el SIEE de la I. E. Andrés Bello

Los resultados se verifican de acuerdo a las ponderaciones:

El siguiente objetivo pretende *diseñar un manual didáctico con el uso de material concreto y tecnología computacional para la comprensión de objetos tridimensionales* el cual se puede verificar en el (Apéndice B).

La manuela didáctica es una recopilación de guías propuestas en geometría plana que conlleva a la geometría de cuerpos geométricos, diseñado en un modelo de educación activa urbana, el cual cada guía inicia con una vivencia donde se plantea un problema para que el estudiante de acuerdo con sus pre saberes pueda demostrar sus conocimientos, actitudes, habilidades y expectativas del tema a tratar los cuales se relacionarán con el tema a ver; después se pasa a la fundamentación la cual presenta la parte teórica al tema, presenta la teoría, leyes, conceptos, etc.; por consiguiente está la ejercitación el cual es una serie de actividades propuestas por el docente ya sea de manera individual o cooperativo entre estudiante-estudiante estudiante-docente, donde se pone en práctica las teorías en el capítulo anterior; y finalmente está la aplicación, en el cual se planteas problemas contextualizadas a la cotidianidad del estudiante. Cabe mencionar que se presentan actividades complementarias donde pueda profundizar los conceptos y procedimientos.

Posteriormente, se busca *aplicar conjeturas y semejanzas en la relación de figuras bidimensionales a objetos tridimensionales en la solución de problemas diseñados en el manual didáctico*, esto se da desde la implementación y la intervención en el aula.

El análisis de cada uno de los talleres aplicados según lo considerado en el manual se da a través de una relación entre las teorías expuestas desde la didáctica específica de la geometría y la didáctica desde la enseñanza de las matemáticas.

Esta información se puede verificar a partir de registros fotográficos, pantallazos de las clases virtuales y presenciales (Apéndice C)

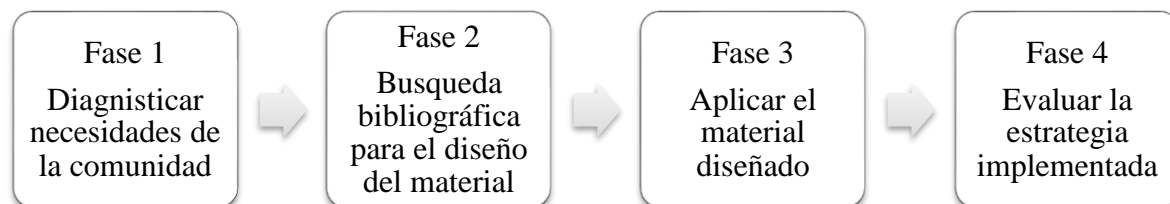
Finalmente, es indispensable *evaluar la estrategia del manual didáctico en términos del conocimiento construido por el estudiante en la comprensión de objetos tridimensionales* donde se analiza la información presentada en el manual dando solución a problemas de la geometría tridimensional (Apéndice D) y se tiene una aplicación de prueba saber para fortalecer las competencias estipuladas en los estándares básicos de competencias (Apéndice E). También la valoración por parte de pares expertos, como lo son los docentes de la I. E. Andrés Bello, quien cuenta con 4 docentes en el área de las matemáticas, y 3 de ellos tendrán una entrevista para analizar las estrategias propuestas en el manual didáctico creado para implementar en el aula. Las preguntas hechas pueden contemplarse en el apéndice F.

3.5 Fases de estudio

En la figura 4, se puede evidenciar las fases de investigación desarrolladas durante el estudio investigativo. En cada una de las fases se buscó generar las estrategias que permitan

evidenciar las acciones implementadas para este trabajo académico, el cual se pueden corroborar en los análisis de los resultados.

Figura 4. Fases de estudio



Autoría Propia. (2021)

Capítulo 4. Resultados y discusión.

4.1 Introducción

En el siguiente capítulo se busca realizar un análisis de tipo cualitativo y una metodología descriptiva, por medio de la observación se ha evidenciado la dificultad que presentan los estudiantes en el área de la geometría para la resolución de problemas del pensamiento métrico-espacial. Se tiene el saber previo del estudiante, a partir de lo que ya conoce y se fortalece el pensamiento métrico-espacial desde un aprendizaje con material concreto, ejercicios de aplicación, fichas didácticas y uso de herramientas TIC como el software GeoGebra 2.0, entre otros.

La población es una muestra de 55 estudiantes del grado noveno de la institución educativa Andrés Bello en Manizales Caldas. El grupo en general demostró falencias en la resolución de problemas respecto al pensamiento métrico-espacial, y se caracterizan por el gusto hacia el nuevo aprendizaje y disfrutan de toda actividad diversa que se les presente.

4.2 Análisis de prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica consiste en 16 preguntas, las cuales se dividen en 2 tipos de pensamientos, el numérico-variacional y el métrico-espacial.

En esta actividad el estudiante con ayuda del docente resuelve de manera cooperativa los problemas planteados y se solucionan algunas inquietudes con el fin de nivelar el curso. Ausubel menciona que el desarrollo de un nuevo conocimiento depende de la estructura cognitiva previa del estudiante, es decir, que este empieza a organizar y relacionar los saberes previos con un saber nuevo con el fin de generar un aprendizaje, pero debemos recordar que el acompañamiento del docente en cada proceso es fundamental para lograr este objetivo.

Durante el desarrollo de la prueba diagnóstica, se evidencian dificultades al resolver por parte del estudiante los problemas del pensamiento métrico-espacial, a pesar que el docente estuvo presente en toda la actividad como guía y mediador, el estudiante no tuvo las bases necesarias ni suficientes para resolver los puntos de ese pensamiento. En la indagación con los estudiantes se percibe que el estudiante no ha tenido un aprendizaje formativo en el área de la geometría, lo que conlleva a no tener el conocimiento básico de los elementos, propiedades y aplicaciones que suelen suscitar en diferentes contextos.

De acuerdo con lo anterior mencionado, en la tabla 4 se pueden observar los resultados de la prueba diagnóstica que desarrollaron los 55 estudiantes de grado noveno, considerando que, durante la prueba, los estudiantes iban teniendo algunas explicaciones, permitiendo para algunos recordar temáticas mientras que para otros no es suficiente y deben marcar respuestas de manera incorrecta porque no se tienen las bases.

Tabla 4. Resultados taller diagnóstico de los pensamientos matemáticos

Escala de valoración: Pensamientos matemáticos	Número de estudiantes
SUPERIOR (4.7 a 5.0)	26
ALTO (4.0 a 4.6)	11
BÁSICO (3.0 a 3.9)	11
BAJO (0.0 a 2.9)	7
Total, estudiantes	55

Autoría propia (2021)

La necesidad de esta investigación nace ya que en las preguntas de la 10 a la 16 fueron sobre el pensamiento métrico espacial, donde se evidencia que la mayoría de los estudiantes tenían dudas en temas puntuales de la geometría, como poliedros y cuerpos redondos, con una dificultad mayor en la que no se tienen claros los conceptos básicos de ángulos.

A continuación, se describe lo ocurrido en las preguntas enfocadas en la geometría en la prueba diagnóstica la cual puede verse en el (Apéndice A).

La pregunta 10 consiste en un sólido que se obtiene al girar un triángulo rectángulo sobre uno de los catetos. En esta pregunta el estudiante no podía analizar el problema, así que el docente tuvo la intervención de dar la opción de usar material tangible, de armar un triángulo rectángulo y realizar el movimiento para así observar el sólido formado de manera abstracta. De 55 estudiantes, 31 estudiantes obtuvieron respuestas incorrectas ya que no pudieron visualizar la figura.

La pregunta 11 se basa en saber cuál de las siguientes figuras (cilindro, esfera, cono y pirámide), no es un sólido de revolución. El estudiante ante esta pregunta no contaba con el significado de la propiedad de un sólido de revolución, por lo tanto, el docente tuvo que realizar una intervención de explicar este concepto como un cuerpo geométrico que se puede formar haciendo girar una superficie plana entorno a una recta, es decir un eje. A pesar de la intervención del docente, 30 estudiantes de 55 obtuvieron respuesta incorrecta al no comprender el concepto, mencionaba que no imagina algo plano girando en un eje y que al tiempo se forme un cuerpo 3D.

Los 25 estudiantes que obtuvieron la respuesta correcta mencionaron que este concepto tiene relación al ejercicio anterior donde se observa la formación de un cono obtenida de una figura plana (triángulo rectángulo) al girar sobre un eje. Así que al analizar el proceso de rotación llegaron a la conclusión de que el cuerpo debería tener una base circular, por lo tanto, la respuesta era la pirámide.

La pregunta número 12 contiene dos pentágonos de diferente tamaño y con ángulos iguales. Esta pregunta menciona 5 afirmaciones y el estudiante debe seleccionar la verdadera respecto a las figuras. Estas afirmaciones presentaban conceptos de polígonos, lados y ángulos tanto semejantes como congruentes.

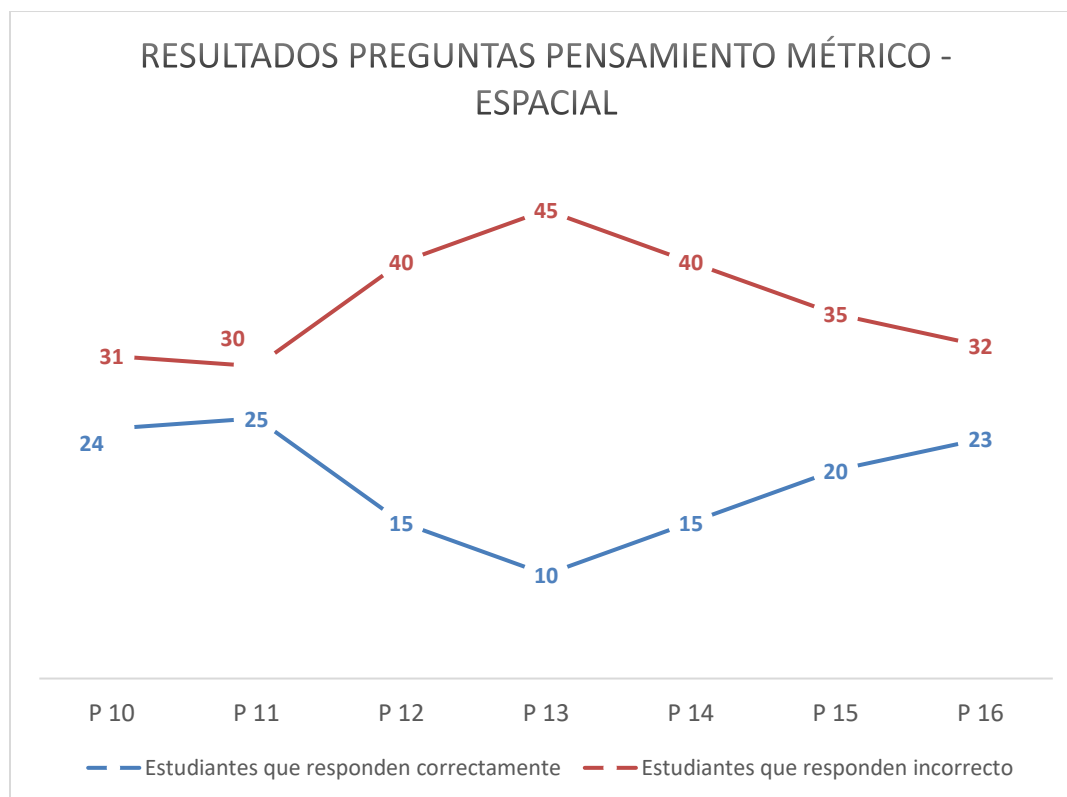
De 55 estudiantes que aplicaron la prueba, 40 señalaron la respuesta incorrecta. Estos aclaran que no recuerdan o tienen conocimiento de los conceptos mencionados anteriormente e incluso con la aportación del docente, el estudiante no obtuvo la capacidad de relacionar estos significados a la figura presentada.

Por último, están las preguntas de la 13 a la 16, las cuales son en base a una misma ilustración; esta presenta 4 semirrectas las cuales unas interceptan compartiendo el vértice. Las preguntas consisten en mencionar ángulos adyacentes, encontrar ángulos complementarios y suplementarios. Estas 3 preguntas fueron de gran dificultad para el estudiante, ya que al igual que las anteriores preguntas, este no presentaba conocimiento a los conceptos necesarios para responder. La pregunta 13 consiste en mencionar dos ángulos en la ilustración los cuales forman un ángulo adyacente, sabiendo de que el docente menciona que un ángulo adyacente son 2 o más ángulos que comparte un mismo vértice y los cuales su suma es 180° , solo 10 estudiantes obtuvieron la respuesta correcta, esto debido a que los otros estudiantes no recordaban la imagen de un ángulo de 180° .

Las preguntas de la 14 a la 16 consisten en hallar ángulos faltantes, para esto el docente, plantea en recordar los ángulos complementarios, suplementarios y opuestos por su vértice, pero aun así, más del 50% de los estudiantes obtuvo respuestas erróneas en cada pregunta.

En la figura 5, se puede observar que la mayoría de los estudiantes obtuvieron respuestas incorrectas, por lo que se puede concluir que muchos de las temáticas no la manejan, no reconocen conceptos de figuras tridimensionales, ni de rotación de figuras, por lo tanto, no se tienen claros los conceptos básicos de la geometría como ángulos, tipos de ángulos, figuras planas ni sus propiedades ni elementos de cada una de ellas, como el perímetro y el área, teniendo una urgencia de establecer desde la planeación la enseñanza de la geometría para reconocer finalmente las figuras tridimensionales, sus características y elementos como áreas laterales, volúmenes y su aplicación en los diversos contextos.

Figura 5. Resultados preguntas del pensamiento métrico - espacial

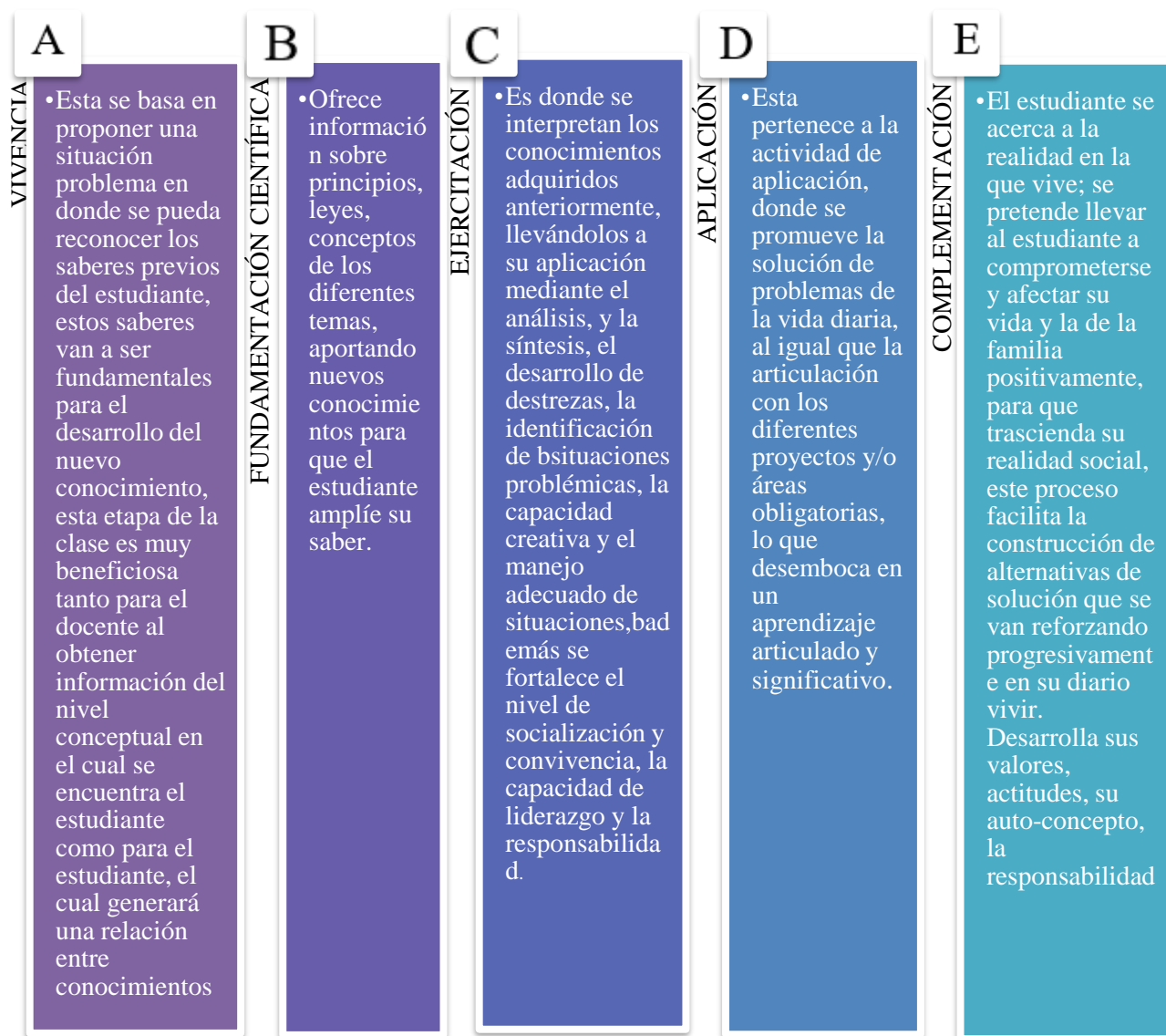


Autoría propia 2021

4.3 Actividades del manual

En la figura 6, se encuentra la estructura del manual didáctico está fundamentada en el modelo pedagógico de la escuela activa urbana, el cual consiste en 5 momentos, los cuales se explican a continuación.

Figura 6. Componentes del manual didáctico para la enseñanza de la geometría



A continuación, se detallará el contenido de cada conjunto de temas presentes en el manual y los resultados obtenidos por los estudiantes

Elementos básicos de la geometría. (ángulos y polígonos)

En estos primeros capítulos del manual (página 4 al 6), consiste en la introducción del concepto de ángulos y poliedros, demostrando sus características, propiedades y sus tipos, presentados de manera contextualizada al entorno del estudiante.

Además, se presenta una serie de actividades que se realizan en colaboración con el docente para generar participación e integración docente-estudiante, con el fin de aclarar conceptos, desarrollar el nivel de análisis, destreza, socialización y convivencia.

En el capítulo de ángulos de proponer ejercicios con ayuda de la aplicación de GeoGebra 2.0, donde el estudiante debe encontrar ángulos sobre un objeto cotidiano y clasificarlos según su medida. Asimismo, se presenta actividades de construcción de ángulos complementarios y suplementarios de manera individual para afianzar este concepto, y para finalizar una actividad de encontrar ángulos opuestos por sus vértices los cuales sus resultados se rectifican con la herramienta GeoGebra 2.0.

Como actividades de aplicación consisten en preguntas de análisis de falso y verdadero donde el estudiante debe relacionar conceptos y por último una serie de actividades que refuerza lo realizado en clase.

En el capítulo del tema de polígonos, las actividades propuestas fueron en torno a relacionar sus partes y clasificaciones con ejercicios planteados de manera visual, ejercicios de análisis de conceptos de falso y verdadero, y por último el análisis de número de vértices con números de diagonales, en el cual es este punto de los 55 estudiantes solo uno después analizar el

problema y ejemplos demostrados, dedujo la fórmula de número de diagonales sin haberla visto antes. En las figuras 7, 8 y 9 puede evidenciarse lo realizado con respecto a la aplicación de ángulos, expuesto tanto en el GeoGebra, como el desarrollo realizado por los estudiantes en el cuaderno, y los aprendizajes adquiridos a partir de esta enseñanza.

Con la estrategia de implementación de herramientas digitales, el estudiante comprendió de una manera diferente, no tradicional y más sencilla los conceptos y tipos de ángulos y polígonos. Cabe adicionar la gran participación gracias al papel de docente como motivador al proponer didácticas innovadoras para los estudiantes, generando representaciones semióticas según Duval, al graficar ángulos en el aplicativo GeoGebra 2.0 y pasar a una representación escrita simbólica en sus cuadernos.

Figura 7. Aplicación de ángulos en Geogebra 2.0

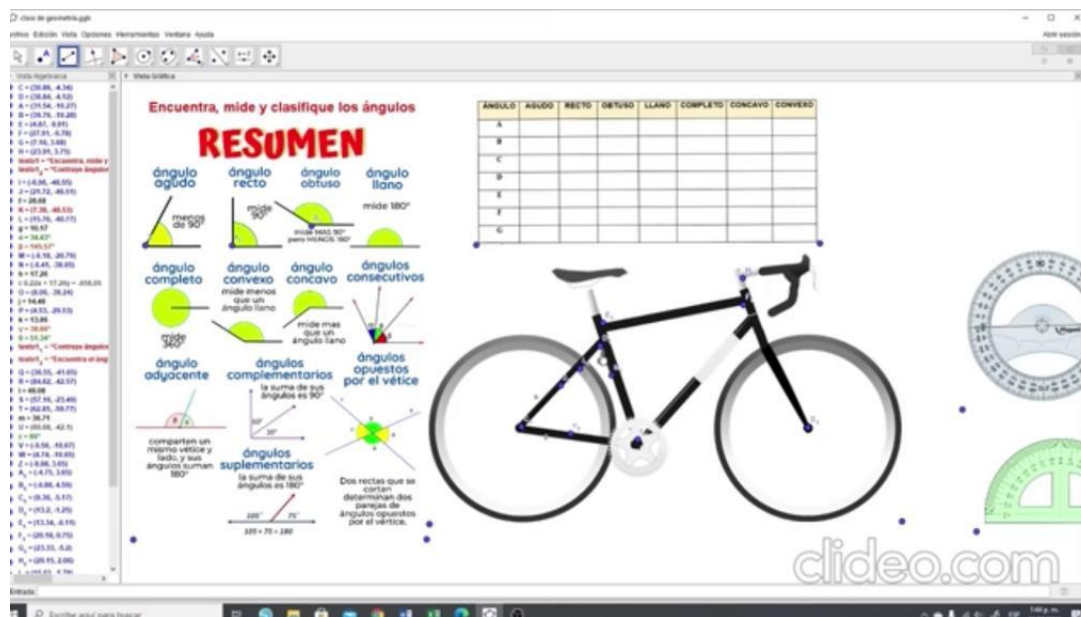


Figura 8. Evidencia de ángulos por un estudiante

Construcción
 1. Marca en la siguiente figura los vértices y nombra los vértices con una letra mayúscula. Verifica los ángulos marcados con los colores.



2. Clasifica los ángulos que en: a) s, t, u según la perspectiva en la siguiente cuadro con una X

Ángulo	Agudo	Recto	Obtuso	Iluminado	Complemento	Suplemento	Convexo
A	X						X
B	X						X
C		X					X
D						X	X
E			X				X
F					X		
G				X			

3. Construye 3 diferentes ángulos los cuales sean completamente diferentes en T, transportador e iludando la siguiente tabla:

Ángulos	Ángulo A	Ángulo B	Ángulo A+B
1	45°	45°	90°
2	60°	30°	90°
3	10°	80°	90°



4. Construye 3 diferentes ángulos convexos los cuales sean suplementarios con T, transportador e iludando la siguiente tabla:

Ángulos	Ángulo A	Ángulo B	Ángulo A+B
1	90°	90°	180°
2	70°	110°	180°
3	20°	160°	180°

5. Encuentra los ángulos opuestos.



Figura 9 Evidencia de polígonos de un estudiante

5.  

No es un polígono Es un polígono No es un polígono Es un polígono

Compara la siguiente tabla:

Polígono	Lados	Vértices
cuadrado	4	4
pentágono	5	5
hexágono	6	6
heptágono	7	7
octógono	8	8
nonágono	9	9





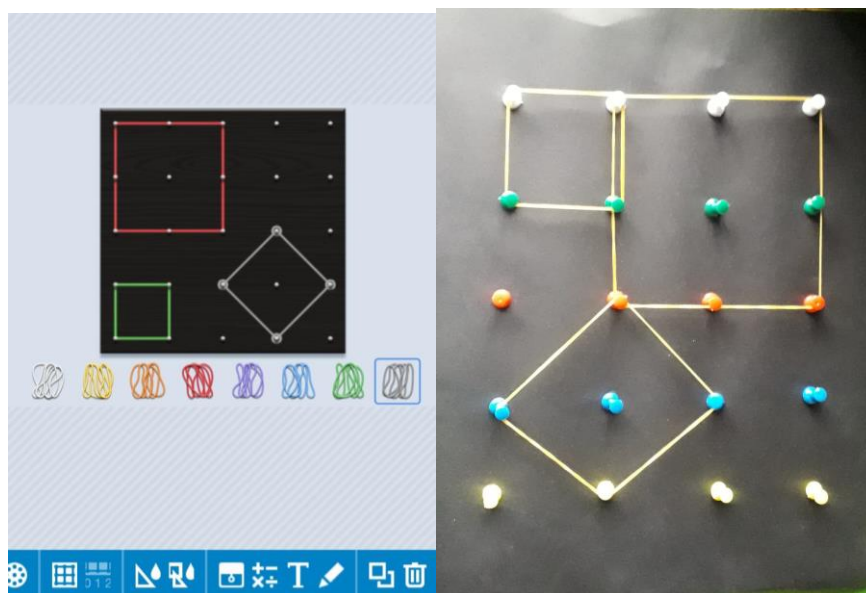
Polígono	Numero de ángulos internos y fórmula para el número	Es un polígono regular o irregular?
	$n = 5$ lados = 5 hexágono	Irregular
	$n = 6$ lados = 6 heptágono	Irregular
	$n = 4$ lados = 4 cuadrado	Regular
	$n = 5$ lados = 5 pentágono	Regular

Figura 11. Evidencia de geoplano virtual y casero



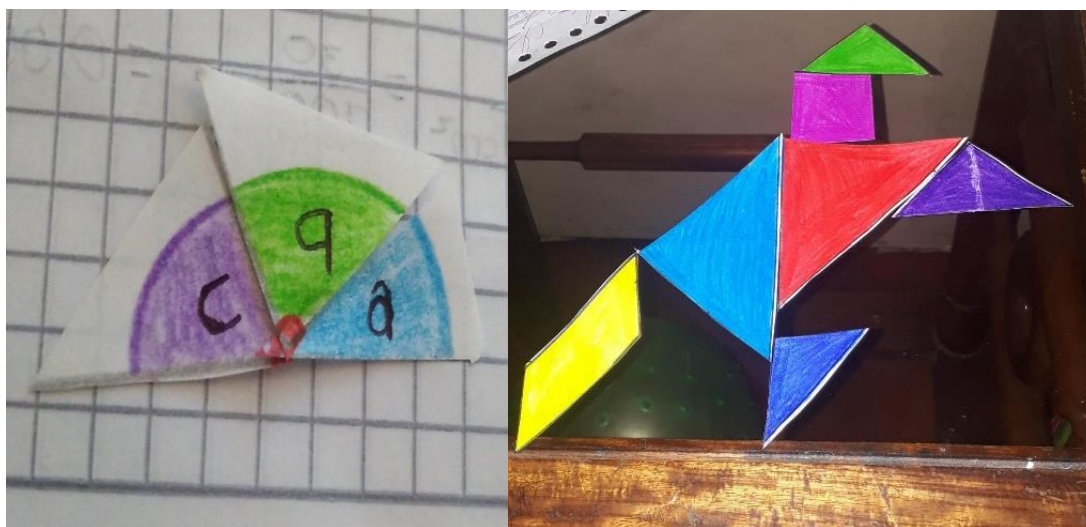
Con la estrategia de material en concreto y digital, el estudiante asimiló con gran facilidad el concepto de áreas y perímetros, y el desarrollo de su cálculo, además la buena participación por parte de los estudiantes ya que hubo un espacio de interacción con material lúdico y tecnológico, el cual les permite afianzar los conocimientos aprendidos, donde se evidencio el desarrollo de las fases propuestas por Van Hiele donde se obtuvo una visualización siendo este el nivel 1, un análisis logrando el nivel 2, ya que el estudiante tuvo la oportunidad de concebir de formas diferentes (concreto - digital) los conceptos, además de realizar un análisis tomando estos como herramientas para la solución de problemas planteados como hallar áreas y perímetros de figuras planas.

Figuras planas (cuadriláteros, triángulos y circunferencias)

En estos capítulos de geometría plana (página 12,14 y 16), se implementa materiales manipulables para la comprensión de conceptos y propiedades.

En la temática de triángulos, se comprueba de 2 maneras diferentes el por qué la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180° , una es implementando el transportador calculando la suma de ángulos de una serie de triángulos donde concluyeron que siempre obtenían como resultado 180° , pero se encontró de que algunos estudiantes tenían dificultad en el uso de esta herramienta, no recordaban el uso de un transportador, ya que en el tema de ángulos ya había sido visto pero con herramientas virtuales. La otra estrategia es en material en concreto, donde se comprobaba con cartulina y tijeras el ángulo formado al cortar los vértices de un triángulo, esta forma es de manera muy visual, ya que tenía en conocimiento de la imagen de un ángulo llano (180°).

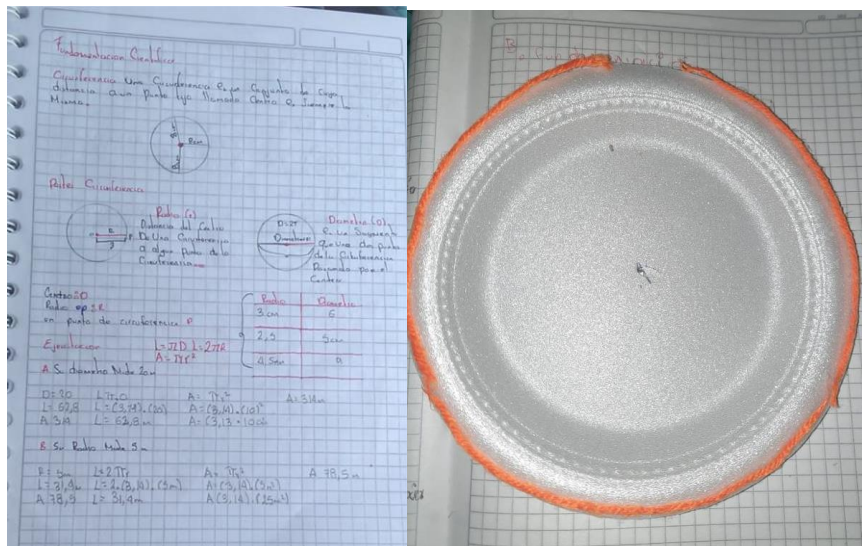
En el capítulo de cuadriláteros, se implementa la herramienta didáctica de un Tangram, donde el estudiante visualiza los diferentes tipos de cuadriláteros y recordaba los tipos de triángulos. Se propone unas series de siluetas geométricas donde el estudiante con polígonos tiene que armar el diseño según la imagen. En la figura 12, se evidencia el desarrollo hecho por el estudiante de la estrategia propuesta. En esta actividad el estudiante tiene un tiempo límite por figura, pero se evidencia la dificultad para estos cumplir el reto, de los 55 estudiantes, menos del 50% cumplió el reto estipulado en el tiempo establecido, por tal se concluye la falta de desarrollo del pensamiento espacial por parte de estos. Así que es de gran ayuda aplicar estas series de actividades que fomenten su desarrollo visual.

Figura 12. Evidencia Material en concreto tema de triángulos

En la figura 13, en el tema de la circunferencia, se plantea una actividad con materiales que se pueden encontrar en el hogar para así explicar el concepto de π y de perímetro de una circunferencia, el cual el estudiante asimiló con gran facilidad. Después de presentar y fundamentar la parte conceptual, se presenta una serie de problemas donde el estudiante debe tomar los conceptos previos y aplicarlos a su solución. Gracias a la actividad con material concreto, se encuentra que el estudiante comprende, analiza y fundamenta estas propiedades y conceptos de manera factible a la solución de problemas cotidianos.

El diseño y aplicación de este capítulo tiene el objetivo de lograr alcanzar los 3 primeros niveles del desarrollo espacial de la teoría de Van Hiele, al usar material en concreto se logra el nivel 1 y 2 el cual es de visualización y análisis, donde el estudiante reconoció los tipos y características de los triángulos y cuadriláteros, y las propiedades del círculo. El estudiante alcanzó el nivel 3 de clasificación al realizar ejercicios de áreas donde describió los polígonos de una manera formal.

Figura 13. Evidencia de propiedades de la circunferencia con material en concreto y cuaderno



Poliedros (Prismas y pirámides)

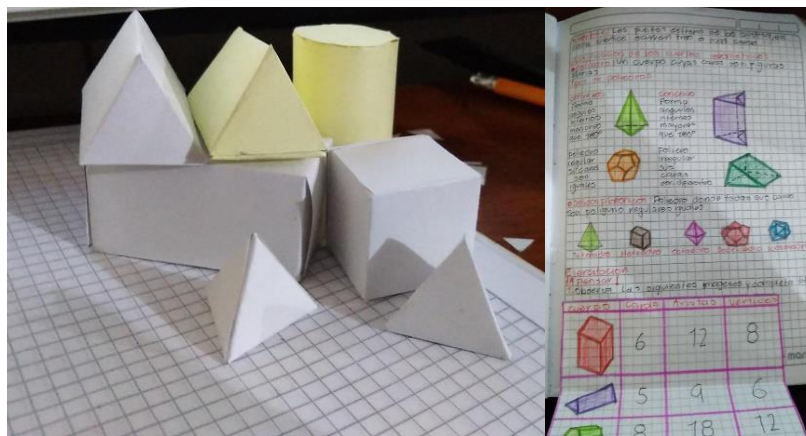
Esta sección se encuentra en la página de la 18 a la 24 del manual didáctico, donde se implementa tanto material en concreto como la cartulina y virtual como GeoGebra 2.0 para la construcción de figuras 3D.

Al inicio de esta sección se plantea una serie de resolución de problemas para reforzar el concepto y procedimiento de hallazgo de áreas, para así llevarlo al procedimiento de áreas de poliedros y pirámides en un cuadro didáctico donde el estudiante mide poliedros 3D en cartulina tomando datos necesarios para su solución, después se comprobaban los resultados en el aplicativo GeoGebra 2.0 armando los poliedros con ayuda de un tutorial. Esta actividad fue para la gran mayoría de los estudiantes sencilla en su solución ya que ellos aclaraban que al implementar la tabla y visualizando los poliedros de manera 3D comprenden y analizan los procedimientos de manera más lógica.

En la sección de volumen, en la figura 14, se define el concepto, esta definición con la ayuda de un cubo Rubik, donde tenían el reto de calcular la cantidad de cubitos que este contenía, así conllevando a la identificación, análisis y comprensión de las partes y propiedades de los diferentes tipos de poliedros presentes en el manual de manera conceptual y en ejercicios planteados. Después se implementa la misma estrategia planteada en el cálculo de áreas en el cálculo de volúmenes, obteniendo buenos resultados.

En esta actividad se evidencia el avance en el desarrollo del pensamiento métrico espacial analizándolo desde la teoría de Van Hiele. El nivel 1 se logra cuando el estudiante reconoció los objetos que se perciben y esto se logró gracias al material en concreto y digital. El nivel 2 el cual consiste en el análisis de las propiedades de los objetos es logrado gracias a actividades estructuradas como cuadros comparativos resolviéndose con el material manipulable para el estudiante al tomar medidas, al observar sus partes de manera 3D y al ser comprobados en el aplicativo digital GeoGebra 2.0, así conllevando al nivel 3 el cual consiste en la clasificación, donde el estudiante describe los poliedros de manera formal, esto se vio reflejado en ejercicios de cálculos de áreas totales volúmenes de diferentes cuerpos.

Figura 14. Evidencia Poliedro en material en concreto y dibujado en el cuaderno



Además, debemos anexar la teoría de Duval de las representaciones semióticas, donde el estudiante con el material en concreto realiza la toma de datos de medidas y pasa esta información a un lenguaje algebraico en procesos de cálculo de áreas y volúmenes. El estudiante aclara que gracias a esta actividad de medida se le facilitó comprender y analizar estos procesos algebraicos.

Este proceso anterior cabe aclarar que fue realizado en un constante acompañamiento docente-estudiante, para la aclaración de dudas, reforzamiento de conceptos y procedimientos, ya que según Vygotsky en las estrategias propuestas en la aplicación del trabajo colaborativo, el docente juega un papel fundamental en el proceso de aprendizaje del estudiante, como lo menciona (1995) “lo que un niño puede hacer hoy con la ayuda de alguien, es capaz mañana de hacerlo por sí sólo” (p. 5). Esto quiere decir que el docente debe brindar un acompañamiento y guía en el proceso del estudiante generando una formación integral y el día de mañana lo aplique de manera individual. En la figura 15, los estudiantes desarrollan estrategias pensadas para fortalecer competencias matemáticas como el medir y hacer cálculos.

Figura 15. Evidencia medición de poliedros y pirámides



Cuerpos redondos (Cilindros y conos)

Este capítulo se encuentra en las páginas 25 al 26, donde se presenta actividades con material en concreto, marco teórico y actividades.

El estudiante con ayuda del material en concreto comprendió el concepto de sólido en revolución y las propiedades y relación de estos cuerpos redondos.

Gracias a los ejercicios de áreas y volúmenes estructurados de manera paso a paso, facilitó al estudiante a implementar estos procesos al relacionarlos con ejercicios de resolución de problemas.

Gracias al método de Polya, un método estructurado paso a paso, se le facilitó al estudiante el resolver los ejercicios de resolución de problemas planteados y a relacionar los conceptos, propiedades y procedimientos algebraicos vistos anteriormente en la guía, logrando así un nivel 4 ya que el estudiante se orienta libremente en su propio razonamiento generando sus propias secuencias que lo hacen llegar a un mismo resultado, pero cabe mencionar que en esta etapa el estudiante aun no entiende con gran severidad las demostraciones aun no genera un razonamiento abstracto.

Figura 16. Evidencia Cuerpos redondos material en concreto



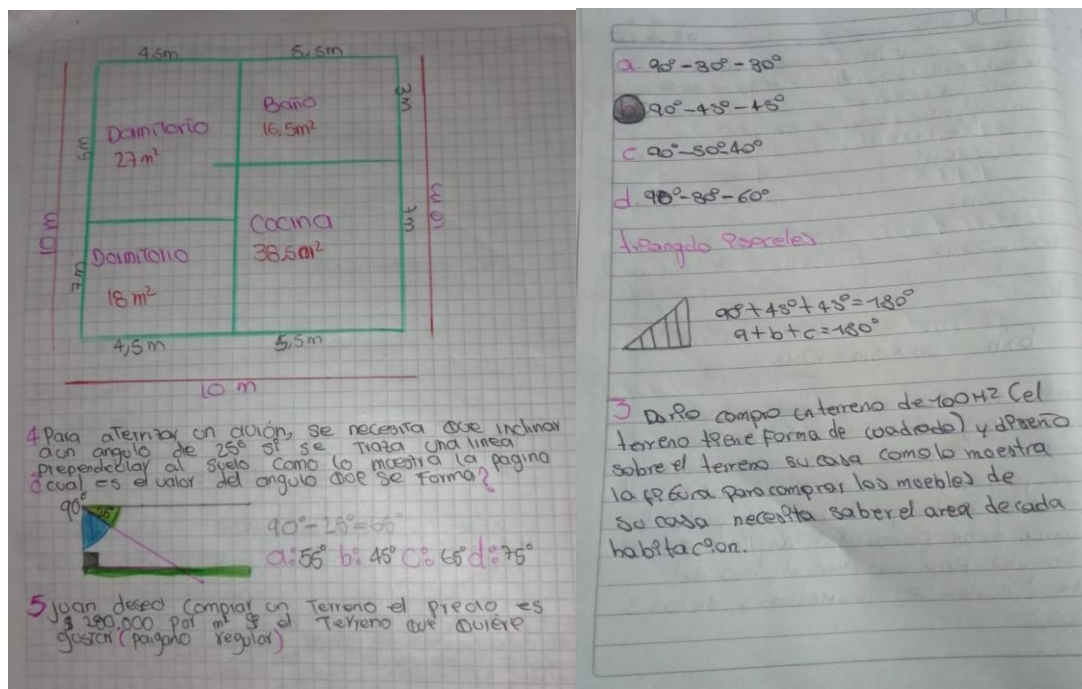
4.4 Resolución de problemas del pensamiento métrico – espacial

Ángulos y áreas de figuras planas

Para afianzar los temas vistos hasta ahora, se diseña una actividad complementaria de resolución de problemas cotidianos, donde el estudiante refuerza y/o termina de fortalecer conceptos y propiedades de los ángulos, perímetros y áreas (página 13). Este proceso se realiza en acompañamiento docente, planteando parámetros en el desarrollo de la clase.

En este taller tener los conceptos, presentan dificultad al diseñar estrategias para su solución, les cuesta relacionar la parte conceptual y procesos logarítmicos con análisis, diseño e implementación de estrategias que conlleve a la solución al problema.

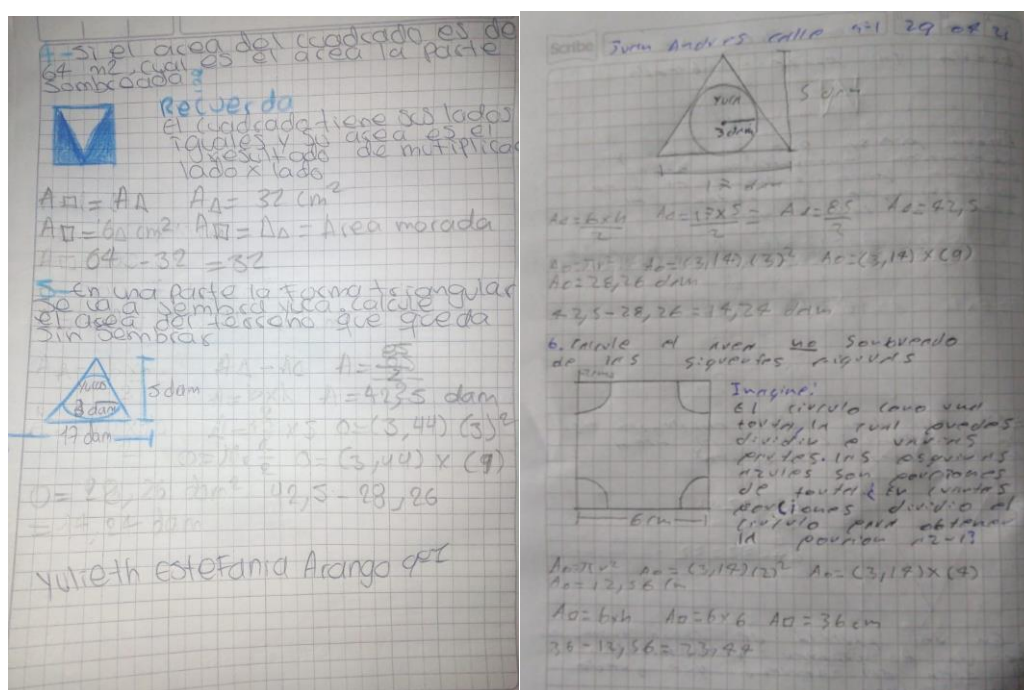
Figura 17. Evidencia resolución de problemas



Por la problemática mencionada anteriormente, se plantea una actividad de resolución de problemas enfocada en áreas y perímetros de polígonos (página 17), implementando el método IDEAL por Branford y Stein. Se evidencia una gran mejoría en el desarrollo de la actividad

comparada con la anterior, ya que este método le facilita al estudiante en su paso a paso de análisis, diseño y aplicación de estrategia. Es importante resaltar las diferentes estrategias planteadas por los estudiantes, aquí es donde el docente según Fernando Hitt tiene la tarea de analizar las diferentes representaciones hechas por los estudiantes para llegar a concluir su proceso de aprendizaje.

Figura 18. Evidencia de resolución de problemas 2



Poliedros, pirámides y cuerpos redondos

En esta actividad de la página 27, se intenta a lograr el nivel 5 de rigor según el modelo de Van hiele, pero se obtiene por parte de los estudiantes un desarrollo geométrico hasta el nivel 4, en esta fase se generó un razonamiento deductivo, gracias a un alto grado de razonamiento lógico, donde el estudiante razonó ante los axiomas, teoremas y definiciones. El estudiante se orientó libremente en su propio razonamiento generando sus propias secuencias que lo hacen

llegar a un mismo resultado, pero cabe mencionar que en esta etapa el estudiante aun no entiende con gran severidad las demostraciones aun no genera un razonamiento abstracto, por lo que en el nivel 5 es de gran rigor, es donde el estudiante integra axiomas, definiciones y teoremas manipulándolos para generar formalmente un razonamiento en el estudio de la geometría sin el uso de un modelo de referencia, es decir que desarrolla una geometría abstracta, y esto no fue alcanzado. Según la afirma el (MEN) existen algunos estudios donde la población estudiantil media no alcanza los dos últimos niveles, ya que se necesita y exige un nivel matemático elevado.

Figura 19. Evidencia taller de resolución de problemas cuerpos geométricos



Lo que se pudo evidenciar en la actividad propuesta, fueron diferentes respuestas y procedimientos en los estudiantes, aquí en donde cabe mencionar lo que plantea Fernando Hitt

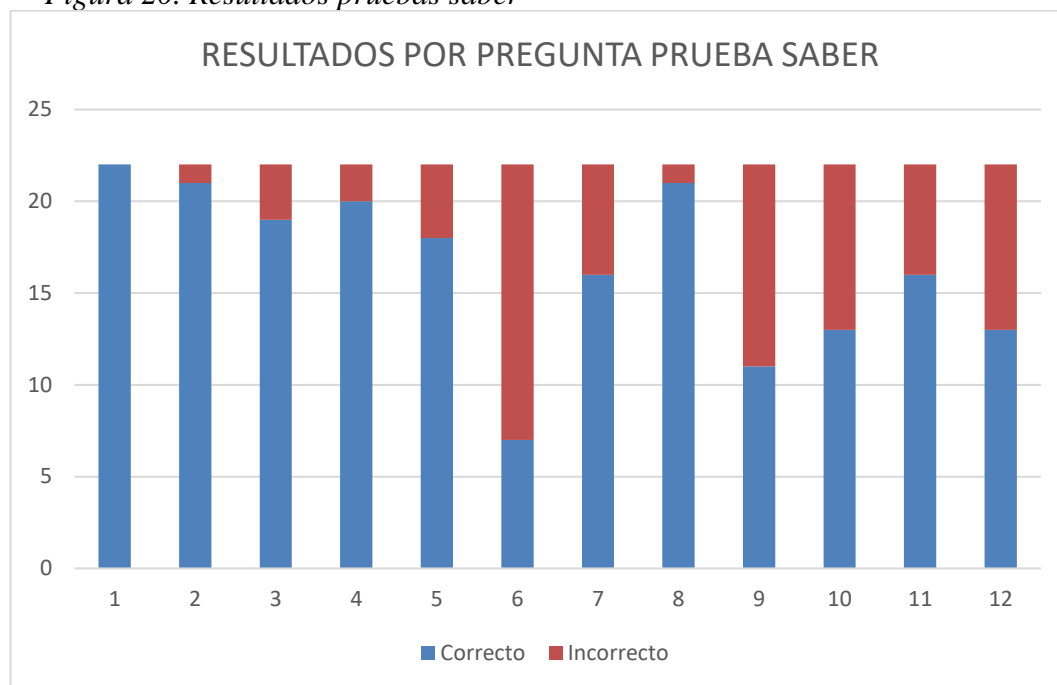
en la importancia del análisis de las diferentes representaciones que los estudiantes plantean al solucionar un problema, ya que se pudo encontrar las representaciones proyectadas por la intuición y sabemos que son de gran importancia en el proceso de aprendizaje, por lo que estas demostraron la idea y manera de que el estudiante entendió o comprendió el problema es decir muestra la concepción.

4.5 Aplicación prueba saber

Es un cuestionario de 12 preguntas (Apéndice E), obtenidas de cartillas de pruebas Saber noveno grado del Ministerio de Educación de los años 2013, 2014 y 2015, enfocadas claramente en el pensamiento métrico-espacial implementado la didáctica de resolución de problemas con diferentes estrategias como el método de Pólya y/o método IDEAL por Branford y Stein.

A continuación, en la siguiente gráfica se evidencia los resultados de la prueba realizada a 22 estudiantes, a pesar de que la intervención del instrumento (manual didáctico), se aplicó a 55 estudiantes, por situaciones externas, solo fue posible realizarlo a 22 estudiantes.

Figura 20. Resultados pruebas saber



Autoría propia 2021

Para comprender de manera clara los resultados obtenidos por los estudiantes con las preguntas presentadas, a continuación, se presentará un cuadro mencionando el tipo de competencia y nivel de complejidad de cada pregunta, lo cual nos ayuda a argumentar los resultados del estudiante y concluir el nivel de desarrollo del pensamiento métrico espacial según Van Hiele.

Tabla 5 Competencias y nivel de preguntas saber

Pregunta	Competencia	Nivel de desempeño
1	Razonamiento	Mínimo
2	Resolución	Satisfactorio
3	Razonamiento	Satisfactorio
4	Comunicación	Mínimo
5	Razonamiento	Satisfactorio
6	Resolución	Avanzado
7	Razonamiento	Mínimo
8	Razonamiento	Mínimo
9	Razonamiento	Avanzado
10	Comunicación	Avanzado
11	Razonamiento	Mínimo
12	Comunicación	Avanzado

Autoría propia

Se puede evidenciar buenos resultados en las preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 7, 11 y 8, donde más del 70% de los estudiantes obtuvieron respuestas correctas, estas preguntas se encuentran en un nivel de complejidad mínimo y satisfactorio, es decir, un nivel medio, correspondientes a diferentes competencias como Razonamiento, Resolución de problemas y comunicación, por lo tanto se reconoce el alcance según la teoría de Van Hiele del Nivel 4 de deducción, ya que para alcanzar un razonamiento deductivo, se necesita un alto grado de razonamiento lógico, y el estudiante demostró un razonamiento ante los axiomas, teoremas y definiciones, al resolver correctamente las preguntas planteadas.

En las preguntas 6, 9, 10 y 12, en la figura 20, se muestran bajos resultados, donde en un promedio del 60% de los estudiantes obtuvieron respuestas incorrectas. Estas preguntas tienen un nivel avanzado y diferentes competencias como comunicación, Razonamiento y resolución de

problema, lo cual nos ayuda a concluir el efecto de no haber alcanzado un nivel 5 de Rigor, es decir un desarrollo de geometría abstracta según lo plantea Van Hiele en la gran mayoría del grupo de estudiantes.

A lo expuesto anteriormente se puede concluir un avance en el desarrollo del pensamiento métrico espacial en los estudiantes de grado noveno, los cuales obtuvieron grandes resultados en la última intervención (prueba Saber) , a comparación con la prueba diagnóstico.

Gracias a la teoría de Van Hiele la cual describe los niveles de desarrollo en los sistemas geométrico, se reconoce que los estudiantes lograron alcanzar un nivel 4 (deducción), a causa de la intervención del manual didáctico. Este desarrollo fue impulsado por la aplicación de la estrategia de resolución de problemas, la cual fue desarrollada gracias a las teorías como la de Polya, y Bransford y Stein, que ayudaron a los estudiantes a fortalecer sus capacidades de análisis, deducción y búsqueda de soluciones enfocados en el pensamiento métrico- espacial.

Además, estos buenos resultados se obtuvieron gracias al uso de didácticas con el uso de material en concreto y digital, los cuales despertaron un interés en los estudiantes en los sistemas geométricos, los ayudaron a comprender conceptos y procedimientos gráficos y algebraicos, donde al final se ven reflejados en la aplicación de resolución de problemas.

Cabe mencionar que los estudiantes no alcanzaron el nivel 5 de rigor planteado por Van Hiele, por diferentes situaciones presentes en el desarrollo del instrumento, como la virtualidad y la escasez de recursos de los estudiantes, después la alternancia y las pocas horas de clase de geometría; estos factores de tiempo y recursos fueron en gran parte los causantes de que los estudiantes solo alcanzaran el nivel 4 de deducción

Tabla 6 Comparación entre niveles y fases de Van Hiele

Comparación entre niveles y fases	Fase 1 Información	Fase 2 Orientación dirigida	Fase 3 Explicación	Fase 4 Orientación libre	Fase 5 Integración
Nivel 1 Visualización	Reconocer la geometría plana Ángulos y polígonos	Analizar las partes y tipos de ángulos y polígonos	Reconoce la clasificación de ángulos y polígonos	Visualiza los elementos planteados	Establece conjeturas mediante material en concreto y digital
Nivel 2 Análisis	Reconocer propiedades de polígonos como áreas y perímetros	Analizar los conceptos de áreas de diferentes polígonos	Reconoce el proceso de modelamiento matemático de área y perímetro	Visualiza áreas de polígono irregulares	Establece soluciones para el cálculo de áreas de polígonos irregulares con ayuda de material en concreto
Nivel 3 Clasificación	Reconoce lo figuras bidimensionales de manera formal	Analiza los problemas planteados por el docente	Reconoce conceptos y procedimientos para resolver problemas con figuras bidimensionales	Visualiza la relación de modelamiento matemático y el problema con figuras bidimensionales	Establece soluciones para la resolución de problemas en figuras bidimensionales
Nivel 4 Deducción	Reconoce la relación entre figuras bidimensionales y tridimensionales	Analiza las propiedades de los cuerpos geométricos	Reconoce sus conceptos y procedimientos de modelamiento matemático de áreas y volúmenes	Visualiza los cuerpos geométricos en objetos cotidianos	Establece soluciones de áreas y volúmenes con ayuda de material tangible y digital
Nivel 5 Rigor	Se debe trabajar más con los estudiantes la resolución de problemas con figuras tridimensionales para alcanzar un nivel de rigor.				

Tabla 7 Triangulación de teoría de Van Hiele con el método IDEAL de Bransford y Stein

COMPARACIÓN ENTRE LAS TEORÍAS	Resolución de problemas Método ideal por Bransford y Stein				
	Identificar	Análisis de datos	estrategias	aplicación	Logro
Nivel 1 Visualización	Identificar ángulos y polígonos regulares e irregulares	Analizar sus tipos	Diseñar una estrategia para crear conjeturas	Aplicar las estrategias planteadas	Reconoce la solución adecuada para el problema planteado
Nivel 2 Análisis	Identificar los elementos y propiedades de los polígonos regulares	Analizar el modelamiento matemático para hallar áreas y perímetros	Diseñar una estrategia para lograr su procedimiento	Aplicar las estrategias planteadas	Analiza el tipo de solución arrojado en el problema planteado
Nivel 3 Clasificación	Identifica las figuras bidimensionales de manera formal	Analiza problemas planteados por el docente	Diseñar una estrategia para lograr su solución	Aplicar las estrategias planteadas	Determina los tipos de problemas de la geometría 2D
Nivel 4 Deducción	Identificar la relación entre figuras bidimensionales y tridimensionales	Analiza las propiedades de los cuerpos geométricos como áreas y volúmenes	Diseñar una estrategia para crear conjeturas en el modelamiento matemático de áreas y volúmenes	Aplicar las estrategias planteadas	Deduce la relación de figuras 2D a 3d en diferentes problemas planteados
Nivel 5 Rigor	No fue alcanzado este nivel por los estudiantes, ya que no se alcanzó a aplicar más actividades de resolución de problemas, por situaciones vividas en el contexto escolar.				

Fernando Hitt (2017) establece la tarea del docente en identificar y analizar las representaciones creadas por los estudiantes y aplicadas en la solución de un problema, le permite concluir los procesos de aprendizaje

4.6 Cuestionario de validación

El siguiente cuestionario permitió indagar con docentes el material implementado durante el trabajo investigativo, lo cual se realizó a través de entrevista con los docentes de la I. E.

Andrés Bello.

Pregunta 1

Usted como docente en el área de matemáticas, ¿considera que el manual didáctico que se propone es una estrategia lúdica y didáctica para desarrollar en futuros trabajos de aula?

Docente: Jhon Harold Urrea

Si, las actividades que allí se vivencian vienen estructuradas de acuerdo a los procesos pedagógicos necesarios para el desarrollo de habilidades matemáticas, comprometidas con la estructura necesaria para mejorar los aprendizajes de los estudiantes y el uso de medios tecnológicos para el afianzamiento de las competencias matemáticas.

Docente: Andrés Felipe Gómez

Sí, las actividades se presentan de manera estructurada y secuencial, lo cual permite el un mejor entendimiento por parte del estudiante en frente al tema. Además, contiene unas series de actividades lúdicas e innovadoras como los aplicativos en GeoGebra, demás plataformas adicionando actividades estructuradas con material en concreto.

Docente: José Afrany Rivera

Si, ya que los temas, las propuestas como se presenta el marco teórico, actividades y evaluaciones se presentan de manera estructurada, manera creativa por la implementación de varias didácticas, como el material tangible, digital y resolución de problemas.

Pregunta 2

Usted como docente de matemáticas ¿utilizaría el presente manual en su planeación de aula?

Docente: Jhon Harold Urrea

Si, su estructura permite un trabajo progresivo y didáctico con los estudiantes, lo cual fomenta la creatividad y los aprendizajes significativos en los estudiantes

Docente: Andrés Felipe Gómez

Si, ya que es una herramienta innovadora y creativa que facilitará a los estudiantes la comprensión de conceptos, propiedades, procedimientos, generando así un desarrollo en el pensamiento métrico espacial.

Docente: José Afrany Rivera

Sí, es un manual innovador que presenta varias propuestas didácticas, las cuales se pueden adaptar a mi entorno escolar y mis estudiantes.

Pregunta 3

3. ¿Considera que el uso del presente manual facilitaría el aprendizaje de los estudiantes y el desarrollo de competencias matemáticas a través del pensamiento métrico espacial?

Docente: Jhon Harold Urrea

Las etapas que se evidencian en el manual ayudan en el proceso de enseñanza aprendizaje del estudiante, haciéndola más dinámica y progresiva de acuerdo con los niveles de aprendizaje de cada uno de los estudiantes.

Docente: Andrés Felipe Gómez

Si, ya que integra en este pensamiento la didáctica de resolución de problemas, desarrollando una serie de habilidades en el estudiante como el análisis, comprensión, visualización, generador de soluciones, entre otros

Docente: José Afrany Rivera

Si, este manual presenta un diseño estructurado que puede facilitar el aprendizaje de los estudiantes gracias a las actividades propuestas, por lo tanto, conlleva a desarrollar competencias matemáticas, en especial en la didáctica de resolución de problemas.

Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones

En este capítulo se tiene la presentación de las conclusiones a las que se llega después del diagnóstico, planteamiento problema, indagación, diseño, realización, aplicación, y análisis del manual: didáctica de la geometría euclidiana.

Después de haber realizado todo el proceso metodológico descrito se dará respuesta a los propósitos, interrogantes y objetivos trazados en la presente investigación.

5.1 Respuesta a la pregunta central

¿Cómo Desarrollar el pensamiento métrico espacial a través de resolución de problemas de figuras tridimensionales mediadas en un manual didáctico a estudiantes de grado noveno?

El pensamiento métrico espacial se desarrolla con la implementación del uso de material manipulativo, tangible y digital a través de aplicaciones o herramientas, donde estos recursos están al alcance del estudiante, planteando una serie de estrategias que facilitan y posibilitan la comprensión de conocimientos pertinentes a los sistemas geométricos, partiendo de elementos básicos y complejizando las actividades a medida que se presenta el avance. Para lograr este objetivo, se propone un manual didáctico enfocado a la enseñanza de la geometría, el cual está diseñado de manera secuencial, siguiendo las pautas del modelo pedagógico de la institución EAU, para una mejor comprensión y análisis de los temas a aprehender.

El pensamiento métrico espacial se fortalece satisfactoriamente durante la implementación de la investigación, ya que se realiza una serie de actividades con material en

concreto y digital, las cuales están expuestas en una recopilación de guías en el manual didáctico propuesto por la investigadora.

Durante la implementación del instrumento se evidencia que el estudiante adquiere una percepción de la geometría tridimensional de una manera creativa, innovadora y eficiente sobre los conceptos planteados en el manual usando diferentes estrategias, lo que lleva al estudiante a análisis de situaciones de su entorno y las aplica dando solución a problemas reales.

5.2 Respuesta a las preguntas auxiliares

¿Cuál es la manera adecuada de verificar conceptos, propiedades y procesos geométricos en los estudiantes de grado noveno?

A través de actividades de resolución de problemas propuestas por la docente en el manual didáctico, de manera cooperativa docente-estudiante e individual, donde según Fernando Hitt (2017), el docente tiene la tarea de analizar diferentes representaciones propuestas por estos, para concluir su proceso de aprendizaje, teniendo en cuenta las estrategias implementadas anteriormente.

En la resolución de problemas geométricos, el estudiante tiene la tarea de analizar y comprender la pregunta, efectuar una estrategia según los conceptos, propiedades y procesos gráficos y algebraicos, además aplicarlos; gracias a esta estrategia, se puede analizar las diferentes representaciones planteadas por los estudiantes y verificar su desarrollo en el sistema geométrico, los cuales se contemplan en los lineamientos curriculares estipulados por el Ministerio de Educación Nacional MEN.

-¿Cómo fundamentar teórica y metodológicamente el desarrollo del pensamiento métrico espacial en estudiantes de grado noveno?

A través de la documentación evidenciada por fotografías y de actividades prácticas planteadas en el manual didáctico, el estudiante tuvo la tarea de realizar procesos de análisis, conjeturas, comparaciones, comunicación, razonamiento y modelación matemática, siendo estas las competencias a desarrollar en los procesos matemáticos. Además, se fundamenta con las evidencias fotográficas de las actividades de manualidades con material tangible, donde el estudiante con los recursos que tenía a la mano pudo cumplir con las actividades propuestas.

También es importante destacar que las distintas actividades planteadas facilitan la fundamentación teórica como primera medida para reconocer elementos geométricos, teniendo presente que metodológicamente, el estudiante ha adquirido unas competencias necesarias para enfrentarse a situaciones que le permitan dar solución a problemas reales; esto se pudo evidenciar en la aplicación de las pruebas saber, donde los conocimientos logrados fueron resultados satisfactorios en la aplicación de la prueba.

- ¿Qué efecto surge en los estudiantes la implementación de las estrategias propuestas para el aprendizaje de las figuras tridimensionales?

Surge un efecto de motivación, interés y de desarrollo del sistema geométrico, al implementar material en concreto y digital, donde el estudiante marca sus propios objetivos y esfuerzos en el proceso de diseño, modelamiento, implementación y análisis para la solución de un problema planteado en las actividades del presente manual.

Al desarrollar el pensamiento métrico-espacial, los estudiantes podrán aplicar estos nuevos conocimientos en las pruebas saber del estado de noveno y once, además obtener buenos resultados para la oportunidad de ingresar a buenas universidades, incluso hasta con una beca.

También pueden implementar estos saberes en el programa universidad en tu colegio para el próximo año (décimo).

- ¿Cómo describir la evolución de los estudiantes de noveno al utilizar herramientas que le permitan desarrollar el pensamiento métrico espacial?

A partir de una documentación descriptiva del análisis de las representaciones propuestas por el estudiante al solucionar problemas planteados descritos en el manual didáctico, se percibe que los estudiantes comprenden la estructura de la geometría bidimensional a una geometría tridimensional, entendiendo cada uno de sus elementos, características y demás factores que relacionen los distintos objetos, encontrando en ellos modelos de medición, cálculo de áreas y volúmenes, ya que las actividades están propuestas de forma consecutiva partiendo de elementos básicos y complejizando las actividades a medida que se presenta el avance.

- ¿Cómo validar la funcionalidad de las herramientas utilizadas para el logro del desarrollo del pensamiento métrico espacial en estudiantes de grado noveno?

Por medio de un taller final, un taller tipo prueba saber, el cual contiene 12 preguntas obtenidas de pruebas del estado de los años 2013, 2014 y 2015, enfocadas en el pensamiento métrico-espacial, y así se puede analizar las representaciones a la solución propuesta por el estudiante, y así considerar su proceso de aprendizaje según lo plantea Fernando Hitt (2017) cuando este menciona: “es realmente necesario profundizar hacia el estudio de este tipo de

representaciones dentro de la investigación en didáctica de las matemáticas con el fin de definirlas de manera adecuada y cada vez más completa” (Hitt & Quiroz Rivera, p.173)

5.3 Conclusiones

A continuación, se presentan unos ítems con las conclusiones obtenidas por el desarrollo del presente trabajo.

- Los maestros pueden considerar en las planeaciones de prácticas de aula, el uso de material en concreto que facilite el análisis y comprensión de conceptos y procedimientos geométricos, que ayuden al desarrollo del proceso del pensamiento métrico- espacial, en estudiantes de grado noveno.
- Los estudiantes sean los mayores beneficiados con el uso de las herramientas de material en concreto y tecnológico, ya que genera interés y motivación al desarrollo de actividades, facilidad de comprensión de conceptos y procedimientos de una manera innovadora.
- Las instituciones implementen el manual didáctico creado, para que los docentes actuales y futuros tengan una herramienta didáctica que ayude a cumplir sus objetivos de clase enfocados en sistemas geométricos.
- Los maestros formados en didáctica reconozcan la importancia de la enseñanza de la geometría y la transversalización con los demás pensamientos matemáticos para que los estudiantes desarrollen, analicen e integren con el fin de obtener buenos resultados en las pruebas saber 11.

- Los investigadores en didáctica de la geometría diseñen e integren nuevas estrategias para la enseñanza del área, para lograr un desarrollo en el pensamiento métrico-espacial en estudiantes de básica y media.

5.4 Recomendaciones

A continuación, se presentarán algunas recomendaciones que pueden ser usadas por docentes, directrices y otros miembros educativos, que se obtuvieron a la observación y análisis de la presente investigación.

La enseñanza de la geometría debe ser de gran compromiso del docente del área de matemática, la cual debe integrar a su currículo y/o transversalizar con demás pensamientos, para así desarrollar en el estudiante de manera práctica y experimental el desarrollo métrico-espacial, el cual puedan implementar en su cotidianidad, en demás áreas educativas y en la futura educación superior.

Diseñar y aplicar nuevas e innovadoras estrategias didácticas con material en concreto y digital que llamen la atención y motivación del estudiante, para esto se debe realizar un diagnóstico educativo donde se analice los recursos disponibles tanto de los estudiantes como de la institución, para generar una correcta aplicación de la estrategia.

Aplicar el trabajo colaborativo entre docente-estudiante, estudiante-estudiante como apoyo y estrategia con el fin de que la gran mayoría de ellos alcancen el objetivo del desarrollo del pensamiento métrico-espacial.

Y, por último, aplicar la estrategia didáctica de resolución de problemas en ejercicios de ángulos, áreas, perímetros y volumen para figuras planas y cuerpos geométricos presentados en

esta investigación, con el fin de verificar un verdadero desarrollo en el pensamiento métrico-espacial y ampliar un pensamiento crítico y analítico en el estudiante.

Referencias

Almeida, M. (2002). Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de 2007 en http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UB/AVAILABLE/TDX-1008102-120710//TOL119.pdf

Araya, R. G., & Alfaro, E. B. (s. f.). *ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA*. 24.

Ausubel-Novak-Hanesian (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. 2° Ed. TRILLAS México

Báez, R. & Iglesias, M. (2007). *Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". Enseñanza de la Matemática. Vols. 12 al 16. Número extraordinario. pp. 67-87.*

Camargo Uribe, L. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. *Revista*

Castiblanco, A.; Urquina, H.; Camargo, L. & Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Colombia: Ministerio de Educación Nacional, Enlace Editores Ltda. Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Barcelona. Recuperado el 22 de octubre de Formación a Distancia. Memoria de la tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Ciencias*

Colombiana de Educación, 60, 41. <https://doi.org/10.17227/01203916.840>

Hall, B., & López, M. I. (2010). *Discurso académico: Manuales universitarios y prácticas pedagógicas*. 26.

Gagné, R. (1975). *Principios básicos del aprendizaje para la instrucción*. Distrito Federal, México: Diana

Hall, B., & López, M. I. (2010). *Discurso académico: Manuales universitarios y prácticas pedagógicas*. 26.

Hernández, V. & Villalba, M. (2001). *Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original. Recuperado el 18 de octubre de 2007 en*
<http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm>

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill Interamericana.

Hitt, F., & Quiroz Rivera, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación*, 73, 151. <https://doi.org/10.17227/01203916.73rce151.175>

Ley 115 de 1994. Ley General de Educación y Desarrollos Reglamentarios. Bogotá, D.C

Linares, A. R. (s. f.). Desarrollo Cognitivo: Las Teorías de Piaget y de Vygotsky. 29.

Merrill, D. (1991). *Second generation instructional design*. Recuperado de:

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.107.9754>

Molina, L. (s. f.). *Aprendizaje significativo*. 10.

Pajoy, D. P. R., Sterling, A. G., & Cuellar, J. A. V. (s. f.). *APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA MEDIADA CON HERRAMIENTAS DIDÁCTICAS*. 108.

Nacional, M. d. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Santa Fé de Bogotá, Colombia: Magisterio.

Nacional, M. d. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Peñaloza-Guerrero, J. (s. f.). *INCIDENCIA DEL APRENDIZAJE COLABORATIVO EN LA PRÁCTICA EDUCATIVA*. *Didácticas Específicas*, 15.

Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). *EL MODELO DE VAN HIELE Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA*. 27(1), 22.

VYGOTSKY, L. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Argentina: Ateneo.

WADSWORTH, B. (1991) *Teoría de Piaget del desarrollo cognoscitivo y afectivo*.
México: Diana.

Zabaleta, Q. (s. f.). Para optar al Título Profesional de Licenciado en Educación
Especialidad: A. P. Ciencias Sociales—A.S. Psicología. 98.

Apéndice

Apendice A. Taller diagnóstico



MI ESCUELA EN CASA



NOMBRE ESTUDIANTE: _____

Semana 4: febrero 15 a 19

Grado: 9°

Asignatura: matemáticas

Periodo: I

Docente: Paula Andrea Osorio G – María Camila Zapata Buriticá

TALLER INICIAL – DIAGNÓSTICO

El siguiente taller está pensado para fortalecer algunos conceptos anteriormente vistos en grado octavo, y tener los conocimientos aprendidos para las temáticas del grado noveno. Cada pregunta debe resolverse con procedimientos y dejar la respuesta

- Sonia va a comprar sus útiles que son: 2 bolígrafos, 1 lápiz, 6 libretas tamaño profesional y una mochila. El precio de cada bolígrafo es de \$3.50, el lápiz cuesta \$2.20, las libretas tamaño profesional están a \$18.90 cada una y la mochila cuesta \$213.00. ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a la cantidad que necesita Sonia para comprar los útiles?
 - \$335.60
 - \$282.74
 - \$326.70
 - \$335.00
- Roberto recibe de sus padres \$300.00 casa quince días. Al inicio de cierta quincena Roberto propone el siguiente convenio: les pide que le den dos centavos el primer día, 4 centavos el segundo día, 8 centavos el tercer día y así sucesivamente. Si los padres aceptan el convenio, ¿cuántos pesos le darían el décimo quinto día?
 - 32.768
 - 327.680
 - 3.276.800
 - 3.276.800
- Lee, comprende el lenguaje y responde. El valor numérico del polinomio $X^2 + 2X + 1$, cuando x es igual a 3 es
 - 12
 - 11
 - 13
 - 16
- Si sé que $X = 2$, $y = 3$, el número de la palabra " $X+Y+X+X+Y+X$ " es
 - 13
 - 14
 - 12
 - 10
- Camilo tiene el doble de edad que Luis. Luis tiene el triple de edad que Juan, y Juan la mitad de 16. ¿Cuántos años tiene Camilo?
 - 24
 - 8
 - 48
 - 12
- Los balones de fútbol y baloncesto de una escuela deportiva suman 40 en total. Se sabe que hay 2 balones de baloncesto por cada 3 de fútbol. ¿Cuántos hay de cada uno?
 - 5 de baloncesto y 35 de fútbol

- b. 16 de baloncesto y 24 de fútbol
 c. 24 de baloncesto y 16 de fútbol
 d. 80 de baloncesto y 120 de fútbol

7. En una fiesta se dieron refrescos en presentación jumbo. Si Juan se tomó $\frac{3}{4}$ partes del refresco de limón, Octavio $\frac{5}{8}$ del de naranja, César la mitad del de uva y Yolanda $\frac{3}{5}$ partes del de mandarina, ¿a qué envase de refresco le queda más contenido?

- a. Limón
 b. Uva
 c. Naranja
 d. Mandarina

8. Al operar $3m^2 - 4mn - 7m^2 - 8mn + 2m$ se obtiene como resultado

- a. $10m^2 - 12mn + 2m$
 b. $-4m^2 - 12mn + 2m$
 c. $-19m^2n + 5m$
 d. $4m^2 + 12mn - 2m$

9. Al factorizar $a^2 + 7a - 60$ su resultado es

- a. $(a + 12)(a + 5)$
 b. $(a - 5)(a - 12)$
 c. $(a + 12)(a - 5)$
 d. $(a + 5)(a - 12)$

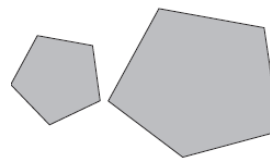
10. El sólido que se obtiene al girar un triángulo rectángulo sobre uno de los catetos es:

- a. una esfera.
 b. un cono.
 c. un cilindro.
 d. una pirámide.

11. No es un sólido de revolución:

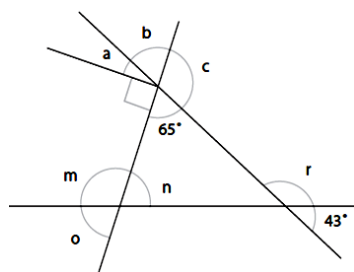
- a. una esfera.
 b. un cilindro.
 c. un prisma.
 d. un cono.

12. Con respecto a las figuras que se muestran en seguida, escoge la opción correcta:



- a. son congruentes ya que sus lados correspondientes son congruentes y sus ángulos correspondientes también lo son.
 b. son semejantes ya que sus lados correspondientes son congruentes y sus ángulos correspondientes también lo son.
 c. son semejantes ya que sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes también lo son.
 d. son semejantes ya que sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son congruentes.

Las preguntas de la 13 a la 16, se responde de acuerdo con la observación de la siguiente figura



13. En la figura son ángulos adyacentes
 a. b y n b. c y r c. m y n d. $65^\circ + 90^\circ$

14. En la figura, la medida del ángulo a , es:
 a. 25° b. 15° c. 75° d. 10°

15. La medida del ángulo r es:
 a. 136° b. 137° c. 138° d. 139°

16. La medida del ángulo c es:
 a. 120° b. 112° c. 95° d. 115°

Apendice B. Manual didáctico

El manual didáctico es la estrategia mediadora para el aprendizaje del pensamiento métrico espacial, el cual se fue elaborada siguiendo el modelo pedagógico EAU y la rúbrica didáctica dispuesta desde la planeación, para la ejecución de las distintas actividades.

Cada actividad integra un bosquejo del uso de material en concreto y también la implementación de la tecnología computacional para favorecer el aprendizaje de figuras planas y tridimensionales con sus características, elementos y propiedades, además, el cálculo de sus perímetros, áreas y volúmenes.

Este manual permite que el estudiante sea participativo y autónomo de su propio proceso escolar, ya que las actividades son interactivas que facilitan la comprensión de las temáticas expuestas en grado noveno.

En el siguiente enlace pueden evidenciar el manual didáctico aplicado:

<https://drive.google.com/file/d/1zCXqxyFF2zmfDKEOFJT-6RX0pr6Y2tQU/view?usp=sharing>

Apendice C. Evidencias del trabajo con las guías de trabajo y resultado presentado por estudiantes


Las clases se desarrollaron inicialmente virtuales debido a la pandemia, posteriormente aparece la postpandemia, lo que permite trabajar con los estudiantes de manera presencial.

Las evidencias enviadas por algunos estudiantes se pueden verificar en el siguiente enlace:

<https://drive.google.com/drive/folders/1ijyrvNwyniKNKvJ2wgpD0jv7YnfEMJzr?usp=sharing>


Apendice D. Taller resolución de problemas con el pensamiento tridimensional

<https://drive.google.com/file/d/1f-n49zT-fkrw1rz5TvIIPtkaJRYKRild/view?usp=sharing>



MI ESCUELA EN CASA

NOMBRE ESTUDIANTE: _____



Semana: **septiembre**

Grado: **9º**





Asignatura: **Matemáticas**

Periodo: _____

Docente: **María Camila Zapata**

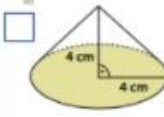
TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

RESUMEN

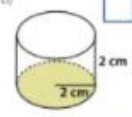
Cuerpo geométrico	Esquema	Área	Volumen
Prisma		$A_T = A_b + 2A_l$	$V = A_b \cdot h$
Cilindro		$A_c = 2\pi \cdot r(h + r)$	$V = \pi r^2 \cdot h$
Pirámide		$A_T = A_l + A_b$	$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$
Cono		$A_c = \pi \cdot r(r + g)$	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

1. Ordene los siguientes cuerpos de menor a mayor volumen.

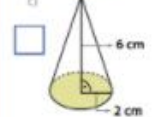
a)



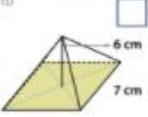
b)



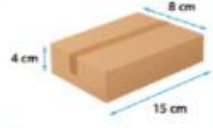
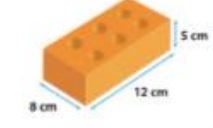


c)




d)



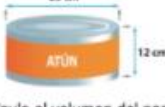
2. Halle el volumen de los siguientes prismas.

- Una caja de cartón. 
- Un ladrillo de construcción. 
- Un empaque de dulces. 
- Una caja de regalo. 


3. El panadero del barrio va a hacer varias tortas para la celebración del día de la madre. Para ello, va a utilizar moldes con forma de prismas cuadrados de 30 cm de lado y 6 centímetros de altura. Sabe que para que no se peguen las tortas, se debe cubrir el interior del molde con un papel especial. ¿Cuántos centímetros cuadrados de este papel, mínimo, va a necesitar para cada molde?



4. ¿Cuánto metal se requiere para construir una lata como la que se muestra en la figura?




5. Calcule el volumen del papel higiénico que hay en el siguiente rollo.



6. Una matera de metal tiene forma de medio cono con $d = 80$ cm y $h = 60$ cm.

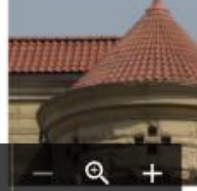
a) ¿Qué capacidad tiene la matera?



7. El techo de una torre tiene forma de cono con diámetro de la base $d = 4,8$ m y altura $h = 6$ m.


a) ¿Cuál es el volumen del techo?

b) Cuánto cuesta el recubrimiento del techo en baldosa, si se calcula que $1 m^2$ de este recubrimiento cuesta \$ 24.000?




8. Carla quiere realizar una figura de chocolate rellena de brownie de forma de pirámide, si lo quiere preparar del siguiente tamaño.

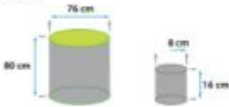
a) ¿Cuánto relleno de brownie necesita en cm^3 ?



9. La pirámide de Keops antiguamente estuvo cubierta de un metal en sus caras laterales, esta tiene una base cuadrada de arista de 230 km y su altura es de 146 km. ¿Cuánto metal en km^2 fue utilizado para cubrirla?



10. Si en el recipiente grande hay agua, ¿cuántos recipientes pequeños llenos de agua se deben sacar del recipiente grande para que este quede totalmente vacío?



Página 1 / 1

Apendice E. Taller final prueba saber

Se toman algunas preguntas formuladas y propuestas por el ICFES 2013 , 2014 Y 2015 para verificar la preparación que tienen los estudiantes con los conceptos aprendidos para enfrentarse a las pruebas de grado noveno y las pruebas de evaluar para avanzar.

Pueden evidenciar el taller aplicado en el siguiente enlace:

<https://drive.google.com/file/d/18YMN3u9DmYpV3mjDPI1PrksoFmEySdNO/view?usp=sharing>

Apendice F. Cuestionario validación manual didáctico

El siguiente cuestionario permitió indagar con docentes el material implementado durante el trabajo investigativo, lo cual se realizó a través de entrevista con los docentes de la I. E.

Andrés Bello.

Pregunta 1

Usted como docente en el área de matemáticas, ¿considera que el manual didáctico que se propone es una estrategia lúdica y didáctica para desarrollar en futuros trabajos de aula?

Pregunta 2

Usted como docente de matemáticas ¿utilizaría el presente manual en su planeación de aula?

Pregunta 3

¿Considera que el uso del presente manual facilitaría el aprendizaje de los estudiantes y el desarrollo de competencias matemáticas a través del pensamiento métrico espacial?