



**Estudio comparativo en la enseñanza del Teorema de Pitágoras y Thales con metodologías TIC y tradicional en estudiantes del grado noveno de la I.E. Yarumal y Bulgaria.**

Estudiantes: Elizabeth Miranda López & Gustavo Adolfo Miranda López

Facultad de Educación, Universidad Católica de Manizales  
Licenciatura en matemáticas y física

Asesora: Mg. Paula Andrea Osorio Gutiérrez

4 de diciembre de 2021

### **Dedicatoria**

A mi familia que me inspira para continuar con mis metas y a sobresalir, a mi esposa que siempre me apoya a ser mejor cada día y a mis hijas que son un motivo para levantarme cada día.

Gustavo Adolfo Miranda López

El presente trabajo se lo dedico a mi familia quienes siempre me brindan su acompañamiento y colaboración en cada reto asumido.

Destaco de manera especial a dos personas maravillosas que siempre han estado a mi lado y nunca me han dejado sola, a mi esposo, compañero y amigo quien siempre ha estado conmigo incluso en los momentos más difíciles, constante con su motivación y apoyo hasta donde los alcances se lo han permitido. Y a mi hermano quien siempre me cuida, apoya y anima a continuar adelante cuando siento desfallecer.

Elizabeth Miranda López

### **Agradecimientos**

Primero que todo a Dios quien ha permitido que culminemos con éxito este nuevo proyecto, a nuestras familias, compañeros y docentes que nos acompañaron desde el primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física, porque cada uno de ellos fue un apoyo fundamental para el fortalecimiento de nuestras capacidades.

Es importante resaltar el respaldo que se tuvo de los directivos y docentes de las dos Instituciones Educativas, quienes sacaron su espacio e implementaron horarios para permitir que se ejecutara la propuesta de investigación. También agradecer a los estudiantes de los grados noveno quienes siempre estuvieron con el ánimo y entusiasmo de participar en cada una de las actividades que dejaron grandes aprendizajes.

### **Resumen**

La presente investigación se desarrolló en el grado noveno de dos instituciones rurales de los municipios de Villahermosa y Líbano en el departamento del Tolima; basado en la aplicación de metodologías TIC y en la enseñanza tradicional para determinar los aprendizajes de los estudiantes enfocados en temas del pensamiento espacial métrico.

Tiene como objetivo establecer metodologías TIC y tradicional para la enseñanza de los Teoremas de Pitágoras y Thales a estudiantes del grado noveno de la I.E. Yarumal y Bulgaria, en esta se establece una serie de aplicativos para el desarrollo de las temáticas en la primera institución y la construcción de guías didácticas para la aplicación en la segunda.

Para determinar el índice de ganancia mediante la aplicación del test de Hake, en el cual se determina que la institución en la cual se desarrollaron estrategias TIC se evidencia una ganancia alta y en la institución de enseñanza tradicional una ganancia media; lo cual determinan que los aprendizajes fueron más evidentes con la metodología TIC, ya que esta favorece los aprendizajes, la modelación de las figuras en el espacio bidimensional y la transformaciones de las mismas, permitiendo un mejor nivel de aceptación en los estudiantes, mientras que los estudiantes con la metodología tradicional lograron avances, pero estos no fueron tan significativos, dadas la escasos de recursos para la modelación de figuras y el tiempo que se emplea para la creación de las mismas.

### **Abstract**

The present research was developed in the ninth grade of two rural institutions in the municipalities of Villahermosa and Lebanon in the department of Tolima; based on the application of ICT methodologies and traditional teaching to determine the learning of students focused on issues of metric spatial thinking.

Its objective is to establish ICT and traditional methodologies for the teaching of the Pythagorean and Thales Theorems to students of the ninth grade of the I.E. Yarumal and Bulgaria, in this a series of applications is established for the development of the themes in the first institution and the construction of didactic guides for the application in the second.

To determine the rate of gain through the application of the Hake test, in which it is determined that the institution in which ICT strategies were developed is evidenced a high gain and in the traditional educational institution an average gain; which determine that the learnings were more evident with the ICT methodology, since it favors the learning, the modeling of the figures in the two-dimensional space and the transformations of the same, allowing a better level of acceptance in the students, while the students with the traditional methodology achieved advances, but these were not so significant, given the scarcity of resources for the modeling of figures and the time used for the creation of them.

## Tabla de Contenido

Introducción .....	13
Capítulo I .....	16
Formulación del Problema .....	16
1.1 Planteamiento del Problema .....	16
1.1.1 Pregunta problema .....	19
1.1.2 Preguntas auxiliares .....	19
1.3 Objetivos .....	20
1.3.1 Objetivo general .....	20
1.3.2 Objetivos específicos .....	20
1.4 Justificación .....	22
1.5 Viabilidad .....	23
Capítulo II .....	24
Marco Referencial .....	24
2.1 Introducción .....	24
2.2 Marco de Antecedentes .....	24
2.3 Marco legal .....	26
2.3.1 Constitución Política de Colombia .....	26
2.3.2 Ley General de Educación .....	27
2.3.3 Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas .....	28
2.3.4 Derechos Básicos de Aprendizaje de las Matemáticas .....	30
2.3.5 Matriz de Referencia Matemáticas .....	31

ESTUDIO COMPARATIVO CON METODOLOGÍA TIC Y POSTPRIMARIA	7
2.3 Marco Teórico.....	32
2.5 Marco Conceptual.....	36
2.5.1 Pensamiento.....	37
2.5.1 Pensamiento matemático.....	38
2.5.3 Pensamiento espacial.....	38
2.5.4 Herramienta tecnológica.....	39
2.5.5 Competencia.....	40
2.5.6 Competencia matemática.....	42
2.5.7 Didáctica de las matemáticas.....	43
2.5.8 GeoGebra.....	44
2.5.9 Resolución de problemas.....	46
Capítulo III.....	47
Diseño Metodológico.....	47
3.1    Introducción.....	47
3.2    Descripción general del estudio.....	48
3.2.1 Enfoque.....	48
3.2.2 Población y muestra.....	49
3.2.3 Estructura metodológica.....	50
Capítulo IV.....	57
Resultados y discusión.....	57
4.1.    Introducción.....	57
4.2.    Resultados de pretest por Institución.....	57

ESTUDIO COMPARATIVO CON METODOLOGÍA TIC Y POSTPRIMARIA	8
4.2.1. Comparativo de resultados de las instituciones Yarumal y Bulgaria.....	63
4.3. Intervención de la estrategia didáctica .....	73
4.4. Resultados del postest .....	80
4.4.1. Comparativo de resultados del postest de las Instituciones Yarumal y Bulgaria	82
4.5. Factor ganancia de aprendizaje.....	86
Capítulo V .....	90
Conclusiones y recomendaciones. ....	90
5.1 Conclusiones .....	90
5.1.1 Respuesta a la pregunta central.....	90
5.1.2. Respuesta a las preguntas auxiliares .....	91
5.2 Recomendaciones .....	95
Apéndices.....	96

ESTUDIO COMPARATIVO CON METODOLOGÍA TIC Y POSTPRIMARIA	9
--	---

**Lista de tablas**

Tabla 1 Resultados pruebas saber grado 9 I.E. Yarumal .....	17
Tabla 2 Resultados de las pruebas SABER 9° I.E.T. Isidro Parra.....	18
Tabla 3. <i>Resultados Pretest</i> .....	52
Tabla 4. <i>Fases de la investigación</i> .....	56

**Lista de figuras**

Figura 1 <i>Resultados pretest I.E. Yarumal</i> .....	60
Figura 2 <i>Resultados Pretest I.E. Isidro Parra sede Bulgaria</i> .....	62
Figura 3 <i>Resultados pregunta 1, Pretest</i> .....	64
Figura 4 <i>Resultados pregunta 2, Pretest</i> .....	64
Figura 5 <i>Resultados pregunta 3, Pretest</i> .....	65
Figura 6 <i>Resultados pregunta 4, Pretest</i> .....	66
Figura 7 <i>Resultados pregunta 5, Pretest</i> .....	66
Figura 8 <i>Resultados pregunta 5, Pretest</i> .....	67
Figura 9 <i>Resultados pregunta 7, Pretest</i> .....	68
Figura 10 <i>Resultados pregunta 8, Pretest</i> .....	69
Figura 11 <i>Resultados pregunta 9, Pretest</i> .....	69
Figura 12 <i>Resultados pregunta 10, Pretest</i> .....	70
Figura 13 <i>Resultados pregunta 11, Pretest</i> .....	70
Figura 14 <i>Resultados pregunta 12, Pretest</i> .....	71
Figura 15 <i>Resultados pregunta 13, Pretest</i> .....	72
Figura 16 <i>Resultados pregunta 14, Pretest</i> .....	72
Figura 17 <i>Evidencia fotográfica prueba de reconocimiento, Pretets</i> .....	74
Figura 18 <i>Jornada de inducción en Geogebra, I.E. Yarumal</i> .....	75
Figura 19 <i>Evidencia segunda jornada con el aplicativo GeoGebra</i> .....	76
Figura 20 <i>Evidencia tercera jornada Teorema de Pitágoras y Thales con el aplicativo GeoGebra</i> .....	77

ESTUDIO COMPARATIVO CON METODOLOGÍA TIC Y POSTPRIMARIA	11
Figura 21 Evidencia fotográfica aplicación Postest.....	78
Figura 22 Evidencia jornada 1 y 2, Polígonos .....	79
Figura 23 Jornada 3 y 4, Teoremas de Pitágoras y Thales.....	80
Figura 24 <i>Resultados Postest I.E.Yarumal</i> .....	81
Figura 25 Resultados Postest I.E.T. Isidro Parra sede Bulgaria .....	82
Figura 26 Resultados Postest, características de polígonos .....	83
Figura 27 Resultados Postest, Teorema de Pitágoras .....	83
Figura 28 Resultados postest, Teorema de Thales .....	84
Figura 29 Comparativo Pretest - Postest I.E.Yarumal.....	85
Figura 30 Comparativo Pretest - Postest, I.E.T. Isidro Parra sede Bulgaria.....	86
Figura 31 Aplicativo en GeoGebra #1, Demostración Teorema de Pitágoras.....	117
Figura 32 Aplicativo en GeoGebra #2, Polígonos irregulares.....	117
Figura 33 Aplicativo en GeoGebra # 3, Aplicación Teorema de Pitágoras.....	118
Figura 34 Aplicativo en GeoGebra #4, Teorema de Thales .....	118
Figura 35 Aplicativo en GeoGebra # 5, Aplicación Teorema de Thales.....	119

ESTUDIO COMPARATIVO CON METODOLOGÍA TIC Y POSTPRIMARIA	12
--	----

**Lista de apéndices**

Apéndice A. Pretest .....	96
Apéndice B. Guías de estudio.....	101
Apéndice C. Aplicativos en GeoGebra.....	117
Apéndice D. Postest.....	120

### **Introducción**

El presente proyecto tiene la intención de proyectar a un escenario educativo rural la herramienta GeoGebra como instrumento de innovación educativa para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en el grado noveno de las Instituciones Educativas Yarumal y Bulgaria del municipio de Villahermosa y Líbano Tolima. Siendo GeoGebra un software dinámico de matemáticas enfocado en la educación como ayuda para diseñar gráficos interactivos dinámicos de áreas como: geometría, aritmética, álgebra, estadística, cálculo, entre otros.

La metodología TIC facilita la comprensión de algunos conceptos geométricos, estructurando la relación entre algunas nociones y procedimientos, por tal motivo se ha optado por emplear esta herramienta en un contexto rural aislado de tales innovaciones, promoviendo su aplicación a una determinada situación, donde se planteen construcciones que se relacionen con los conceptos del plan de estudios de la Institución, relacionados con el pensamiento espacial, generalizando en la comprensión matemática.

Por lo anterior expuesto, se plantea como una herramienta de enseñanza y aprendizaje, coherente con las necesidades, intereses y expectativas, por parte del docente, el estudiante y en general por el entorno inmediato de aplicación, en cuanto a la formación en esta área; la propuesta pretende reconocer la contribución que dicha estrategia puede generar en un contexto rural, convirtiendo esta práctica educativa en motivación para fortalecer el pensamiento matemático, incluyendo diversas formas de desarrollar y/o complementar el conocimiento matemático.

A continuación, se presenta el desarrollo de la investigación que ha estado enmarcada en las Instituciones Educativas Yarumal y Bulgaria del departamento del Tolima, donde se va a realizar con estudiantes del grado noveno. Es de anotar que en ambas Instituciones se vivió la crisis

de la pandemia, generada por el COVID19, por lo que fue propicio generar espacios de retroalimentación de las clases a través de plataformas virtuales, donde se tuvo algunas interacciones con los estudiantes de ambas Instituciones, reconociendo deficiencias y necesidades que se pueden mencionar en esta rama de las matemáticas por parte de los investigadores.

Los estudiantes han venido trabajando geometría en base a la metodología de la postprimaria, la cual está articulada bajo los parámetros del Ministerio de Educación Nacional, es de aquí, donde se inicia con una prueba de conocimiento (pretest), elaborada teniendo en cuenta los diferentes niveles de desarrollo del pensamiento espacial métrico. Luego se procede a implementar la estrategia didáctica propuesta en esta investigación, haciendo la intervención con metodología TIC en la I.E. Yarumal, teniendo en cuenta que la I.E. Isidro Parra Sede Bulgaria se continuo con la metodología tradicional. Finalmente se aplica una prueba (postest) donde se analiza la verdadera influencia en el proceso de aprendizaje de la población sujeto de estudio por parte de los investigadores.

La propuesta pedagógica elaborada permite que los estudiantes puedan acceder a contenidos geométricos en el entorno de las TIC de forma muy sencilla, lo que favorece la incorporación de las nuevas tecnologías, para beneficio de toda la comunidad educativa y así comprobar su verdadera contribución en los procesos de enseñanza aprendizaje.

En el capítulo I se analiza el contexto de las Instituciones Educativas, las situaciones problema que se encuentran, las formas de enseñanza que hacen que los estudiantes obtengan bajos resultados en el pensamiento espacial métrico y cuáles son los objetivos que quieren lograr con esta propuesta.

En el capítulo II se hace énfasis en investigaciones relacionadas con el tema de la propuesta, las cuales sirven de apoyo tanto teórico como práctico para abordar con mayor claridad la situación problema, además diferentes marcos teóricos como bases conceptuales para así dar resultados y conclusiones acertadas.

En el capítulo III, principalmente se enfoca en el diseño metodológico, describe el desarrollo del trabajo en las dos Instituciones Educativas con los estudiantes del grado noveno, el cual se realiza mediante la mediación pedagógica propuesta, el trabajo de guías didácticas como apoyo para el trabajo con el software libre GeoGebra.

En el capítulo IV se realizan los respectivos análisis estadísticos, se describen los datos obtenidos en la prueba inicial, haciendo comparativo entre las dos instituciones según los resultados, el análisis de la implementación de cada una de las guías y aplicativos desarrollados en GeoGebra, con este proceso se obtendrán las conclusiones para cada una de las cuestiones objeto de estudio.

En el capítulo V se elaboran las conclusiones con los resultados obtenidos, poniendo en manifiesto que el aplicativo GeoGebra es una herramienta de estudio de representación matemática y de la geometría, que favorece la interacción, motivación e interés de los estudiantes por permitir un aprendizaje dinámico, llamativo y significativo.

## Capítulo I

### Formulación del Problema

#### 1.1 Planteamiento del Problema

El estudio se desarrollará en dos contextos diferentes. En la Institución Educativa Yarumal del municipio de Villahermosa, basado en los relatos del marco contextual de *Proyecto Educativo Institucional Yarumal [PEI]*, (2021) ubicada a 12 kilómetros vía carretable de la cabecera municipal en la vereda del mismo nombre, es una región rural campesina, el grupo poblacional evidencia bajo nivel educativo ubicándose con estudios de básica primaria. Los hogares se categorizan en nivel I y II del SISBÉN y son beneficiarios de programas gubernamentales como, Más Familias en Acción. La comunidad educativa se conforma con población flotante, llegan a las fincas, en su mayoría cafeteras, en tiempos de cosecha y después viajan a sus sitios de origen, hecho que dificulta un proceso educativo de calidad por su falta de permanencia en las Instituciones Educativas. Existe una minoría de habitantes en condición de desplazamiento por violencia.

La institución recibe estudiantes de las veredas: El castillo, La Esmeralda, Guadualito, El Resguardo, La Linda, El Triunfo, Palmital y Buenos Aires. El Plantel es beneficiado con Transporte Escolar para el desplazamiento de los estudiantes desde sitios a más de una hora de recorrido, el proceso académico se enmarca en el programa Escuela Nueva.

Por otra parte, la Institución Educativa Técnica Isidro Parra sede Bulgaria, según su descripción en *Proyecto Educativo Institucional Isidro Parra [PEI]*, (2021) se encuentra localizada en el ámbito rural a 10 km del casco urbano del municipio de El Líbano Tolima. Se caracteriza por ser una vereda netamente cafetera, lo cual implica una población flotante, los

cuales se radican en su mayoría en el estrato 1. La sede presenta en los niveles de primaria el modelo de escuela Nueva, además de la educación secundaria, mediante el modelo de postprimaria, donde su número de estudiantes por salón es bajo, el cual oscila entre los 9 y 15 estudiantes por grado.

Al revisar los resultados de las pruebas saber, se puede evidenciar que las instituciones han obtenido resultados con porcentaje muy alto de respuestas incorrectas en los aprendizajes del pensamiento espacial métrico en cuanto a la competencia de razonamiento.

En las tablas 1 y 2, se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes del grado noveno desde el año 2015 al 2017. Estos son los compilados de los aprendizajes del pensamiento espacial métrico donde se evidenciaron valoraciones negativas destacables, las cuales se establecen de igual forma para la I.E. Yarumal y la I.E.T. Isidro Parra.

**Tabla 1**  
**Resultados pruebas saber grado 9 I.E. Yarumal**

APRENDIZAJES PENSAMIENTO ESPACIAL MÉTRICO	PORCENTAJE DE ERROR POR AÑO		
	2015	2016	2017
Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales.	75.0%		60.0%
Analizar la validez o invalidez de usar procedimientos para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.	20.0%	72.7%	51.9%
Generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el área de figuras planas y el volumen de algunos sólidos.	70.0%	45.5%	50.0%

Predecir y explicar los efectos de aplicar transformaciones rígidas sobre figuras bidimensionales.	60.0%	33.3%	55.0%
Argumentar formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.	60.0%	21.2%	50.0%

Fuente: Duarte R. & Sanabria M., (2018). Informe por colegio.

Nota: La tabla muestra el histórico de los resultados de las pruebas de estado SABER de los últimos años registrados.

**Tabla 2**  
**Resultados de las pruebas SABER 9° I.E.T. Isidro Parra**

APRENDIZAJES PENSAMIENTO ESPACIAL MÉTRICO	PORCENTAJE DE ERROR POR AÑO		
	2015	2016	2017
Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales.	76.7%		47.8%
Analizar la validez o invalidez de usar procedimientos para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.	30%	56.3%	62.4%
Generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el área de figuras planas y el volumen de algunos sólidos.	56.7%	60.6%	52.0%
Predecir y explicar los efectos de aplicar transformaciones rígidas sobre figuras bidimensionales.	43.3%	42.4%	60.0%
Argumentar formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.	58.3%	37.4%	61.7%

Fuente: Duarte R. & Sanabria M., (2018), Informe por colegio.

Nota: La tabla muestra el histórico de los resultados de las pruebas de estado SABER de los últimos años registrados.

En los procesos de retroalimentación adelantados por los establecimientos se llega a la conclusión que el primer factor que incide en los resultados es la falta de análisis que impide que los estudiantes tengan argumentos de valor a la hora de enfrentar las pruebas y así obtener resultados.

Como posible respuesta a esta problemática que afecta de forma directa a la población rural, se pretende implementar la aplicación de una herramienta tecnológica para fortalecer el pensamiento espacial métrico que facilite la enseñanza y permita obtener procesos más rápidos y con alto nivel de comprensión.

### ***1.1.1 Pregunta problema***

¿Qué tipo de estudio es más efectivo para la enseñanza del Teorema de Pitágoras y Thales si se emplean metodologías TIC y tradicional a estudiantes del grado noveno de la I.E. Yarumal y I.E. Isidro Parra sede Bulgaria?

De la pregunta central se infieren las siguientes preguntas auxiliares:

### ***1.1.2 Preguntas auxiliares***

¿Cómo los estudiantes lograron desarrollar sus competencias con el uso de GeoGebra?

¿Cómo se empleó la tecnología con el modelo de enseñanza para facilitar los aprendizajes de los estudiantes?

¿Cómo se describe la evolución de los estudiantes mediante la implementación del aplicativo GeoGebra?

¿Las herramientas tecnológicas ayudan a fomentar el desarrollo de competencias en los estudiantes?

¿Es necesario continuar desarrollando metodología postprimaria, sabiendo que ya existen recursos y herramientas que facilita la enseñanza de la geometría empleando las TIC?

### **1.3 Objetivos**

#### ***1.3.1 Objetivo general.***

Establecer metodologías TIC y tradicional en la enseñanza de los Teoremas de Pitágoras y Thales a estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Yarumal y I.E. Isidro Parra sede Bulgaria.

#### ***1.3.2 Objetivos específicos.***

1. Realizar un diagnóstico a través de la aplicación de un pre test, para determinar los niveles de competencia del pensamiento espacial métrico a situaciones matemáticas del contexto.
2. Diseñar guías de estudio para integrar la enseñanza del pensamiento espacial métrico acercando al estudiante al aplicativo GeoGebra.

3. Implementar la guía de estudio usando el aplicativo GeoGebra en los estudiantes del noveno grado.
4. Validar a través de un posttest la estrategia implementada en el aprendizaje del teorema de Pitágoras y de Thales con el uso del aplicativo en GeoGebra.

#### **1.4 Justificación**

Las matemáticas y en este caso la geometría, desde hace tiempo viene convirtiéndose en el área más problemática para los estudiantes en educación secundaria incluso muchas veces desde la educación inicial, esto puede ser al modo tradicionalista en que han sido enseñadas, lo aburridas que en ocasiones se vuelven o simplemente no hay una afinidad con ellas. Lo anterior nos da a entender cómo se minimiza el desarrollo del pensamiento matemático y geométrico.

Por ende se da a entender que los medios tecnológicos ayudan a fomentar la creatividad, a motivar al estudiante y el desarrollo del pensamiento geométrico. Es claro que hoy en día los niños nacen con una habilidad para el manejo de las herramientas tecnológicas, lo que les implica una mayor facilidad en el uso de estas herramientas y motivación para alcanzar el conocimiento.

Es por esto, que el desarrollo de esta investigación favorece la enseñanza y el aprendizaje de la geometría; en concreto, a lo referido al pensamiento espacial, en un contexto rural, implementando estrategias comunicativas y pedagógicas apoyadas en el aplicativo GeoGebra.

Dicha aplicación incide positivamente en el desarrollo de aprendizajes en los estudiantes del grado noveno, los cuales, al tener conocimientos básicos de las nociones y los procedimientos de la geometría, puedan mediante la herramienta tecnológica, poner en práctica dichos aprendizajes y visualizar por medio de diferentes actividades la aplicación de estos contenidos los cuales tendrá dinamismo y movimiento que genera un aprendizaje significativo.

Por otra parte, para mejorar el proceso de enseñanza, se propone la implementación de estrategias de apoyo a los docentes de matemáticas, para vincular la herramienta GeoGebra dentro del plan de área y su planeación académica, como módulo de sustento para mejorar los aprendizajes, llevando así, de una forma amena, la geometría al aula de clase, que favorezca la comprensión de las diferentes temáticas.

### **1.5 Viabilidad**

La propuesta de intervención proviene de un análisis sistemático de las instituciones en las cuales se desarrolla la investigación, encontrando que cada una contiene los instrumentos básicos para el trabajo. La I.E. Yarumal cuenta con la cantidad de equipos de cómputo necesarios para el desarrollo de las actividades en el aplicativo GeoGebra y con las aulas de clase teniendo presente los protocolos de bioseguridad que garantiza la cantidad de estudiantes en alternancia que se presentan en tiempos de postpandemia.

Es importante anotar que la I.E. Isidro Parra sede Bulgaria, no cuenta con los suficientes recursos tecnológicos y menos con acceso a la conectividad de forma permanente, esto no impide el desarrollo de las actividades puesto que las guías son impresas y llevadas a las aulas aunque el aplicativo es libre y se puede usar de manera offline, se opta porque este sea el grupo control, donde se trabaje de manera tradicional o como se conoce en el sector rural postprimaria.

## Capítulo II

### Marco Referencial

#### 2.1 Introducción

Se han realizado varias investigaciones respecto al apropiación del pensamiento espacial métrico de estudiantes de básica secundaria, haciendo énfasis en el uso de software educativos para mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, las cuales se analizarán para sentar bases y corroborar información en la presente investigación.

#### 2.2 Marco de Antecedentes

Dentro de los proyectos de referencia encontramos el documento elaborado por Rodríguez & Graus (2017) sobre las “Actividades con medios dinámicos para el proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos geométricos”, de la Universidad de las Tunas, Cuba, dónde se mencionan las deficiencias de actualización en la enseñanza de la geometría y cómo se pueden apoyar en la tecnología disponible, dentro de las cuales se menciona el uso del aplicativo GeoGebra, mediante los cuales pudieron evidenciar cambios favorables en los técnicas actitudinales y de aprendizaje por parte de los estudiantes, lo cual argumenta el objetivo del proyecto presentado para el estudio de estrategias tecnológicas en el aula para el fortalecimiento de la comprensión de la geometría.

A nivel local, se ubicó en la base de datos de la Universidad Católica de Manizales el proyecto elaborado por Urrea-Buitrago sobre el “Fortaleciendo el pensamiento geométrico en básica secundaria, a través del proceso de modelación de las características del triángulo,

haciendo uso del software GeoGebra” (2018), dónde menciona en primer lugar la apatía que presentaban los estudiantes hacia la geometría, muchos de los cuales, según el autor, se referencia que la falta conexión entre el contenido y el contexto, pero mediante el aplicativo GeoGebra se encontraron mejoramientos destacables por medio el modelo de Van Hiele y este se relaciona con el proyecto dado la importancia de sus metodologías aplicadas a la enseñanza.

En la universidad de Guayaquil, Ecuador, se encontró el proyecto de Morán (2019) titulado: “Recursos tecnológicos para el aprendizaje de los cuerpos geométricos de la asignatura de matemáticas. Aplicación interactiva multimedia”, menciona la incidencia de las herramientas tecnológicas en los aprendizajes de los estudiantes del grado noveno, el cual implementa una guía interactiva, tanto para estudiantes y docentes. Lo anterior referencia la base del proceso del proyecto dada la importancia de capacitar a la comunidad educativa para el uso de herramientas tecnológicas que se pueden ser aplicadas con los estudiantes.

El proyecto elaborado por Montaña (2012) sobre el “Diseño de actividades en el aula de clase, para los estudiantes de básica secundaria de la institución educativa colegio Santa Bárbara, con herramientas tic, para el desarrollo del pensamiento espacial, métrico y sistemas de medida”, buscaba el diseño de actividades mediante el uso de TIC para fortalecer los desempeños de los estudiantes de básica secundaria, el cual se relaciona con el proyecto, dada la implementación de herramientas tecnológicas para el mejoramiento de los aprendizajes.

## **2.3 Marco legal**

### ***2.3.1 Constitución Política de Colombia***

La educación al ser un derecho fundamental del ser humano, se establece como requisito indispensable en el marco legal de nuestro proyecto, dada la prioridad que tiene la educación como medio transformador de entornos sociales, ambientales y culturales.

Por lo anterior la Constitución Política de Colombia, por medio de algunos artículos, establece las normas necesarias para el mejoramiento continuo de los procesos educativos, mencionando la estructura y los beneficios esenciales para cada sector educativo.

A continuación, se relacionan los principales artículos que se presentan en la Constitución Política de Colombia en relación a la educación:

**Artículo 67:** Este artículo, Constitución Política de Colombia [Const], art. 67 “La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura” (1991).

Además, se establece que la sociedad en general debe velar por los derechos generales a ser educados de forma gratuita en edades tempranas, comprendida, como mínimo hasta los quince años.

**Artículo 68:** Constitución Política de Colombia [Const], art. 68 (1991) “El estado garantiza, las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra”.

También hace la aclaración que las personas a cargo de la educación de las personas deben caracterizarse por tener idoneidad y estar capacitadas para el cargo”

**Artículo 70.** Constitución Política de Colombia [Const], art. 70 (1991) Este artículo promueve que todos los colombianos deben tener acceso a la cultura, mediante la educación continua y la enseñanza de las ciencias, las artes, técnicas y profesionales en sus diversas etapas.

Además, es deber del estado promover el desarrollo de los valores, la investigación y la ciencia.

### ***2.3.2 Ley General de Educación.***

Como bien lo especifica su nombre la Ley General de Educación [Ley 115] (1994), establece las normativas particulares para cada uno de los niveles educativos establecidos. Además, posee un objetivo definiendo a la educación como un proceso de educación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en el desarrollo integral del ser humano, indicando las normas generales para regular el servicio de educación pública que cumple una función social de acuerdo con las necesidades e intereses de las personas.

Los artículos enmarcados en la Ley General de Educación que permiten la sustentación de este proyecto se mencionan a continuación:

**Artículo 5°:** fines de la educación.

Numeral 13: se debe promocionar en la sociedad y en las personas sus habilidades para investigar, crear y el manejo de las tecnologías, para propiciar el desarrollo del país y el ingreso a la educación del sector público.

**Artículo 20:** a) Garantizar el acceso al conocimiento de diversas índoles, científico, humanístico, tecnológico, artístico y las relaciones sociales y con la naturaleza, de tal manera que el estudiante esté preparado para la educación superior y su vinculación a un trabajo y a la sociedad. Ley General de Educación [Ley 115], Arts. 5, 20. (1994).

### ***2.3.3 Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.***

La educación por competencias es un término generado para las áreas fundamentales del conocimiento, por ende, las competencias matemáticas establecen estructuras encaminadas a la estructuración y transformación educativa, a través de aprendizajes basados en problemas que posibiliten los niveles de competencia cada vez más complejos.

Dentro de las clasificaciones generales enmarcadas en los estándares se evidencian por el Ministerio de Educación Nacional [MEN] “los cinco procesos de la actividad matemática: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos” (2006)

Enmarcado en el proyecto se centra el razonamiento como eje de investigación puestas las estadísticas de las pruebas saber y revelados anteriormente. El razonamiento en los grados superiores se va separando de algunos modelos y los materiales que se utilizan, ya que ellos trabajan en la validación de datos, apoyados de teorías y las metodologías de ensayo y error para

generar sus propias conclusiones, aunque en ocasiones deben apoyarse de artefactos, materiales, modelos y otros dibujos.

Además, se deben vincular los cinco tipos de pensamiento matemático; estos enuncian las virtudes matemáticas para de acuerdo a sus capacidades y teniendo en cuenta el entorno en el que se desarrollan, el saber hacer en contexto, fortaleciendo el desarrollo de competencias y el enriquecimiento del entorno en el que se desarrollen.

Como eje central del proyecto se tomará el pensamiento espacial y los sistemas geométricos siendo estos según lo descrito en los Lineamientos curriculares: Matemáticas por el Ministerio de Educación Nacional [MEN], “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (1998, p. 37).

Dadas sus aplicabilidades en diversas herramientas tecnológicas y el impacto en los estudiantes al poder modelar sus propias experiencias a partir de un aplicativo que puede ser instalado en diversos medios como el celular, las tabletas, los computadores, entre otros; facilitando así el acercamiento entre el estudiante y el conocimiento.

Según el enfoque del Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006), en los estándares básicos de competencias matemáticas, determinan los ejes fundamentales de este pensamiento como:

Los puntos, líneas rectas y curvas, regiones planas o curvas limitadas o ilimitadas y los cuerpos sólidos o huecos limitados o ilimitados pueden considerarse como los elementos de complicados sistemas de figuras, transformaciones y relaciones espaciales: los sistemas geométricos. (p. 17)

La eficiencia de los recursos va ligada al quehacer docente, puesto que son estos recursos didácticos los que ayudan a fomentar la construcción del conocimiento del estudiante y sus relaciones con el medio.

Cada conjunto de recursos utilizados en etapas en una situación de aprendizaje significativa e integral puede recrear algunos elementos estructurales de los conceptos y procedimientos propuestos para que los estudiantes los aprendan y practiquen. Por tanto, esta situación ayuda a profundizar y consolidar diferencias. Proceso general y diferentes tipos de pensamiento matemático. (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006)

#### ***2.3.4 Derechos Básicos de Aprendizaje de las Matemáticas.***

A partir de las estructuras anteriores, se establecieron otras mediciones de los aprendizajes que se acercan más a los contextos y establecen de forma más específica los aprendizajes mínimos esperados por los estudiantes, los cuales vienen clasificados por área y estos a su vez por cada grado.

La organización de los DBA es consistente con los presentados por el MEN en los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC). En esta se plantean los cimientos para la construcción de estructuras didácticas para promover los desempeños de

aprendizaje estimados para cada año para los estudiantes, como resultado de un proceso, puedan llegar a cumplir los EBC propuestos en cada grado.

Debemos recordar que los DBA por si solos no componen recomendaciones pedagógicas, estas recomendaciones deben aclararse en el Proyecto Educativo Institucional (PEI), utilizando los métodos, estrategias y basados en el contexto de la Institución Educativa. Allí, los DBA están compuestos por una serie de conocimientos y habilidades; los cuales poder ser transferidos a otros de acuerdo con el proceso de aprendizaje del estudiante.

La estructura para la enunciación de los DBA está compuesta por tres elementos centrales:

El enunciado.

Las evidencias de aprendizaje.

El ejemplo. (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2016)

### ***2.3.5 Matriz de Referencia Matemáticas***

Las pruebas externas se convirtieron en un eje de referencia para los establecimientos educativos a nivel nacional, mediante los cuales se establecen las fortalezas y debilidades evidenciadas por un grupo o estudiante en particular, el cual sirve para realizar un análisis en retrospectiva de los procesos al interior de cada establecimiento.

Dicha matriz es una herramienta que representa el aprendizaje evaluado por el ICFES en cada habilidad, y lo relaciona con lo que debe hacer el estudiante que ha completado este

aprendizaje en una habilidad específica y sirve como evidencia para las pruebas saber 3°, 5° y 9°.

Estos conforman los elementos para diseñar, desarrollar y evaluar formativamente el proceso.

Desde otro punto de vista, la Matriz de Referencia se basa en dos mediciones; es decir, es permite establecer la transversalidad entre las matemáticas y el lenguaje. Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2016)

Con el objetivo de facilitar el análisis y preparación de los estudiantes para la preparación de dichas pruebas, en el caso particular tomamos como referencia las pruebas ICFES, realizadas a algunos grados en los cuales culminan los lineamientos presentados en los Estándares Básicos de Competencia, fueron creadas las Matrices de referencia como punto de apoyo para los docentes en los exámenes a presentar.

### **2.3 Marco Teórico**

La investigación como proceso de mejoramiento contante de los modelos y metodologías de enseñanza y aprendizaje, ayudan a resolver las necesidades educativas que se desarrollan en el quehacer docente desde sus perspectiva personal. Muchas de estas cuestiones muestran cómo se desarrollan las actividades y en el proceso de investigación de referentes encontramos una serie de posturas que evidencian la universalidad de las cuestiones y necesidades que se manejan en el aula de clase.

La investigación de teóricos relacionada a la aplicación de herramientas tecnológicas y modernización de los aprendizajes arrojan diversos resultados, pero más específico se vincula a la didáctica de la matemática y el contexto en el que se desarrollan los procesos escolares.

Para Godino (2002) “La modelización semiótica del conocimiento permite interpretar la noción de esquema como la faceta interiorizada (no ostensiva) de una praxeología personal, y las nociones de concepto-en-acto, teorema-en-acto y concepción como componentes parciales constituyentes de dichas praxeologías personales (pág. 20); puesto que los espacios de desarrollo práctico de las actividades nos brindan nociones de aprendizaje básicos porque el conocimiento del estudiante es dependiente del medio y el contexto en el que se desarrolla.

Además, la modelación semiótica permite comprender, mediante el desarrollo de las actividades, las maneras de pensar e interpretar las situaciones matemáticas que se presentan en el aula, y esto es vital para el análisis consecuente de la relación entre el contexto y la manera como los estudiantes desarrollan las actividades presentadas.

El contexto, al jugar un papel fundamental en la planeación y el desarrollo de las actividades, debe tenerse en cuenta a la hora de desempeñar la labor como docente, puesto que este es el inicio de los procesos pedagógicos y deben estar intrínsecos en las actividades a elaborar.

También se deben proponer actividades, basadas en el contexto que desarrollen los procesos cognoscitivos del estudiante y los lleven al desarrollo de aprendizajes significativos, dentro de los cuales se encuentran la resolución de problemas que según Poyla (1989) se categoriza en cinco etapas, la familiarización con el problema, trabajar para mejorar la comprensión, buscar una idea útil, ejecución del plan y la visión retrospectiva. Cada uno de los cuales es indispensable para el proceso de apropiación de los estudiantes y que ellos lleven a cabo un proceso riguroso y estudioso de cómo se comprende un problema y la metodología

idónea para la interpretación y análisis de las situaciones problemáticas que se presente en el contexto escolar.

La familiarización con el problema tiene que ver con la forma como el estudiante da un vistazo global de la situación presentada, además se adaptará al mismo sin intentar comprender de un solo golpe los conceptos abordados, estimulando la memoria para relacionarlo con los conceptos que el educando maneja. Como segunda medida encontramos el trabajar para mejorar la comprensión, el cual se maneja mediante la resolución de tres interrogantes indispensables, ¿Por dónde debo empezar?, ¿Qué puedo hacer? y ¿Qué gano haciendo esto? Poyla (1989, pág. 51).

Cada uno de estos cuestionamientos brinda un paso a seguir en la comprensión más detallada del problema; la primera, busca que el estudiante se ubique en la situación y los enunciados presentes, la segunda, pretende la búsqueda de las principales partes del problema y considerar cada uno de los datos que estos abordan y cómo se manejan en el contexto general, la tercera busca la organización de los datos para dar un vistazo más interno de las situaciones y su complejidad interna.

Los preguntas anteriores pueden ser manejadas en cada uno de los procesos para la resolución de problemas y las situaciones contextuales presentados por Polya, el cual continua con el tercer proceso que es la búsqueda de una idea útil, interpretada como la centralización de la información obtenida, donde deben buscar las ideas y datos principales que nos brinda cada situación y por último registrar el o los datos faltantes para confrontarlos con los datos principales que ya se deben tener presentes, cada una de estas ideas nos brinda un panorama más comprensible del problema y los procesos que se deben llevar a cabo para su resolución.

Una vez obtenemos nuestras ideas significativas procedemos al cuarto paso que es la ejecución del plan, en el cual volvemos al proceso de los cuestionamientos presentados con anterioridad, distinguiendo de cada uno los grandes pasos y los pequeños pasos para tener un orden de aplicación de los procesos necesarios. Por último, encontramos la visión retrospectiva, el cual busca la revisión de la solución presentada, que esta resuelva los cuestionamientos del problema, considerándola desde varios puntos de vista y la revisión con los conocimientos previos; al realizar la revisión se puede definir si los procesos fueron idóneos y acordes a las necesidades vinculadas en la situación. En caso de que, en esta revisión reviva un proceso erróneo, se debe reiniciar con los pasos anteriores para encontrar la deficiencia y resolver.

Cada uno de estos pasos es indispensable para la resolución de problemas, puesto que en ellos se encuentran las herramientas de descomposición y entendimiento de las situaciones y como ellos se interrelacionan para llegar a la respuesta solicitada.

Según las competencias básicas que debe lograr el estudiante plasmadas en los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Educación para el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos parece ser que la propuesta que describe con mayor exactitud el desarrollo del pensamiento geométrico espacial es el modelo de los esposos Van Hiele, quienes proponen 4 niveles de pensamiento que permiten mejorar el razonamiento, los niveles propuestos son:

Nivel 1 Visualización: El estudiante reconoce como un todo las figuras geométricas, no diferencia ni explica las propiedades de las figuras, no se refiere a cada figura por su nombre.

Nivel 2 Análisis: El estudiante puede reconocer y analizar las propiedades y partes particulares de las figuras geométricas, pero aún no establece relaciones ni las clasifica entre los distintos tipos de figuras, no elabora definiciones.

Nivel 3 Deducción informal: El estudiante reconoce las figuras por sus propiedades, como unas se derivan de otras, establece relaciones en las figuras y los tipos que existen. Las definiciones adquieren significado, pero su razonamiento lógico aún se basa en la manipulación.

Nivel 4 Rigor: El estudiante es capaz de analizar el grado de rigor de varios sistemas deductivos y compararlos entre sí. Capta la geometría en forma abstracta.

Estos cuatro niveles representan grados diferentes de importancia en el razonamiento matemático y cada uno va apoyado del anterior, no es posible pasar de un nivel a otro hasta no entender el nivel donde se encuentra.

## **2.5 Marco Conceptual**

La educación colombiana ha presentado diversas estrategias y sugerencias para mejorar los procesos de educación en las diferentes áreas, cambiando los roles del docente y el estudiante, estableciendo una dinámica escolar más activa y que sus procesos sean más significativos.

Una de las sugerencias es integrar la tecnología en la labor docente, en la que ellos adopten una aptitud abierta para que reconozcan que estas herramientas brindan apoyo a su trabajo, ayudando así a que los estudiantes tengan una experiencia de aprendizaje más vivencial,

significativa y novedosa, desarrollando destrezas y habilidades necesarias para su desarrollo en la sociedad.

### **2.5.1 Pensamiento**

La definición de pensamiento ha ido cambiando con las investigaciones que han realizado varios autores, y quienes han ampliado este concepto. Entre estos autores encontramos a Piaget, para él "el pensamiento es la base en la que se asienta el aprendizaje" Alonso (1997). Esto lleva a comprender que es importante tener en cuenta cómo se van dando los procesos de aprendizaje en los estudiantes ya que cada uno tiene una forma y tiempo diferente en asimilar sus aprendizajes.

Por otra parte, existen diferentes tipos de pensamiento como lo son:

- **Deductivo:** Esta ocurre cuando el estudiante toma algunas conjeturas y de estas puede determinar una conclusión general de los resultados.
- **Inductivo:** Se basa en lo opuesto al punto anterior, porque esta va de lo particular a lo general, el cual debe ser apoyado por hipótesis verídicas, aunque estas no puedan ser comprobadas.
- **Analítico:** Parte de lo particular a lo general, apoyados de ideas precisas que estimulan el desarrollo de la temática.
- **Creativo:** Surge de la modificación constante de una idea, adaptando a las necesidades del contexto y sus actores principales.
- **Sistémico:** Es un sistema organizado de factores que ayudan a llevar un orden jerárquico de los procesos.

- **Crítico:** Analiza y modifica cada uno de los procesos desarrollados llevándolos a la evaluación y retroalimentación constante de los resultados plausibles en el transcurso de las actividades a desarrollar.
- **Interrogativo:** Permite cuestionar aspectos de interés de un tema en particular, el cual genera una mejor articulación de los aprendizajes.

Anteriormente se dio la definición de pensamiento relacionado al ser humano, a la forma de cómo decide las cosas, como cada ser concibe su intelecto, cada una de las etapas según Piaget que nos lleva a conocer las diferentes etapas del desarrollo del pensamiento del estudiante. Ahora vamos a hablar del pensamiento matemático y los tipos de pensamiento los cuales tienen una gran importancia dentro del proyecto de investigación, ya que son las bases que fundamentan este estudio y permite conocer la importancia de este en el desarrollo académico del estudiante.

### ***2.5.1 Pensamiento matemático***

Trabaja sobre saberes espaciales, temporales y numéricas, permitiendo que el estudiante desarrolle habilidades como la abstracción y el razonamiento numéricos, este pensamiento es clave para el desarrollo de la inteligencia numérica, por esto es muy importante trabajarlo desde los primeros ciclos de escolaridad.

### ***2.5.3 Pensamiento espacial***

Dentro de la teoría de las inteligencias múltiples, el pensamiento espacial desarrolla el pensamiento científico y se usa para la representación y análisis de la información y la solución de problemas.

El pensamiento espacial es usado para mejorar el proceso de ubicación en el espacio, por esto es de gran importancia que en lo educativo y por lo tanto en lo matemático se haga énfasis en el aprendizaje de los sistemas geométricos, para que puedan realizar la representación de objetos en el espacio y comprensión de la relación entre sus transformaciones de forma psicológica.

Los sistemas geométricos se basan en la exploración de los objetos tanto en movimiento como estático o en reposo desde el plano de la representación mental, la modelación y su representación en el plano. La geometría en las instituciones favorece la interacción tanto del entorno físico, como el cultural.

#### ***2.5.4 Herramienta tecnológica***

La forma de aprender y enseñar a leer y escribir ha ido cambiando debido a las transformaciones que ha tenido el ámbito educativo, anteriormente estos procesos sólo se realizaban con documentos impresos. Las TIC han llegado a formar parte de la educación aportando grandes cambios, debido a que permiten que los procesos de enseñanza sean cada vez más interactivos, dinámicos y motivantes para los estudiantes; esto permite que el estudiante sea autónomo en su aprendizaje, participe activamente y encuentren el gusto por las mismas.

Las Herramientas Tecnológicas permiten mejorar la calidad de los trabajos, los tiempos y lograr que los recursos sean más eficaces. También permiten compartir con las demás personas experiencias estudios, conocer lo que pasa en su el contexto.

Se puede indicar que una herramienta tecnológica es cualquier tecnología que ayuda a realizar bien una tarea, ahorrando tiempo, recursos económicos y de personal.

Existen herramientas tecnológicas que facilitan la enseñanza y el aprendizaje a los estudiantes, ya que por medio de ellas pueden realizar sus prácticas de una manera más dinámica, llamativa e interactiva, favoreciendo la motivación y el interés.

Se favorece la calidad educativa, dando a los estudiantes lo que necesitan, permite que cada uno pueda adaptarse al ritmo de aprendizaje, favoreciendo el rendimiento.

Según un estudio realizado por Apple Classrooms of Tomorrow (1985) mencionado por Belloch (2012) la introducción de las TIC en el aula de clase, se desarrolla a través de cinco fases: acceso, adopción, adaptación, apropiación e invención. (pág. 9)

Por lo anterior, es importante que los docentes incorporen las herramientas tecnológicas a sus clases, que se capaciten acerca de cómo trabajar con ellas, esto les favorecerá en la enseñanza de sus temas, llevará a que los estudiantes tengan un aprendizaje autónomo, dinámico y colaborativo.

### ***2.5.5 Competencia***

Para Tobón (2006)“Las competencias son un enfoque para la educación y no un modelo pedagógico” (pág. 1). A partir de ellos, se centran en tres aspectos específicos. Primero, la

integración de conocimientos, procesos cognitivos, habilidades y valores, y afrontar problemas. En segundo lugar, diseñe un plan de capacitación basado en los requisitos de la situación. Finalmente, la educación se rige por estándares e indicadores de calidad en todos los procesos. Las definiciones usadas por el autor aclaran lo que significan las competencias y las relaciona de la siguiente manera:

A. **Proceso:** Las acciones realizadas con algún propósito, al ser identificables, tienen un principio y un fin. Además involucra el logro de un objetivo mediante la organización de sus elementos y recursos. En el caso de las habilidades deben ser dinámicas y sus objetivos se establecen de acuerdo con algunos requisitos y el entorno a desarrollarse.

B. **Complejos:** La evolución como procesos complejos, involucran la coyuntura de algunas extensiones humanas y su implementación, a menudo, involucra la incertidumbre de los resultados.

C. **Desempeño:** Es la realidad observable durante el desarrollo de las actividades o situaciones problema, lo cual implica la integración de los procesos cognitivos, actitudinales y de la fabricación.

D. **Relevancia:** Referida a las situaciones a resolver, de acuerdo con algunos criterios que determinan la eficiencia y la apropiación de los conocimientos. Su estructura busca habilidades y destaca las diferencias en relación con otros conceptos.

E. **Contextos:** Constituyen todas las áreas sociales, ambientales culturales y disciplinarias, influidas en ciertas situaciones y de acuerdo a su contexto pueden desarrollarse y fortalecer las capacidades de adaptación.

**F. Responsabilidad:** Analiza las consecuencias de sus acciones y busca las consecuencias presentes en ellas, indagando sus errores lo más rápido posible. Todas las acciones son un ejercicio ético, siendo necesaria la predicción de consecuencias según su desempeño y reparando los daños ocasionados. Tobón (2006)

Para Gardner (2005) Competencia es saber hacer en un determinado lugar en donde las personas son capaces de resolver problemas del contexto y elaborar resultados que son importantes para él o para su entorno.

### *2.5.6 Competencia matemática*

Para Rico (2007) la competencia matemática son las potencialidades de la persona para la interpretación y análisis de las matemáticas en los diversos entornos y la participación de las matemáticas en diversos momentos, mientras que tienen las necesidades de sus vida como participe de la ciudadanía. Estas se basan en el respeto, la veracidad y el rigor para realizar los procesos.

Los siguientes son las pautas que las conforman:

- La capacidad de analizar y expresar información, datos, información clara y precisa.
- Involucra el contexto con su conocimiento y contiene los aprendizajes básicos, necesarios para su desarrollo.
- Implementar estrategias argumentativas para resolver problemas o recibir información diversa.

- El mejoramiento de los progresos y la recolección de información y situaciones matemáticas de acuerdo con las situaciones basadas en el respeto y la investigación con el pensamiento.

Dentro del proyecto de investigación las competencias matemáticas juegan un papel importante, ya que se deben formar estudiantes capaces de afrontar los cambios y avances que día a día transforman el mundo. Deben ser personas competentes capaces de analizar y solucionar los problemas del contexto.

Nos basamos en las competencias matemáticas ya que los estudiantes se están preparando para unas pruebas (ICFES) las cuales evalúan sus competencias y dan referencia a su idoneidad y conocimiento frente a temas de la realidad, y donde revisando los resultados que han obtenido las Instituciones que se van a intervenir en las pruebas del ICFES no han sido muy alentadoras, por esto nace la propuesta de fortalecer el pensamiento espacial en cuanto a la competencia de razonamiento, ya que es donde han obtenido los resultados más bajos.

### ***2.5.7 Didáctica de las matemáticas.***

Según Chamorro (2005) la didáctica de las matemáticas es una método basado en la solides de los resultados y los recursos utilizados para su interpretación y las situaciones problema del contexto.

Los hechos y fenómenos desarrollados durante la enseñanza de las matemáticas son regulares y se refieren a un conocimiento específico, orientado por un docente con capacidad de análisis, interpretación, los relacione los conocimientos con las demás áreas y el uso de herramientas tecnológicas que favorezcan la apropiación de los aprendizajes.

Debido a que según Chamorro (2005):

En el proceso de enseñanza se producen múltiples interacciones en el sistema didáctico, entre estos tres polos. La didáctica de las matemáticas va a modelizar y estudiar las interacciones en los tres subsistemas: profesor – alumno, alumno – saber, profesor – saber. (P.71-72)

Los actores siendo complementos, han de facilitar el proceso de enseñar, teniendo en cuenta que sus interacciones correspondan a lo esperado, refiriéndonos a los objetivos educativos planteados para el área de matemática frente a sus estudiantes y sus docentes.

La construcción de conocimiento matemático mejora los procesos de aprendizaje del estudiante, estimula sus creatividad y la resolución de problemas. Es importante destacar la interacción del educando con su entorno para el desarrollo de competencias y la estimulación de nuevos aprendizajes mediante la estimulación y el desarrollo de habilidades particulares, destacando en un área en específico y fortaleciendo la transversalidad con otras áreas de conocimiento. Reflexionando sobre las actividades a desarrollar y modificando nociones anteriores para favorecer los nuevos aprendizajes y los relaciones con su contexto.

En pocas palabras, una situación didáctica se puede desarrollar durante las jornadas pedagógicas y didácticas, mediante la interacción de los diversos actores de la comunidad educativa llevándolos a una reflexión concreta de los objetivos a desarrollar. (Chamorro, 2005)

### **2.5.8 GeoGebra**

En palabras de sus creadores en el Instituto GeoGebra (2021) GeoGebra “es un software matemático apto para todos los niveles educativos. Integre dinámicamente geometría, álgebra,

estadísticas y cálculo en gráficos, análisis y registros de organización de hojas de cálculo”. Este genera comunidades importantes y en evolución con su agilidad de uso gratuito. Coordinar experimentos y conceptos para experimentar organizaciones de enseñanza y disciplina que abarcan matemáticas, ciencias, ingeniería y tecnología. (STEM, por sus siglas en inglés). Su uso se extiende a nivel mundial, debido a su multiplicidad de servicios y su libertad de uso en línea o fuera de esta.

#### Datos interesantes

- GeoGebra combina álgebra y geometría, análisis de hojas de cálculo de forma gráfica y dinámica.
- Las potentes herramientas se coordinan con una interfaz intuitiva y flexible.
- Herramientas de autor para la creación de páginas web o aplicativos interactivos.
- Políglota, por su disponibilidad de idiomas.
- Es un Software gratuito y de código. Ministerio de educación cultura y deporte de España (2010)
- GeoGebra es un software que permite la creación de representaciones gráficas relacionadas con las matemáticas. Se divide en secciones preprogramadas que le permiten lidiar diversos recursos matemáticos. Todo el proceso de ejecución se puede realizar en el sitio web sin instalar ningún software especial, aunque también proporciona programas de escritorio (Windows,

Mac OS X, Linux), dispositivos móviles (Android) o tabletas (iOS, Android o Windows) para su uso offline. “Formación y Capacitación Con Logopedia,” (2021)

La idea de utilizar el aplicativo de GeoGebra es que permite llevar a la práctica los conceptos vistos, ayuda a que el estudiante se interese a aprender y mejore sus competencias matemáticas en el área de geometría, debido a que es una herramienta dinámica, interactiva e innovadora que incentiva al estudiante, permite dejar a un lado la monotonía de las clases, les facilita a los docentes la explicación de los contenidos. Y lo mejor que es un software gratuito no necesita de internet para poder funcionar, esto permite que sea más fácil su utilización, debido a que el proyecto se va a ejecutar en Instituciones Rurales donde no cuentan con este servicio.

#### ***2.5.9 Resolución de problemas***

Resolver problemas en el aula de clase según Romero (2021) ayuda a establecer relaciones y conceptos entre los mismos. Pero el conocer algunos conceptos y cálculos, no significa que ya se puedan resolver problemas. Debemos contar con procesos clave para el desarrollo de destrezas que permitan la resolución de problemas, que nos permitan afrontarlas sin miedo y la mejor estrategia es la práctica. Como cualquier otro aprendizaje, este aprendizaje lleva mucho tiempo.

### **Capítulo III**

#### **Diseño Metodológico.**

##### **3.1 Introducción**

Este capítulo se enfoca en el diseño metodológico, el cual describe cómo se desarrolla el trabajo en las Institución Educativas Yarumal, donde los estudiantes trabajan mediante la mediación pedagógica, el trabajo de guías didácticas como apoyo para el trabajo con el aplicativo GeoGebra en la sede con los equipos que se cuentan y de manera adicional con el aplicativo instalado en sus celulares para complementar los desarrollos realizados durante la jornada escolar. En la I.E. Isidro Parra sede Bulgaria se trabaja con metodología tradicional con el fin de hacer un estudio comparativo de las metodologías expuestas y analizar la incidencia de la aplicación con tecnología computacional para el aprendizaje del Teorema de Pitágoras y Thales.

Esta propuesta busca el acercamiento y modelación del conocimiento con ayuda de los medios tecnológicos adaptados al contexto escolar que se vivencia a diario, facilitando el aprendizaje y la apropiación de los conocimientos donde el estudiante protagoniza el desarrollo del aprendizaje y conlleva a la formación integral del estudiante enfocado en la adaptación y comprensión geométrica y más específica a los teoremas de Pitágoras y Thales.

Los procesos de investigación mixta tienen como objeto conocer las situaciones, costumbres, actitudes y aptitudes, conocimientos que tiene el estudiante de su entorno y contexto educativo mediante la ayuda de la descripción exacta y estadística de las actividades desarrolladas por él, es aquí donde el papel del investigador es importante porque busca entrar en

acción entre las propuestas teóricas y las observadas en el campo investigativo para crear nuevas luces teóricas y así ampliar su campo de conocimiento para emitir juicios y aplicar diseños, actividades pertinentes para solucionar los problemas planteados al inicio de la investigación en el sector rural.

### **3.2 Descripción general del estudio**

#### **3.2.1 Enfoque**

La investigación a realizar en el proyecto, busca comparar dos estrategias de enseñanza que faciliten al estudiante adquirir conocimientos a través de la interacción, la participación, la autonomía que asumen para comprender las distintas aplicaciones geométricas en sus entornos. Según su naturaleza esta investigación tiene un enfoque mixto, puesto que el objetivo es estudiar la derivación que genera la aplicación de esta estrategia dentro del aula de clase, teniendo en cuenta su empleo por parte del docente y su apropiación por parte del estudiante, proporcionando un nuevo conocimiento frente a las formas de complementar diferentes temáticas, considerando las observaciones y descripciones como principales fuentes de datos, así como el desarrollo de actividades que planten no solo interrogantes, sino que permita dar lugar a interpretaciones implícitas en su formación matemática, estudiando de forma general el desarrollo y adaptación del proceso investigativo implementado como herramienta de enseñanza – aprendizaje.

Para Chen (2006) el enfoque mixto se puede definir como la composición metódica de cantidades y calidad con un proceso único para obtener una reproducción más remata del acontecimiento, y señalando la unión para que las cantidades y accesos de calidad conserven sus estructuras o que tales métodos se pueden adaptar, cambiar o sintetizar para realizar investigaciones y tratar los costos del estudio.

De acuerdo con lo anterior, la investigación mixta, permite que el investigador se involucre de forma que pueda comprender e interpretar, mediante la propia experiencia, pero también puede comprobar sus teorías mediante las representaciones gráficas y los estudios de procesos en la resolución de dos pruebas clave (pretest y posttest) para el desarrollo de la investigación y el análisis de los resultados en las dos instituciones.

### **3.2.2 Población y muestra**

La propuesta de intervención está pensada para dos sedes educativas: Yarumal y Bulgaria, las cuales se encuentran en un contexto rural. La primera cuenta con 27 estudiantes del grado noveno, pero por condiciones de pandemia se encuentra trabajando en el sistema de alternancia, por lo cual solo se trabaja con la mitad del grado. La institución cuenta con 15 docentes de planta, 8 de primaria y 7 de secundaria, un directivo docente y una sala de sistemas dotada con 15 computadores portátiles.

La segunda institución cuenta con nueve estudiantes en el grado noveno y debido a esta cantidad se va a trabajar con la población total, ya que sus aulas lo permiten. La institución cuenta con 5 docentes de aula, 2 en los niveles de preescolar y básica primaria y 3 en los niveles de básica secundaria, un aula de sistemas integrada con el aula de matemáticas, esta cuenta con 3 computadores portátiles.

El estudio investigativo en la Institución Educativa Yarumal se realiza con el grado noveno, donde sólo participan 13 estudiantes debido a que se encuentra en alternancia, de los cuales 10 son mujeres y 3 son hombres, con edades comprendidas entre los 13 y 17 años. La población radica y vive en veredas circunvecinas, las actividades socioeconómicas están

sustentadas en agricultura, especialmente el cultivo del café y aguacate, pertenecen a familias cuyos padres no terminaron la formación de básica primaria, se encuentran ubicados en estratos 1 y 2, la gran mayoría son beneficiarios del programa Más Familias en Acción, debido a su bajo nivel de escolaridad la inversión en la educación de los niños es baja y se limita a la impartida en exclusiva por el establecimiento educativo.

El estudio investigativo en la Institución Educativa Bulgaria se realiza con 9 estudiantes de grado noveno, siendo este la totalidad de los estudiantes en la modalidad de Postprimaria los estudiantes se encuentran en edades entre los 14 y 17 años con condiciones socioeconómicas de estratos A y B, según el nuevo registro del SISBÉN, donde su población es en su mayoría dependiente del trabajo agrícola en la producción de café, panela y aguacate.

### **3.2.3 Estructura metodológica**

El diseño metodológico se caracteriza por la elaboración de unos instrumentos propios de los investigadores en la creación de unas guías de estudio y unos aplicativos en GeoGebra, el cual pretende garantizar mejorar las competencias matemáticas en el pensamiento espacial métrico con el tema del teorema de Pitágoras y teorema de Thales, los cuales son de gran importancia para contribuir a la solución de problemas cotidianos en zonas rurales.

Esta estructura metodológica, tiene como principal característica, aplicar un pretest en ambas Instituciones para reconocer los conocimientos básicos que deben tener los estudiantes y poder abordar las temáticas enunciadas, luego, se busca diseñar y crear unas guías de trabajo para fundamentar los procesos de enseñanza que se relaciona desde los lineamientos curriculares,

los Derechos Básicos de Aprendizaje[DBA] y finalmente aplicar y validar la estrategia didáctica para verificar que la intervención en ambas instituciones sean acordes y útiles en la implementación de situaciones reales a los que se enfrentan los jóvenes en el campo.

Para ello, se describe a continuación las acciones que darán lugar a los objetivos específicos. Para este primero: *Realizar un diagnóstico a través de la aplicación de un pretest, para determinar los niveles de competencia del pensamiento espacial métrico a situaciones matemáticas del contexto*, el cual revela una serie de preguntas basadas en los DBA del grado noveno, referentes al pensamiento geométrico; mediante los cuales se establecerán los niveles de apreciación del conocimiento previo y los alcances que se pueden tener para esta; además, presenta los medios para el desarrollo de las competencias en donde se encuentren mayores debilidades y basados en estos resultados, establecer estrategias de mejoramiento y las herramientas tecnológicas que más se adapten a sus necesidades. (VER APÉNDICE A).

Esta aplicación se efectúa con ambos educadores e investigadores de la presente propuesta.

Basados en los resultados obtenidos, estos se clasificarán de acuerdo con los niveles de desempeño más bajos, para así identificar los temas específicos que se van a desarrollar en los talleres. En la tabla 3, se presenta la información de los rangos en los que se tiene la escala valorativa tanto cualitativa como cuantitativa, estos se dan desde el Sistema Institucional de Evaluación Educativa que es referente nacional.

**Tabla 3.**  
**Resultados Pretest**

<b>SUPERIOR</b>	<b>ALTO</b>	<b>BÁSICO</b>	<b>BAJO</b>
4.6 – 5.0	4.0 – 4.5	3.0 – 3.9	1.0 – 2.9

Fuente: *Sistema Institucional de Evaluación de Los Estudiantes [SIEE] I.E. Yarumal (2021)*

*Sistema Institucional de Evaluación de Los Estudiantes [SIEE] I.E.T. Isidro Parra (2021)*

Nota: La tabla 3, muestra las escalas de valoración correspondientes a las dos Instituciones, las cuales se regulan según las directivas presentes en *Decreto 1290 (2009)*:

Cada establecimiento educativo definirá y adoptará su escala de valoración de los desempeños de los estudiantes en su sistema de evaluación. Para facilitar la movilidad de los estudiantes entre establecimientos educativos, cada escala deberá expresar su equivalencia con la escala de valoración nacional:

- Desempeño Superior.
- Desempeño Alto.
- Desempeño Básico.
- Desempeño Bajo.

Según esta escala, en el desempeño básico es el nivel de aprobación mínima de los objetivos planteados durante las jornadas, basado en los referentes estructurados por el MEN y el desempeño bajo es el nivel de no aprobación de los desempeños mínimos.

Los resultados de este pretest, se analizarán a partir de la información recolectada en la prueba, la cual puede evidenciarse en los resultados de análisis.

El segundo objetivo busca *Diseñar guías de estudio para integrar la enseñanza del pensamiento espacial métrico acercando al estudiante al aplicativo GeoGebra.*

Al encontrar los temas en los cuales se van a enfocar las guías de estudio, (VER APÉNDICE B), se plantearán estrategias de desarrollo y selección de los aplicativo adecuados para cada temática. Estas guías de trabajo se aplican en la I.E. Yarumal, la cual le permite al estudiante un acercamiento del aplicativo sobre el uso del Software GeoGebra, dando instrucciones necesarias para su manejo. Esto permite un andamiaje de aprendizaje entre el uso de la tecnología computacional y la comprensión de los teoremas matemáticos que se quieren dar a obtener como nuevo conocimiento. En la metodología tradicional se aplican guías, pero en ningún momento se implementa el proceso tecnológico.

Se documenta en el análisis de los resultados con registros fotográficos y algunas opiniones por parte del estudiante, en el cual se evidenciará que tan adecuado fue aprender sobre el GeoGebra. Entorno a estas decisiones, se procede a la programación de tiempos y número de actividades para la enseñanza de los teoremas propuestos.

Posteriormente, se pretende *implementar la guía de estudio usando el aplicativo GeoGebra en los estudiantes del grado noveno.* Luego se les comparten las guías interactivas realizadas en el GeoGebra (VER APÉNDICE C), creadas para que cada estudiante pueda desarrollar sus actividades enfocadas en los teoremas de Pitágoras y Thales, comparta sus formas de desarrollo y las relacione con su contexto.

Finalmente, se busca *validar a través de un postest la estrategia implementada en el aprendizaje del teorema de Pitágoras y de Thales con el uso del aplicativo en GeoGebra.*

Mediante la aplicación de un posttest (VER APÉNDICE D) se mide el alcance de las actividades desarrolladas en el proyecto. Estas se basan en los lineamientos establecidos por el MEN en sus lineamientos curriculares de Estándares Básicos de Competencias, los DBA, Matriz de Referencia en Matemáticas y las Mallas de Aprendizaje, necesarios para la medición de los aprendizajes de los estudiantes de grado noveno. Al finalizar, se realiza una tabla comparativa de los resultados, ubicados por desempeños, para estimar los progresos presentados por los estudiantes y definir la metodología más eficaz para la enseñanza de la geometría, específicamente la enseñanza del Teorema de Pitágoras y Thales.

A través de la prueba de Hake se evidencia los resultados obtenidos de niveles de significancia de aprendizaje.

#### **Técnicas e instrumentos**

Los instrumentos seleccionados para la recolección y análisis de los resultados obtenidos con la ejecución de la propuesta fueron:

**Pretest:** se aplica como punto de partida una prueba de reconocimiento, que permite recolectar información sobre los conocimientos que tienen los estudiantes sobre el Teorema de Pitágoras y el Teorema de Thales.

**Elaboración de guías:** Las guías de estudio permite evidenciar por parte de los estudiantes el acercamiento que se tiene frente al GeoGebra y la manera de cómo concede mejorar los procesos de aprendizaje con una matemática más dinámica a partir del movimiento que se da en dicho

software. Esta información se documenta con opiniones que establecen los estudiantes de la I.E. Yarumal.

**Postest:** Elemento concluyente del trabajo realizado, la aplicación del postest, permite realizar una comparación efectiva en cuanto a los cambios y niveles de adquisición de conocimientos que habían tenido los estudiantes antes y después de la aplicación de la propuesta investigativa.

Finalmente, se busca comparar las dos estrategias metodológicas, con el fin de presentar un informe indicando las fortalezas y debilidades encontradas en la implementación de las TIC en la I.E. Yarumal y la apuesta tradicional que tuvo en la I.E. Isidro Parra sede Bulgaria.

### 3.5 Fases del estudio

En la tabla 4, se pone en evidencia las fases de investigación implementadas en la investigación.

**Tabla 4.**  
***Fases de la investigación***

Fases	Acciones concretas
<b>Fase Inicial</b> <i>Rastro bibliográfico</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se realiza un estado del arte sobre la enseñanza del pensamiento espacial métrico en estudiantes de grado noveno.</li> <li>• Exploración bibliográfica de las teorías que apoyan la investigación enfocada desde lo didáctico, pedagógico y disciplinar.</li> <li>• Revisión bibliográfica de los lineamientos curriculares (EBC y DBA) y marco legal</li> <li>• Revisión bibliográfica centrada en los procesos de la enseñanza del pensamiento espacial – métrico.</li> </ul>
<b>Fase de diseño e implementación</b> <i>Creación de guías de trabajo y aplicativos</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Analizar a través de un pretest los saberes con los que cuentan los estudiantes.</li> <li>• Reconocer la implementación del GeoGebra, permitiendo a los estudiantes tener un acercamiento propio para comprender lo que se va a trabajar en los aplicativos.</li> <li>• Diseño y construcción de los aplicativos dinámicos siendo fundamentales en el desarrollo de la temática seleccionada, orientado hacia una matemática con movimiento que permita construir el concepto y modelarlo en situaciones reales del contexto.</li> </ul>
<b>Fase descriptiva</b> <i>Validación</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Realización de un postest para verificar si la estrategia implementada es adecuada para el aprendizaje del teorema de Pitágoras y Thales.</li> </ul>
<b>Fase estratégica</b> <i>Análisis y resultados</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Implementación de las actividades propuestas en el ejercicio investigativo de practica de aula.</li> <li>• Documentar en el diario de campo las observaciones y registrarlas en los análisis de resultados.</li> </ul>

## **Capítulo IV**

### **Resultados y discusión.**

#### **4.1. Introducción**

Para iniciar, se aplica a los estudiantes del grado noveno de ambas Instituciones un pretest de autoría propia, contiene 14 preguntas de selección múltiple con única respuesta, el cual pretende verificar el nivel de conocimiento frente al pensamiento espacial métrico. Se califican las pruebas de cada sujeto teniendo en cuenta la escala de valoración de los colegios, reglamentado en el SIEE.

En la Institución Educativa Yarumal se contó con una muestra de 13 estudiantes y en la Institución Educativa Bulgaria con 9.

A continuación, se evidencian los resultados obtenidos del pretest.

#### **4.2. Resultados de pretest por Institución.**

En la figura 1 se observan los resultados obtenidos por los estudiantes del grado noveno de la I.E. Yarumal en la encontrando un alto porcentaje de preguntas incorrectas ya que los estudiantes no tienen claro el concepto de los sistemas geométricos como propiedades de las figuras planas, falta de conocimiento aplicado al perímetro y área de las figuras bidimensionales y poca apropiación en teoremas básicos de la geometría.

A continuación, se realiza un análisis sistemático de los resultados obtenidos, pregunta por pregunta.

En la pregunta N° 1 enfocada al concepto de rectas paralelas, se puede notar una falencia debido a que ningún estudiante la contesto de manera correcta.

En la pregunta N° 2 encaminada a conocer la magnitud de un ángulo se determina que 1 estudiante contesto de forma correcta.

En la pregunta N° 3 cuyo fin es descubrir el nivel de conocimiento e identificación de ángulos agudos, sólo 2 respondieron de forma correcta.

En la pregunta N° 4 se hace referencia a la búsqueda de uno de los lados del triángulo, 2 estudiantes respondieron correctamente.

En la pregunta N° 5 se pretendía hallar la hipotenusa, 4 estudiantes contestaron de manera acertada.

En la pregunta N° 6 donde pregunta por la fórmula para hallar la hipotenusa, 8 estudiantes contestaron correctamente.

En la pregunta N° 7 Enfocada a la demostración del teorema de Pitágoras, 7 estudiantes respondieron acertadamente, demostrando que la mitad del grado posee conocimiento hacia este saber

En la pregunta N° 8 reconocimiento de las figuras geométricas, se evidencia, que solo 4 estudiantes contestaron correctamente, demuestra que la gran mayoría de ellos ( 9) presentan deficiencias en la identificación de figuras geométricas básicas.

Las preguntas N° 9 y 10 encaminada a conocer la figura del triángulo y sus características como número de lados, ángulos y nombre, se evidencia que los estudiantes identifican los lados y los ángulos, pero no asocian las características del polígono con el nombre correspondiente, pues tan solo 1 estudiante logró determinarlo.

En la pregunta N° 11 referente a la diferenciación entre lados y ángulos de un polígono, se evidencia que tan sólo 6 estudiantes reconocen el concepto básico de lado.

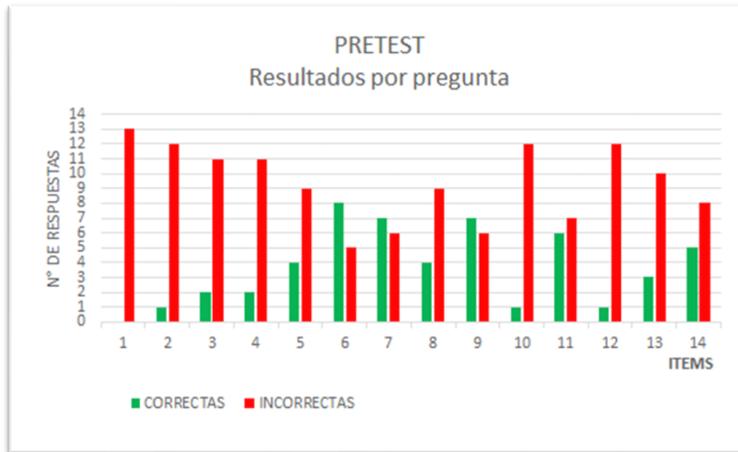
En la pregunta N° 12 identificar los ángulos y el concepto de ángulos interiores de un triángulo, sólo 1 estudiante respondió correctamente, demostrando que la mayoría no tienen conocimiento.

En la pregunta N° 13 acerca del concepto de la hipotenusa, 3 estudiantes acertaron.

En la pregunta N° 14 enfocada a concepto del triángulo sus lados y sus ángulos, 5 estudiantes respondieron de forma correcta.

Se puede determinar que el 72% de las preguntas fueron contestadas de manera incorrecta, el pretest se centró en descubrir el nivel de conocimiento que los estudiantes deben poseer, por ser saberes que fueron orientados en los grados de 4°, 5° de primaria y el grado 6° y 7° de secundaria, según lo estipulado en los estándares básicos de competencias y los DBA.

**Figura 1**  
*Resultados pretest I.E. Yarumal*



**Fuente:** Autoría propia (2021)

En la figura 2, se observan los resultados obtenidos por los estudiantes del grado noveno de la I.E. Isidro Parra sede Bulgaria, en el cual se evidencia de color verde el número de respuestas correctas y de color rojo el número de preguntas incorrectas.

A continuación, se realiza un análisis sistemático de los resultados obtenidos, pregunta por pregunta.

En la pregunta N° 1 enfocada al concepto de rectas paralelas, se puede notar una falencia debido a que solo 1 estudiante la contestó de manera correcta.

En la pregunta N° 2 encaminada a conocer la magnitud de un ángulo se determina que 4 estudiantes contestó de forma correcta.

En la pregunta N° 3 cuyo fin es descubrir el nivel de conocimiento e identificación de ángulos agudos, 5 estuantes respondieron de forma correcta.

En la pregunta N° 4 se hace referencia a la búsqueda de uno de los lados del triángulo, ninguno de los estudiantes respondió de forma correcta.

En la pregunta N° 5 se pretendía hallar la hipotenusa, ninguno de los estudiantes respondió de manera acertada.

En la pregunta N° 6 donde pregunta por la fórmula para hallar la hipotenusa, 8 estudiantes contestaron correctamente.

En la pregunta N° 7 Enfocada a la demostración del teorema de Pitágoras, 8 estudiantes respondieron acertadamente, demostrando que la mayoría del grado posee conocimiento hacia este saber

En la pregunta N° 8 reconocimiento de las figuras geométricas, se evidencia, que 8 estudiantes contestaron correctamente, demuestra que la gran mayoría de ellos presentan identifican figuras geométricas básicas.

Las preguntas N° 9 y 10 encaminada a conocer la figura del triángulo y sus características como número de lados, ángulos y nombre, se evidencia que los estudiantes identifican los lados y los ángulos, pero no asocian las características del polígono con el nombre correspondiente, pues tan solo 2 estudiantes lograron determinarlo en ambas preguntas.

En la pregunta N° 11 referente a la diferenciación entre lados y ángulos de un polígono, se evidencia que tan sólo 4 estudiantes reconocen el concepto básico de lado.

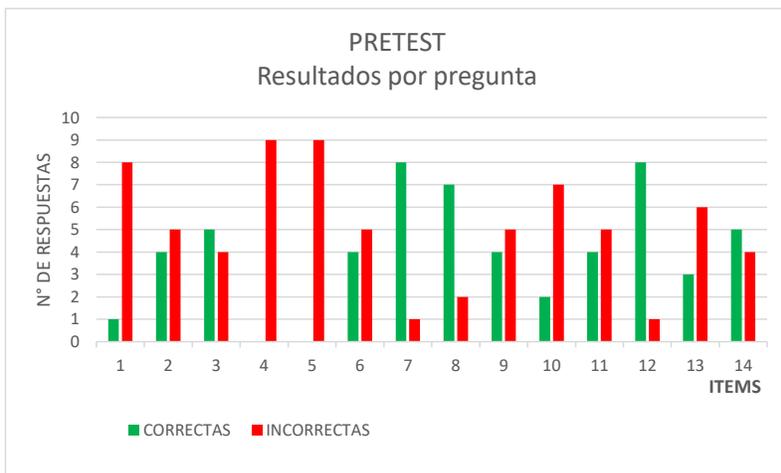
En la pregunta N° 12 identificar los ángulos y el concepto de ángulos interiores de un triángulo, 8 estudiantes respondieron correctamente, demostrando que la mayoría posee conocimientos de los ángulos de un triángulo.

En la pregunta N° 13 acerca del concepto de la hipotenusa, 3 estudiantes acertaron.

En la pregunta N° 14 enfocada a concepto del triángulo sus lados y sus ángulos, 5 estudiantes respondieron de forma correcta.

Se puede determinar que el 56% de las preguntas fueron contestadas de manera incorrecta, el pretest se centró en descubrir el nivel de conocimiento que los estudiantes deben poseer, por ser saberes que fueron orientados en los grados de 4°, 5° de primaria y el grado 6° y 7° de secundaria, según lo estipulado en los estándares básicos de secundaria.

**Figura 2**  
**Resultados Pretest I.E. Isidro Parra sede Bulgaria**



**Fuente:** Autoría propia (2021)

Para la aplicación correcta, con aprendizajes significativos del teorema de Pitágoras, se hace necesario que los estudiantes hayan apropiado los saberes previos para tener resultados satisfactorios.

Un saber previo que cobra suma importancia es la identificación de los triángulos según sus ángulos, debido a que el tema de estudio del presente proyecto se hace viable única y exclusivamente con triángulos rectángulos, para la aplicación de la fórmula para hallar el teorema de Pitágoras el estudiante debe estar en capacidad de reemplazar las variables por los valores que se presentan en los diferentes gráficos, para hacerlo de forma correcta debe identificar cuáles son los catetos y la hipotenusa.

#### ***4.2.1. Comparativo de resultados de las instituciones Yarumal y Bulgaria***

Las instituciones educativa propuestas para la intervención de este proyecto se basan en las similitudes de sus contextos, modelos pedagógicos y sus situaciones sociodemográficas, lo cual hace un referente para la comparación de sus resultados en la aplicación del Pretest.

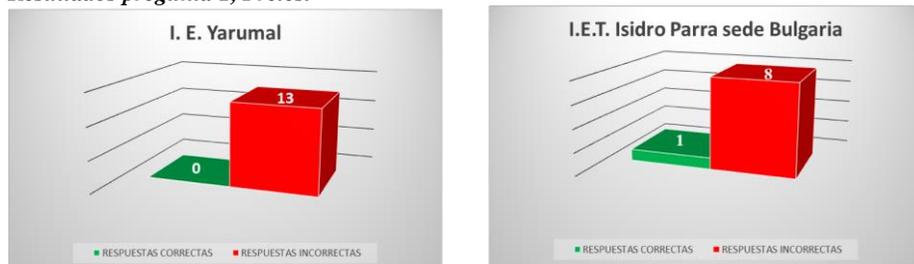
Ahora se presenta el paralelo de los resultados entre ambas instituciones, realizado mediante la comparación de porcentajes de aprobación y su posterior análisis individual.

Pregunta 1. En un plano dos rectas son paralelas sí:

Según los resultados obtenidos el 100% de los estudiantes de la I.E. Yarumal respondieron de forma incorrecta y el 89% de los estudiantes de la I.E.T. Isidro Parra sede Bulgaria, también respondieron de manera incorrecta. La pregunta representa los conceptos

básicos de rectas, los cuales son vistos desde grados de primaria; esto implica una falta en los procesos iniciales de la educación en geometría básica.

**Figura 3**  
*Resultados pregunta 1, Pretest*

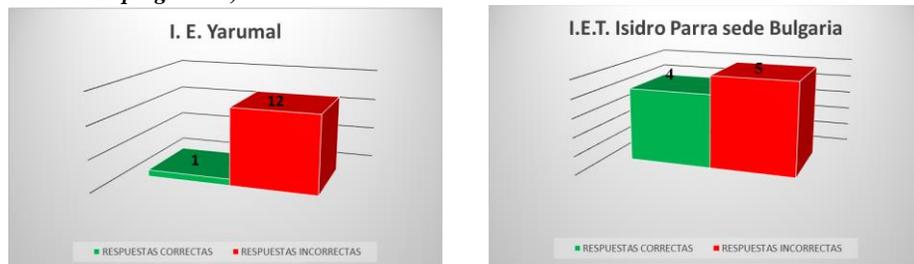


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 2. El grado es la magnitud del ángulo debido a la división del ángulo...

En estas gráficas de la figura 4 se observa que el porcentaje de desaprobación de ambas instituciones es mayor a la aprobación, la primera con un 92% y la segunda con un 56%. Siendo este tipo de pregunta de aplicación de los conceptos geométricos del triángulo.

**Figura 4**  
*Resultados pregunta 2, Pretest*

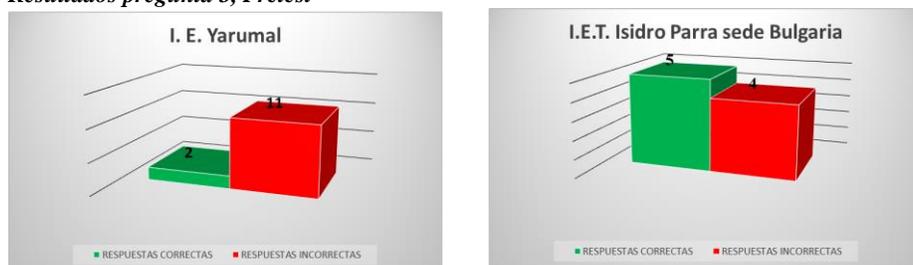


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 3. Basado en la figura, ¿cuáles de sus ángulos son agudos?

La pregunta se refiere al análisis de figuras y la interpretación de la información que esta puede suministrar, en este caso las magnitudes de los ángulos de un polígono irregular. En este caso se evidencia que en la I.E. Yarumal el 85% de los estudiantes no respondió de forma acertada, mientras que en la sede Bulgaria el 56% aprobó la pregunta.

**Figura 5**  
*Resultados pregunta 3, Pretest*

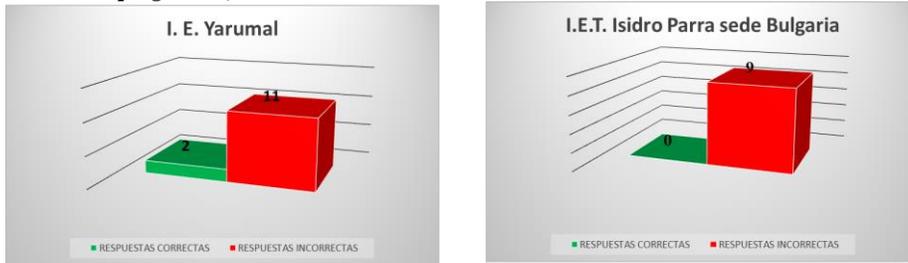


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 4. Sabiendo que la proyección de la sombra del árbol es de 3.5 m y su medida diagonal es de 5 m. ¿cuál es la altura del árbol?

Este ejercicio pretende analizar la aplicación del teorema de Pitágoras en contextos rurales, para determinar los aprendizajes y la manera como estos son puestos en práctica por el estudiante. En este caso, las dos instituciones presentan niveles bajos de aprobación, siendo la sede Bulgaria la que presenta una desaprobación mayor con un 100% y la I.E. Yarumal un 85 % de desaprobación.

**Figura 6**  
*Resultados pregunta 4, Pretest*

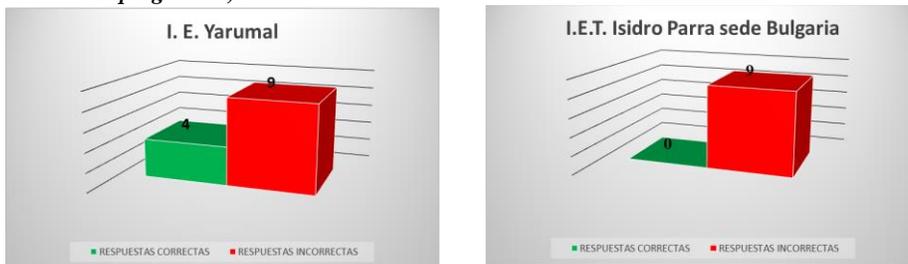


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 5. Existen dos rutas que conectan a la ciudad A y B. La primera conecta la ruta a con 15 km con la ruta b con 18 km, ¿Cuál será la distancia aproximada de la ruta c?

Al igual que la anterior pregunta, esta busca medir los niveles de aplicación de los conceptos del Teorema de Pitágoras y su aplicación en la medición de longitudes en figuras que forman un triángulo rectángulo. En este sentido la sede Bulgaria presenta un índice de respuestas incorrectas del 100% y la I.E. Yarumal de 69%, lo que claramente indica una falencia en la aplicación de los conceptos básicos de la geometría.

**Figura 7**  
*Resultados pregunta 5, Pretest*

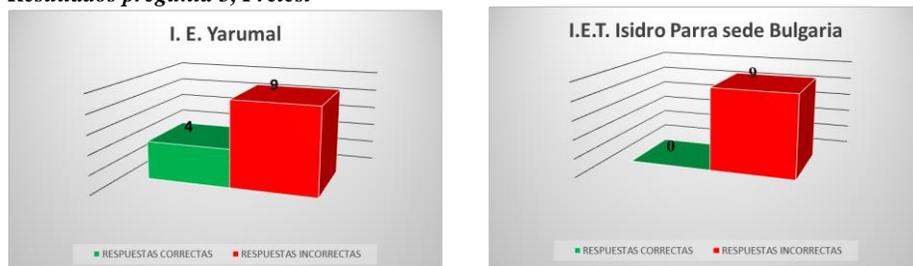


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 6. Existe una casa con una altura de 3 m y a 7 m se encuentra un poste de luz de 10 m de altura. Si sabemos que el frente de la casa mide 2 m, ¿Cuál sería el procedimiento correcto para calcular la distancia desde el punto A hasta el punto B?

Esta pregunta se basa acerca de los conocimientos que se tienen acerca de hallar la hipotenusa con el Teorema de Pitágoras, donde se puede evidenciar que el 62% de los estudiantes de la I. E. Yarumal contestaron de forma acertada, mientras que en la sede Bulgaria el 56%.

**Figura 8**  
**Resultados pregunta 5, Pretest**

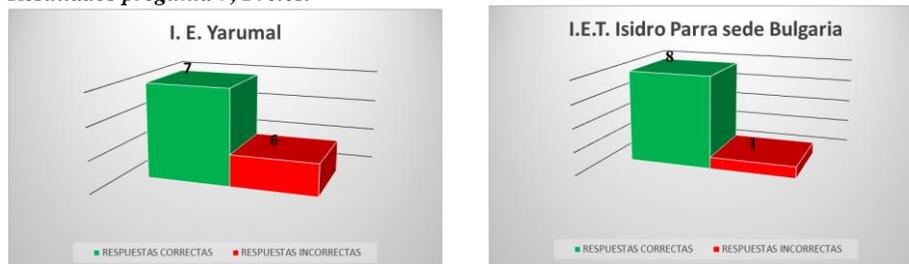


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 7. La unión de los tres cuadrados forma un triángulo rectángulo en su centro. Sabiendo que el cuadrado amarillo ocupa un área de 25 metros cuadrados y el cuadrado rojo un área 61 metros cuadrados. ¿Cuál es el área ocupada por el cuadrado azul?

El 56% de los estudiantes de la I.E. Yarumal y el 89% de la Sede Bulgaria respondieron acertadamente a esta pregunta, demostrando que tienen conocimiento acerca de la demostración del Teorema de Pitágoras.

**Figura 9**  
**Resultados pregunta 7, Pretest**

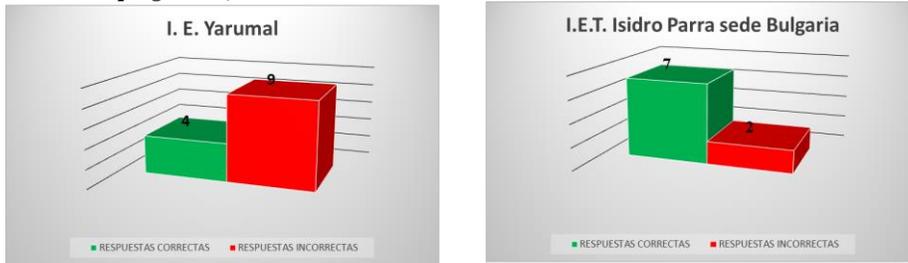


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 8. ¿Qué figuras geométricas observas en la imagen?

Buscaba que el estudiante reconociera algunas figuras geométricas, se pudo evidenciar que el 69% de los estudiantes de la I.E. Yarumal respondieron incorrectamente, demostrando que la mayoría de ellos no reconocen las figuras, siendo este un conocimiento que se adquiere desde la primaria, mientras que el 78% de los estudiantes de la Sede Bulgaria respondieron correctamente.

**Figura 10**  
*Resultados pregunta 8, Pretest*

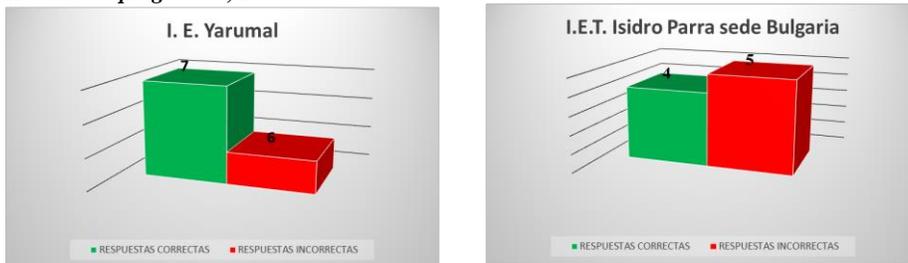


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 9. Con base a la figura anterior se afirma que:

En la I.E. Yarumal, el 54% de los estudiantes respondieron acertadamente, mientras en la Sede Bulgaria el 56% desaprobaron, demostrando que la gran mayoría no reconocen las características de los triángulos.

**Figura 11**  
*Resultados pregunta 9, Pretest*

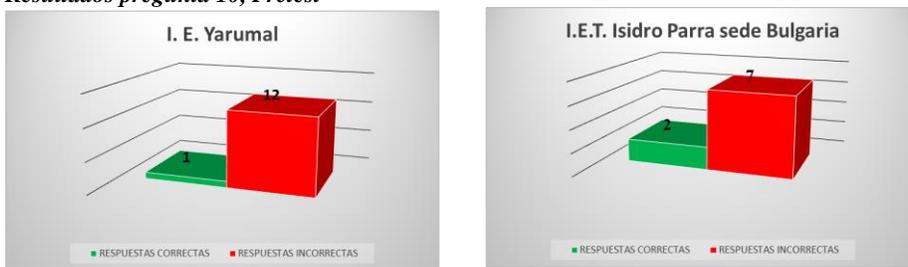


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 10. Según la imagen, determina cuál afirmación es correcta.

En esta pregunta debían clasificar el triángulo según sus características, teniendo como resultado que el 92% de los estudiantes de la I.E. Yarumal y el 78% de la Sede Bulgaria desaprobaron la pregunta, demostrando que la mayoría de los estudiantes no reconocen la clasificación de los triángulos.

**Figura 12**  
*Resultados pregunta 10, Pretest*

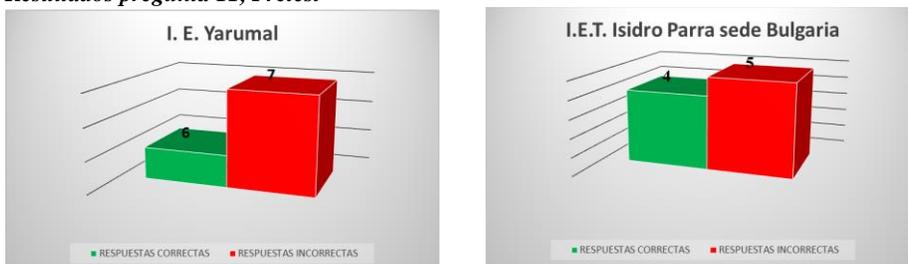


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 11. Dado el triángulo se puede decir que sus lados son.

El 54% de los estudiantes de la I.E. Yarumal y el 56% de los estudiantes de la Sede Bulgaria respondieron incorrectamente, demostrando que no reconocen cuales son los lados de los triángulos.

**Figura 13**  
*Resultados pregunta 11, Pretest*

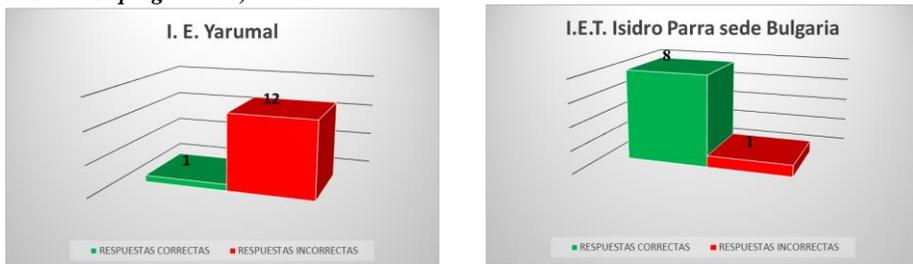


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 12. De acuerdo a la figura se afirma que.

Se nota que el 92% de los estudiantes de la I.E. Yarumal respondió incorrectamente, evidenciándose que no poseen conocimiento de ángulos y suma de ángulos, mientras que los estudiantes de la Sede Bulgaria el 89% respondió correctamente.

**Figura 14**  
*Resultados pregunta 12, Pretest*

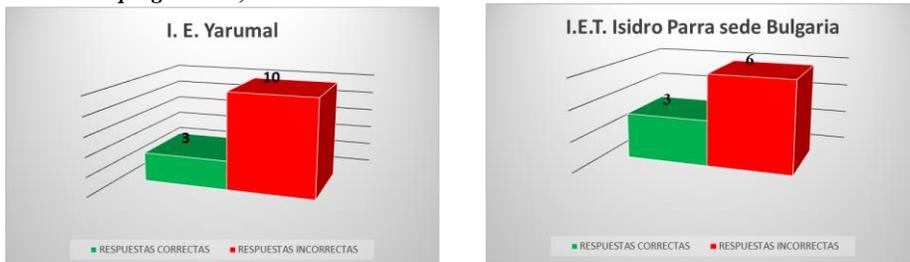


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 13. Teniendo en cuenta que la figura nos muestra un triángulo rectángulo, se puede afirmar que.

A esta pregunta el 77% de los estudiantes de la I.E. Yarumal y el 67% de la Sede Bulgaria respondieron incorrectamente, demostrando que la gran mayoría no reconocen el concepto de hipotenusa.

**Figura 15**  
*Resultados pregunta 13, Pretest*



**Fuente:** Autoría propia (2021)

Pregunta 14. En particular un triángulo rectángulo es una figura geométrica que consta de tres lados: una hipotenusa (lado mayor) y dos catetos (lados que forman el ángulo recto).

Determina el ángulo recto y la hipotenusa del triángulo de la figura anterior.

El 62% de los estudiantes de la I.E. Yarumal no reconocen el ángulo recto y la hipotenusa de un triángulo, mientras el 56% de los estudiantes de la Sede Bulgaria si lo hacen.

**Figura 16**  
*Resultados pregunta 14, Pretest*



**Fuente:** Autoría propia (2021)

Se concluye que las dos instituciones presentan deficiencias en los conceptos básicos, modelación y transformación de figuras planas, así como el manejo de instrumentos de medición propios de la geometría.

#### **4.3. Intervención de la estrategia didáctica**

Durante la implementación de la estrategia propuesta de la investigación se tuvo un grupo experimental en la Institución Educativa Yarumal, mientras que la Institución Educativa Técnica Isidro Parra Sede Bulgaria el proceso de intervención fue sin el uso de la estrategia didáctica, por lo tanto, este será el grupo de control. Es de anotar, que en ambas instituciones la enseñanza del Teorema de Pitágoras y Thales se realizaron con éxito, solamente que en el grupo control se tuvo una enseñanza tradicional, mientras que en el grupo experimental se implementan didácticas para enseñanza de la geometría con el uso de herramientas tecnológicas como el GeoGebra a través de Aplicativos creados por los autores de la investigación.

El grupo experimental tuvo varias secciones de trabajo, las cuales van encaminadas a mejorar sus conocimientos y habilidades en el pensamiento espacial métrico, el trabajo se realiza con la mitad del grupo, debido a que se encuentran en alternancia, las secciones eran realizadas una vez a la semana cada 15 días, esto debido a la postpandemia generada en el año de la aplicación de la propuesta.

Como primer elemento, se realiza un pretest, con el fin de medir el nivel de conocimiento de cada uno de los estudiantes y así buscar las estrategias para fortalecer las falencias que se encuentren.

En la figura 17, se evidencia la metodología de trabajo durante las clases presenciales en la I. E. Yarumal, acatando las medidas de bioseguridad. En ellas se evidencian los estudiantes realizando la prueba de reconocimiento (pretest).

**Figura 17**  
**Evidencia fotográfica prueba de reconocimiento, Pretets**



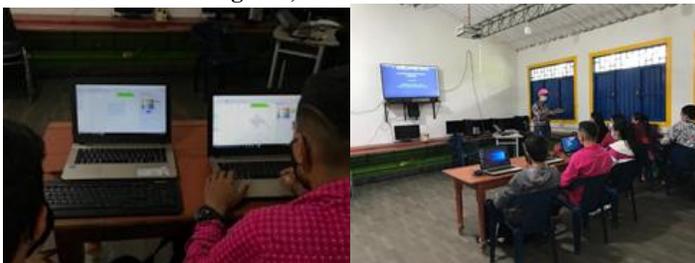
El análisis de la prueba arroja que los estudiantes tienen niveles muy bajos en los conocimientos de la geometría y sobre todo en lo referente a los teoremas de Pitágoras y Thales, por tal motivo se busca innovación, estrategias que llame la atención y motive al estudiante a mejorar sus aprendizajes.

La estrategia empleada es la utilización del software GeoGebra, siendo esta una herramienta innovadora que permite que los estudiantes aprendan de una manera más dinámica, haciendo uso de la tecnología.

Las secciones de trabajo se desarrollan en la sala de sistemas, cada estudiante dispone de un computador portátil, el cual le permite una interacción con el uso de las TIC para fortalecer el conocimiento aprendido.

La primera sección, se dispuso a la explicación de todo lo referente al software GeoGebra, debido a que los estudiantes no conocían esta herramienta, se elabora una guía, la cual es proyectada en un televisor, allí se muestra las herramientas que dispone el programa, para que sirva cada una.

**Figura 18**  
**Jornada de inducción en Geogebra, I.E. Yarumal**

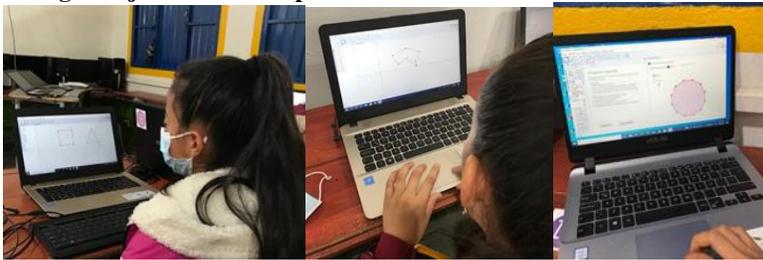


Una vez explicado el funcionamiento de una de las herramientas el estudiante realiza una actividad práctica, la cual es supervisada para saber si todos comprenden el manejo de GeoGebra.

En la segunda sección, ya se trabaja la construcción de elementos básicos en GeoGebra, como lo son los polígonos regulares e irregulares, se empieza por explicarles cómo se colocan puntos en el espacio, cambio de color, nombre y la ubicación, luego como unir los diferentes puntos para formar la figura, como medir longitud de los segmentos, ángulos, finalizada la

explicación realizan una actividad práctica donde deben poner a prueba lo aprendido, se les presenta un aplicativo en GeoGebra donde deben desarrollar actividades referentes a las figuras regulares e irregulares.

**Figura 19**  
**Evidencia segunda jornada con el aplicativo GeoGebra**



En la tercera sección, se trabaja el Teorema de Pitágoras, allí se parte por una actividad de saber previo donde el estudiante debe hallar el área de figuras geométricas, realizarla en hojas y luego socializar los resultados entre todos, luego se procede a la explicación de las características de los triángulos, se trabaja un poco de historia sobre Pitágoras de Samos, hasta llegar a la definición del Teorema de Pitágoras, para esto se realiza la demostración con un aplicativo en GeoGebra, donde el estudiante puede observar, comprobar y comprender la demostración del Teorema; siendo este uno de los niveles de Van Hiele (1958), en el que la visualización es un elemento esencial para la iniciación del proceso de aprendizaje de los estudiantes de la geometría desde un punto de vista contextual, donde los estudiantes deben vincular sus procesos iniciales de la geometría con lo que se observa a diario en su contexto;

además, de desarrollar estrategias que comprueben los planteamientos observados y el desarrollo de sus procesos geométricos.

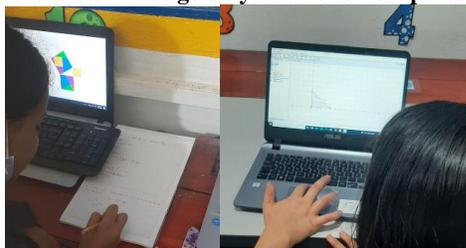
También, se deben desarrollar nuevas estrategias para la resolución de problemas.

Inicialmente con el desarrollo de estrategias propias del estudiante y sus conocimientos básicos desarrollados en los grados escolares anteriores y la comprensión propia del mundo, llamado por el autor como la formación en procesos de análisis y deducción informal.

Solucionan unos ejercicios referentes al Teorema de Pitágoras, los estudiantes debían solucionarlos en hojas y luego comprobarlos en GeoGebra. En este contexto se vinculan las heurísticas de Poyla (1989) donde cada estudiante debe comprender de manera empírica las estrategias a desarrollar en un contexto problema o situación problema situado, en este caso, a la comprensión de los sistemas geométricos y la resolución de problemas, creando un sistema basado en estrategias que le permitan al estudiante, analizar, comprender, crear y ejecutar un plan de acción, basado en los pasos anteriores y llegar a unas conclusiones para ser verificadas.

En caso de que la revisión arroje resultados no conformes se debe volver a realizar los pasos anteriores para la reafirmación de los resultados o la reconfiguración de los procesos.

**Figura 20**  
**Evidencia tercera jornada Teorema de Pitágoras y Thales con el aplicativo GeoGebra**

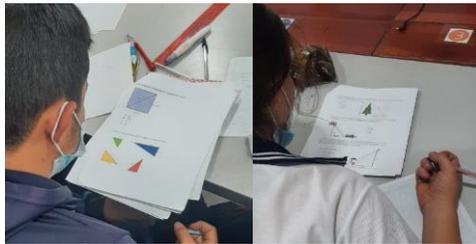


Finalmente, se aplica el postest, para verificar los conocimientos adquiridos por los estudiantes durante cada una de las secciones.

Un postest permite hacer un análisis introspectivo en el que el estudiante centra por completo su atención en los conceptos aprendidos y es capaz de dar solución a diversos problemas reales.

En la figura 21 puede evidenciarse la aplicación del postest en la I.E. Yarumal.

**Figura 21**  
**Evidencia fotográfica aplicación Postest**



En la Institución Educativa Técnica Isidro Parra sede Bulgaria se desarrollaron estrategias basados en el modelo pedagógico Dialogante dada por las características destacadas en el PEI de la sede lo cual se describe según De Zubiría Samper (2006) ampliando estrategias de acercamiento entre el conocimiento y el estudiante y el docente como mediador del proceso del aprendizaje; además plantea las actividades a desarrollar, sobre todo en las enfocadas con las matemáticas y lo indispensable de los procesos metódicos en la enseñanza y el aprendizaje de los pensamientos matemáticos, siendo cada uno de estos encaminados según las necesidades educativas del contexto (p. 168).

Para el progreso de estas actividades se plantearon estrategias acordes a las necesidades educativas evidenciadas en los estudiantes. Durante la primera jornada se trabaja sobre la construcción de figuras planas basados en la observación del entorno y la discriminación de las figuras geométricas que los componen, para su posterior clasificación en regulares e irregulares. Como complemento de las actividades, durante la segunda jornada se realizó la medición y construcción de figuras planas con los instrumentos tradicionales de medición (transportador, regla, compás, hojas milimétricas). Por último, se comparan las figuras construidas para exponer las similitudes y diferencias entre las construcciones.

**Figura 22**  
**Evidencia jornada 1 y 2, Polígonos**



En la tercera jornada se construyeron esquemas de medición de longitudes en varios triángulos rectángulos para su posterior verificación con la aplicación del Teorema de Pitágoras, donde los estudiantes puedan evidenciar la relación directa y las características que se deben presentar para que sea posible su aplicación. En las comparaciones los estudiantes hallaban sus aplicaciones en las mediciones de espacios muestrales como los terrenos de las fincas, la infraestructura escolar y de las construcciones, además de su aplicación con las proyecciones de sombras y la solución de problemas relacionados a la temática expuesta.

En la última jornada se realizaron actividades prácticas con la proyección de sombras de varios objetos con sus medidas para determinar las características y aplicabilidad del Teorema de Thales en situaciones cotidianas, para realizar el comparativo y aprobación del Teorema, además de su modelación mediante la aplicación de las ecuaciones.

**Figura 23**  
**Jornada 3 y 4, Teoremas de Pitágoras y Thales**



#### **4.4.Resultados del postest**

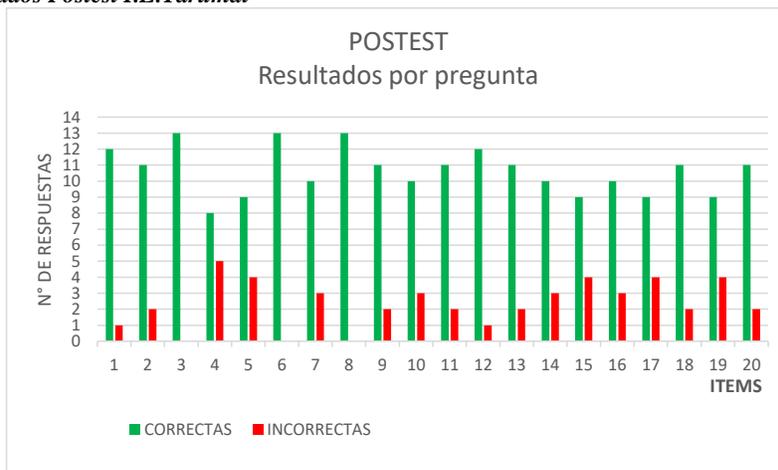
La metodología para determinar los avances del proyecto se realiza mediante la aplicación de un postest, el cual consta de una serie de 20 preguntas relacionadas con los temas de geometría sobre figuras planas, teoremas de Pitágoras y Thales, los cuales son valorados mediante la selección múltiple con única respuesta.

En la figura 24 se observan los resultados obtenidos por los estudiantes del grado noveno de la I.E. Yarumal, en un esquema que representa la totalidad de las respuestas obtenidas y su clasificación, basado en el número de aciertos.

En este se evidencia que los estudiantes tuvieron mejores resultados en comparación con el pretest, donde el 82% contestaron de manera correcta la prueba, demostrando que las

estrategias y actividades trabajadas durante las diferentes secciones fueron de gran importancia y mejoraron los conocimientos de los estudiantes.

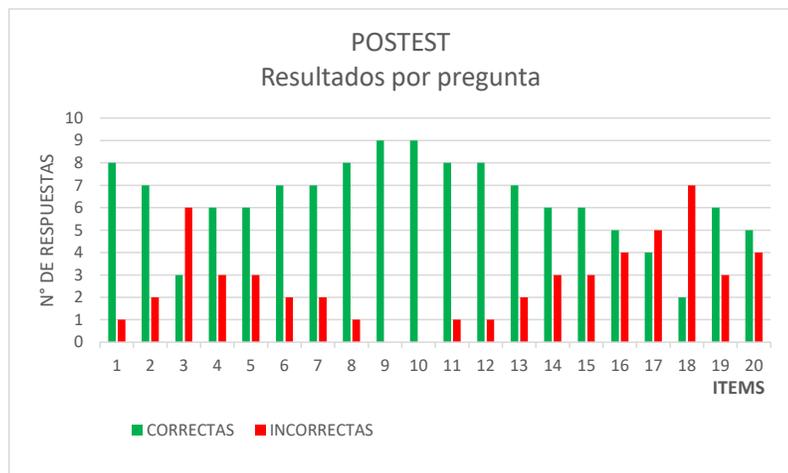
**Figura 24**  
**Resultados Postest I.E.Yarumal**



**Fuente:** Autoría propia (2021)

En la figura 25, se observan los resultados obtenidos por los estudiantes del grado noveno de la I.E.T. Isidro Parra sede Bulgaria en la resolución del postest. En esta se evidencia un nivel de aprobación del 71%, lo cual es un buen indicativo de las jornadas de aplicación y muestran los avances de los estudiantes con respecto a los presentados en el Pretest.

**Figura 25**  
**Resultados Postest I.E.T. Isidro Parra sede Bulgaria**



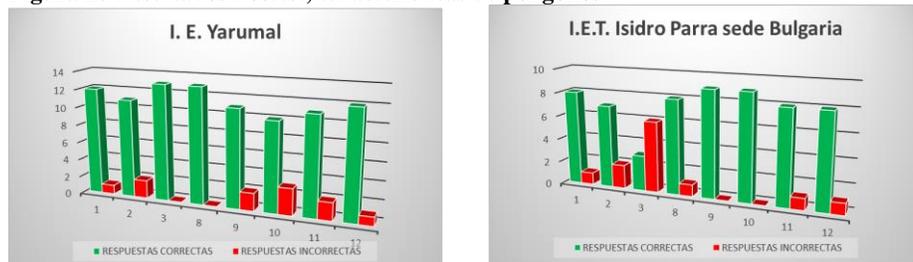
Fuente: Autoría propia (2021)

**4.4.1. Comparativo de resultados del postest de las Instituciones Yarumal y Bulgaria**

La figura 26, muestra los resultados de las preguntas referentes a los polígonos regulares e irregulares, donde se pone a prueba los conocimientos de los estudiantes relacionándolos con su estructura, características generales y particulares, así como los procesos de construcción. Además de la medida de sus longitudes, ángulos y clasificación de acuerdo a estas.

En este sentido se evidencia altos niveles de mejoramiento en las dos instituciones, donde la I.E. Yarumal presenta una aprobación del 89% y la I.E.T. Isidro Parra sede Bulgaria una aprobación del 83%. En ambos casos se evidencia un mejor nivel en los procesos de aprendizaje de los estudiantes y la aplicación de los contenidos trabajados con respecto al análisis y uso de polígonos.

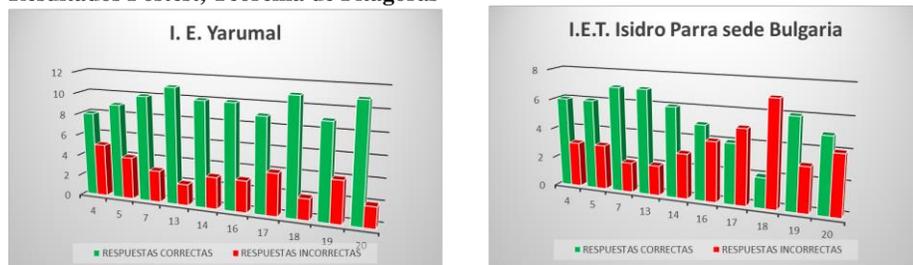
**Figura 26 Resultados Postest, características de polígonos**



Fuente: Autoría propia (2021)

La figura 27, representa los resultados obtenidos por los estudiantes en las dos instituciones, en este caso se analizan las respuestas a las preguntas relacionadas con el Teorema de Pitágoras y su aplicación en el contexto. Aquí se puede evidenciar un alto índice de aprobación en la I.E. Yarumal con un 75%, mientras que la sede Bulgaria muestra un índice de aprobación del 60 %, lo cual indica un mejoramiento más significativo en la primera institución. Esto revela un claro contraste entre las dos instituciones y muestra que los procesos de enseñanza aprendizaje fueron significativos en lo referente al Teorema de Pitágoras.

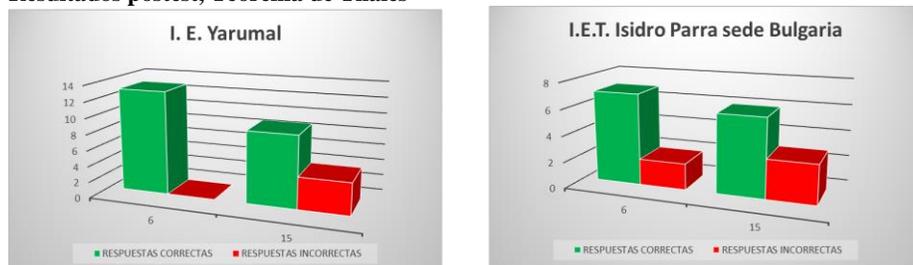
**Figura 27 Resultados Postest, Teorema de Pitágoras**



Fuente: Autoría propia (2021)

La figura 28 muestra los resultados obtenidos a las preguntas referentes al Teorema de Thales, donde el estudiante a partir de un problema referente a lo cotidiano debía dar la respuesta correcta, se puede evidenciar que en la I.E. Yarumal el 100% y en la I.E. Isidro Parra Sede Bulgaria el 78% de los estudiantes respondieron correctamente a la pregunta 6, en cuanto a la pregunta 15, los estudiantes de Bulgaria obtuvieron un 89% y los de Yarumal un 85% de respuestas acertadas. En ambas Instituciones se puede evidenciar un alto porcentaje de mejoría en los conocimientos del Teorema de Thales.

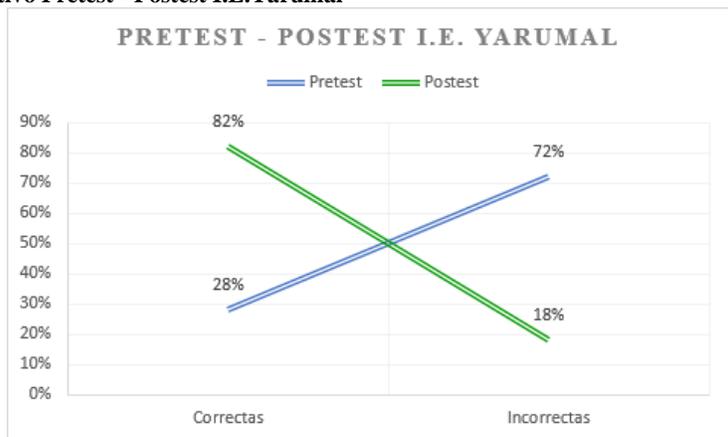
**Figura 28**  
**Resultados posttest, Teorema de Thales**



**Fuente:** Autoría propia (2021)

En la figura 29, se establece el avance de los estudiantes desde el inicio de la propuesta con la presentación del pretest, la intervención con los aplicativos en GeoGebra y la resolución del posttest, lo cual es un claro indicador del mejoramiento de los procesos de aprendizaje en los estudiantes de la I.E. Yarumal, en lo relacionado con los conocimiento de figuras bidimensionales y los Teoremas de Pitágoras y Thales.

**Figura 29**  
**Comparativo Pretest - Postest I.E. Yarumal**

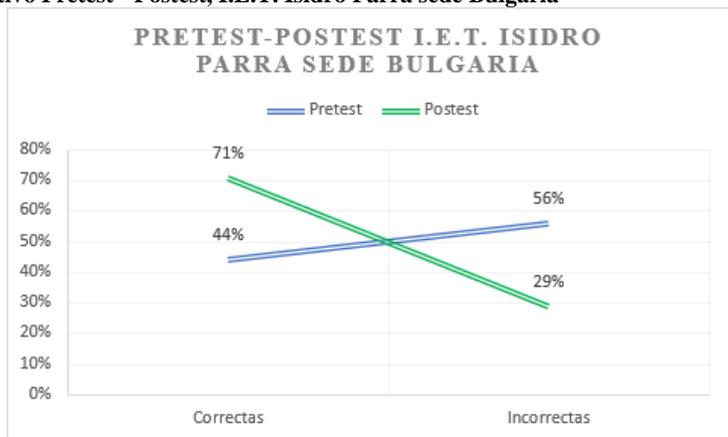


**Fuente:** Autoría propia (2021)

Los datos suministrados en la figura 30 muestran los avances de los estudiantes desde el inicio de la propuesta de intervención con la aplicación de un pretest, la enseñanza de las figuras planas y los Teoremas de Pitágoras y Thales mediante la integración del modelo pedagógico de la Institución y la inclusión de los aprendizajes basados en su aplicación en su contexto.

En esta se evidencia el aprendizaje de los temas presentados, pero continua con algunos niveles básicos en falencias de concepciones fundamentales de la geometría.

**Figura 30**  
**Comparativo Pretest - Postest, I.E.T. Isidro Parra sede Bulgaria**



**Fuente:** Autoría propia (2021)

Las gráficas 29 y 30 son una prueba fiable del mejoramiento de los aprendizajes y que estos son más favorables con el uso de herramientas tecnológicas como lo es el GeoGebra, puesto que los resultados de ambas instituciones muestran un claro nivel de avances, pero estos son más significativos en la I.E. Yarumal ya que en su prueba de ganancia de aprendizaje presentaron un nivel alto y la I.E.T. isidro Parra sede Bulgaria un nivel medio.

**4.5. Factor ganancia de aprendizaje**

El análisis de los resultados se mide mediante la aplicación del test de Hake, el cual mide la ganancia en el aprendizaje de los estudiantes. Según Hake (1998) “se define como la relación entre la ganancia media real ( $\% \{ \text{Poste} \} - \% \{ \text{pre} \}$ ) a la máxima ganancia media posible ( $100 - \% \{ \text{pre} \}$ )”. (p. 64)

De esta manera se puede verificar los aprendizajes adquiridos por los estudiantes, basado los resultados de la fórmula anteriormente presentada, estos se pueden clasificar de la siguiente forma:

Ganancia baja  $g \leq 0.3$

Ganancia media  $0.3 \leq g \leq 0.7$

Ganancia alta  $g > 0.7$

Lo anterior determina los niveles de ganancia que pueden ser obtenidos mediante la aplicación de la fórmula de ganancia de Hake (1998) en los procesos de análisis de los resultados observados en el pretest y posttest de manera más significativa y catalogándose de acuerdo a unos requerimientos mínimos de los resultados obtenidos en cada una de las instituciones.

La Institución Educativa Yarumal, basado en la fórmula de ganancia de aprendizajes de Hake, presenta los siguientes resultados:

$$g = \frac{\% \text{ posttest} - \% \text{ pretest}}{100 - \% \text{ pretest}}$$

$$g = \frac{82\% - 28\%}{100 - 28\%}$$

$$g = 0.75$$

Lo anterior nos indica que el índice de ganancia de la I.E. Yarumal se clasifica en el rango de ganancia alto, ya que su valor de  $0.75 > 0.7$ . Esto confirma que la implementación de los aplicativos en GeoGebra ayuda a mejorar los niveles de aprendizaje de los estudiantes y permite estructurar de una manera significativa los procesos de enseñanza aprendizaje e involucra nuevos métodos que pueden ser introducidos al aula de clase, además, implica

conectar con los estudiantes y su contexto, así como se ahorra tiempo en los procesos de construcción de figuras y en este tipo de instrumento TIC se pueden solventar las falencias que se encuentran en los procesos pedagógicos tradicionales.

En el caso de la Institución Educativa Técnica Isidro Parra sede Bulgaria, se aplica, de igual manera la fórmula de medición de la ganancia de aprendizajes de Hake, arrojando los siguientes resultados:

$$g = \frac{\% \text{ postest} - \% \text{ pretest}}{100 - \% \text{ pretest}}$$

$$g = \frac{71\% - 44\%}{100 - 44\%}$$

$$g = 0.48$$

Según la clasificación de ganancia de esta prueba indica que la sede se encuentra en un rango de ganancia medio, tomando este rango entre 0.3 y 0.7, lo cual determina un índice que poco favorece los aprendizajes del estudiante. Es así, como los niveles de la I: E. Yarumal, donde se alcanza el nivel alto mediante los aplicativos en GeoGebra, en la sede Bulgaria no se implementó herramientas tecnológicas, por lo que se acudió a la realización de estrategias basadas en el modelo pedagógico dialogante de la institución y llevando a cabo estrategias de aplicación de los aprendizajes en el contexto rural.

Se evidencian niveles de apropiación de los aprendizajes que son significativos para los estudiantes, pero hace falta la transversalidad con los elementos tecnológicos que se tienen a su disposición para mejorar la modelación y transformación de las figuras. Además, la motivación que logra obtener un estudiante con el uso de los aplicativos en GeoGebra no

es igual a la motivación que tienen los estudiantes cuando la enseñanza no deja de ser tradicional.

## Capítulo V

### Conclusiones y recomendaciones.

#### 5.1 Conclusiones

##### 5.1.1 Respuesta a la pregunta central

Dando respuesta a la pregunta: ¿Qué tipo de estudio es más efectivo en la enseñanza del teorema de Pitágoras y Thales si se emplean metodologías TIC y tradicional en estudiantes del grado noveno de la I.E. Yarumal y la I.E. Isidro Parra sede Bulgaria?

Los resultados del postest son contundentes y permiten demostrar que los estudiantes que estuvieron influenciados con el uso de la tecnología mediante el aplicativo GeoGebra obtuvieron mejores resultados que los estudiantes de grupo control que continuaron con la metodología de Postprimaria.

El uso de esta herramienta motivó a los estudiantes de Yarumal para que mejoraran sus conocimientos básicos sobre la geometría, en específico en el Teorema de Pitágoras y Thales, además, se pudo evidenciar la motivación que tenían a la hora de realizar las actividades por lo que nunca habían trabajado con este aplicativo, mientras que la sede Bulgaria tenía actividades basadas en la metodología de postprimaria donde se emplearon herramientas tradicionales, como la medición del campo, proyección de sombras y observación de estructuras del entorno, ya que visualmente no era tan fácil de referenciarlo como lo ha sido con la implementación de la tecnología computacional.

De acuerdo a lo mencionado, es preciso presentar unas características que se evidenciaron durante el desarrollo de la investigación, las cuales son de gran importancia para tener en cuenta en futuras investigaciones:

- Dentro de las aulas se debe incluir en la planeación el uso de las herramientas tecnológicas porque permite una motivación por el aprendizaje por parte de los estudiantes.
- El docente asuma un reto de actualizarse permanentemente en el área de matemáticas, haciendo referencia a la implementación de herramientas tecnológicas y el uso de material en concreto, ya que esto permite aprendizajes significativos, debido a que al manipular elementos tangibles se pueda visualizar e interactuar con nuevos conocimientos; y la tecnología computacional esta de la mano porque permite comprobar que esos conceptos sean demostrables.
- La contextualización, la cual debe ser incluida dentro de los planes de estudio como base para desarrollar las estrategias de enseñanza aprendizaje basados en la realidad de los estudiantes y vinculando las temáticas de acuerdo a las necesidades que se vayan presentando en el entorno.

### ***5.1.2. Respuesta a las preguntas auxiliares***

¿Cómo los estudiantes logran desarrollar sus competencias con el uso de GeoGebra?

El uso de herramientas tecnológicas en el aula de clase y fuera de esta permitieron el desarrollo de habilidades espaciales en los estudiantes del grado noveno y fomentaron la

construcción de los aprendizajes, puesto que por iniciativa propia modificaban las estructuras creadas durante las jornadas pedagógicas y ayudaron a motivar a crear nuevos saberes, lo cual es indispensable a la hora de presentar pruebas de estado y el desarrollo de competencias matemáticas, de razonamiento y manejo de estructuras en el espacio bidimensional, incluido la medida de estas.

¿Cómo se empleó la tecnología con la guía de enseñanza para facilitar los aprendizajes de los estudiantes?

Los modelos pedagógicos son una herramienta indispensable en los contextos educativos, ya que estos son los que revelan las metodologías empleadas para el desarrollo de las capacidades de los estudiantes y estas al ser vinculadas con los instrumentos tecnológicos brindan un apoyo fundamental en una era tecnológica y siendo abordada por estudiantes que son nativos tecnológicos, los cuales buscan nuevas formas de entretenimiento y la integración de las nuevas tecnologías con los aprendizajes ayudan al estudiante a estar más motivado durante las jornadas de clase que son más cercanas a su cotidianidad. La guía de enseñanza les permitió relacionarse e interactuar con cada uno de los elementos geométricos que presenta el aplicativo GeoGebra, encontrando en esto una estructura del pensamiento métrico espacial.

¿Cómo se describe la evolución de los estudiantes mediante la aplicación del aplicativo GeoGebra?

Es de aclarar que todo proceso de innovación tiene cierto nivel de complejidad de acuerdo al contexto en el que se desarrolle; los estudiantes en este sentido brindaron procesos

asertivos hacia el aplicativo, puesto que en su contexto rural es aún más complejo el acercamiento con estos medios tecnológicos. A medida que se iban trabajando en las diversas estrategias de introducción al aplicativo GeoGebra con la ayuda de la guía proporcionada por los investigadores, los estudiantes encontraban una estrategia que se parecía más a su realidad y que podía ser modificada en tiempo real con resultados medibles inmediatos, lo cual facilita sus procesos de asertividad y comprensión de los procesos geométricos y espaciales.

¿Las herramientas tecnológicas ayudan a fomentar el desarrollo de competencias en los estudiantes?

El desarrollo de competencias en los estudiantes de grado noveno es fundamental debido al proceso de cambio que vienen desarrollando y a los niveles de aprendizaje en los que se ven vinculados. La herramienta tecnológica es una conexión entre los aprendizajes y el contexto lo cual lo lleva al análisis de sus saberes con su contexto y esto es fundamental para su desarrollo integral, también permite que el estudiante aprenda de una manera dinámica, interactuando con lo que le gusta hace que sus aprendizajes sean más significativos.

¿Qué factores influyen en la enseñanza de la geometría cuando no se tiene como recurso la implementación de la tecnología computacional?

En los procesos de enseñanza de la geometría se hacen indispensables algunos recursos, tanto del docente como de los estudiantes; en el caso de los docentes se debe contar con las herramientas de figuras geométricas para tablero, sin las cuales no se podrían realizar las representaciones necesarias para la demostración a los estudiantes y en el caso de la sede

Bulgaria, no cuenta con dichas herramientas, lo cual hace más compleja la demostración de la enseñanza y las figuras que se realizan a mano no se asemejan a lo que se desea demostrar.

Ahora, las herramientas de trabajo para los estudiantes como el compás, transportador, regla y hojas milimétricas son indispensables para la trazabilidad de las figuras bajo los argumentos establecidos, pero debido a las condiciones socioeconómicas, muchas de estas herramientas no son de fácil alcance para los estudiantes. Lo anterior demuestra que los recursos físicos para la enseñanza de la geometría son indispensables para las demostraciones gráficas y sin estas se hace complejo y tedioso el proceso de enseñanza y aprendizaje.

¿Es necesario continuar desarrollando metodología postprimaria, sabiendo que ya existen recursos y herramientas que facilita la enseñanza de la geometría empleando las TIC?

Comentado [el1]: contestar

Actualmente el empleo de las herramientas tecnológicas está jugando un papel muy importante, adecuándose a las necesidades de las nuevas generaciones. Los modelos educativos han tenido que integrar estos recursos dentro de sus estructuras educativas.

Las TIC permiten mejorar los procesos formativos, posibilitando llevar al aula, clases más dinámicas, llamativas que permiten al estudiante a tener un aprendizaje significativo; pero lastimosamente, no todas las Instituciones Educativas cuentan con estos recursos tecnológicos, lo cual los obliga a continuar aún con metodologías tradicionales, sobre todo en los colegios de zona rural, algunos no cuentan con computadores ni servicio de internet.

## 5.2 Recomendaciones

Una de las falencias en las Instituciones, es por parte de los docentes, quienes les falta habilidades tecnológicas con el manejo de los recursos que estos ofrecen, hacen que no les den el uso adecuado a estas herramientas, para esto se hace necesario que los docentes se capaciten y se actualicen para mejorar sus habilidades frente a este tema y mejorar las competencias tecnológicas en sus estudiantes, así emplearían mejor los recursos didácticos, y llevarían al estudiante a que participe, interactúe, sea más dinámico, se interese por las clases, asimile de una manera más rápida los aprendizajes.

Una herramienta que puede ser la mejor aliada para un docente de matemáticas es GeoGebra, ya que es un software libre, de fácil instalación y acceso, por lo que las Instituciones rurales que no cuentan con el servicio de internet, la pueden utilizar con total funcionalidad.

Por otra parte, es importante que los docentes de matemáticas transversalicen los cinco pensamientos matemáticos con su proceso de planeación, así se evitaría que la asignatura de geometría sea vista en el último periodo del año escolar, o en su defecto, no sea orientada. En las Pruebas Saber, evalúan el pensamiento métrico espacial y es por lo que muchas veces los estudiantes les va mal en este pensamiento, porque no han adquirido los aprendizajes necesarios para resolver estas pruebas.

**Apéndices****Apéndice A. Pretest****UNIVERSIDAD CATÓLICA DE MANIZALES****Licenciatura en matemáticas y física**

Aplicativos en GeoGebra para la solución de problemas de los teoremas de Pitágoras y Thales  
a estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Yarumal y Bulgaria

**PRUEBA DE RECONOCIMIENTO**

**Nombre:** \_\_\_\_\_ **Grado:** \_\_\_\_\_

1. En un plano, dos rectas son paralelas si:

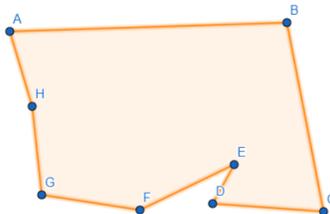
- Se cruzan en un único punto.
- No tienen ningún punto en común.
- Se cruzan en dos o más puntos.
- Ninguna de las anteriores

2. El grado es la magnitud del ángulo debido a la división del ángulo ...

- Completo en 90 partes iguales.
- Obtuso en 90 partes iguales.
- Recto en 90 partes iguales.
- Llano en 90 partes iguales.

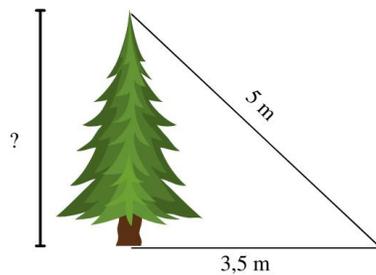
3. De la siguiente figura, ¿Cuáles de sus ángulos son agudos?

- A, D y C.
- A, B y C.
- H, F y B.
- Todos los ángulos son agudos.

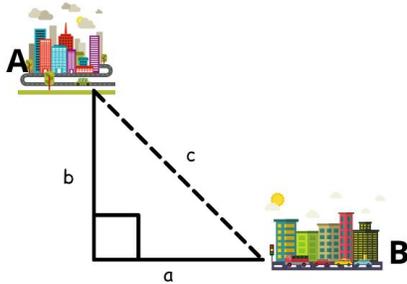


4. Sabiendo que la proyección de la sombra del árbol es de 3,5 m y su medida diagonal es de 5 m. ¿Cuál es la altura del árbol?

- a. 8.45 m
- b. 6.1 m
- c. 10.35 m
- d. 9.45 m



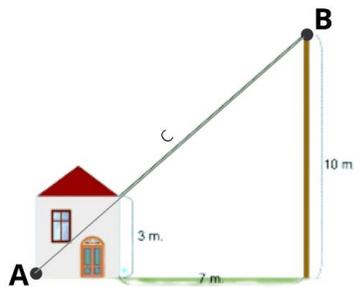
5. Existen dos rutas que conectan a la ciudad A y B. La primera conecta la ruta *a* con 15 km con la ruta *b* con 18 km, ¿Cuál será la distancia aproximada de la ruta *c*?



- a. 23 km
- b. 25 km
- c. 23 m
- d. 18 km

6. Existe una casa con una altura de 3 m y a 7 m se encuentra un poste de luz de 10 m de altura. Si sabemos que el frente de la casa mide 2 m, ¿Cuál sería el procedimiento correcto para calcular la distancia desde el punto A hasta el punto B?

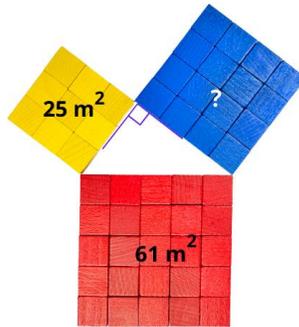
- a.  $c = \sqrt{7^2 + 2^2 + 10^2}$
- b.  $c = \sqrt{(7 + 2)^2 + 10^2}$
- c.  $c = \sqrt{7^2 + 10^2}$
- d.  $c = 7^2 + 10^2$



Tomado de: <https://cdn.todamateria.com/imagenes/teoremapitagoras3-cke.jpg>

7. La unión de los tres cuadrados forma un triángulo rectángulo en su centro. Sabiendo que el cuadrado amarillo ocupa un área de 25 metros cuadrados y el cuadrado rojo un área 61 metros cuadrados. ¿Cuál es el área ocupada por el cuadrado azul?

- a.  $48 m^2$
- b.  $49 m^2$
- c.  $36 m^2$
- d.  $25 m^2$



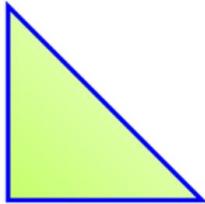
Observa la siguiente imagen, luego responde la pregunta 8.



8. ¿Qué figuras geométricas observas en la imagen?

- a. Triángulos, Cuadrados, círculos.
- b. Triángulos, paralelogramos, círculos.
- c. Triángulos, rombos, círculos.
- d. Triángulos, cuadrados, círculos.

Responde las preguntas 9 y 10, teniendo en cuenta la siguiente figura:



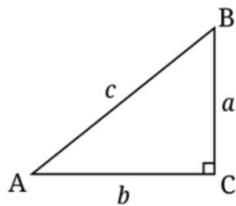
9. Con base a la figura anterior podemos afirmar que:

- a. Tiene dos lados iguales y tres ángulos diferentes.
- b. La medida de sus tres lados y ángulos son iguales.
- c. Tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales.
- d. Tiene sus lados y ángulos iguales.

10. Según la imagen, determina cuál afirmación es correcta

- a. Triángulo rectángulo, escaleno.
- b. Triángulo obtusángulo, isósceles.
- c. Triángulo obtusángulo, equilátero.
- d. Triángulo rectángulo, isósceles.

Teniendo en cuenta la figura, responde las preguntas 11, 12 Y 13.



11. Dado el triángulo podemos decir que sus lados son

- a. A, b y C.
- b. A, B y C.
- c. a, b y c
- d. B, a y C

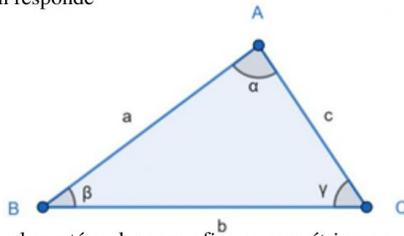
12. De acuerdo a la figura podemos afirmar que

- a. Si el  $\angle C$  mide  $90^\circ$ , entonces el  $\angle A + \angle B = 180^\circ$
- b. Si el  $\angle C$  mide  $90^\circ$ , entonces el  $\angle A + \angle B = 90^\circ$
- c. Si el  $\angle C$  mide  $90^\circ$ , entonces el  $\angle A + \angle B = 100^\circ$
- d. Si el  $\angle C$  mide  $90^\circ$ , entonces el  $\angle A + \angle B = 80^\circ$

13. Teniendo en cuenta que la figura nos muestra un triángulo rectángulo, se puede afirmar que:

- a. La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo agudo.
- b. La hipotenusa es el lado perpendicular al ángulo recto.
- c. La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.
- d. La hipotenusa es el lado de menor longitud del triángulo.

Según la siguiente imagen responde



14. En particular un triángulo rectángulo es una figura geométrica que consta de tres lados: una hipotenusa (lado mayor) y dos catetos (lados que forman el ángulo recto). Determina el ángulo recto y la hipotenusa del triángulo de la figura anterior.

- a. Ángulo A y lado b.
- b. Ángulo B y lado c.
- c. Ángulo C y lado a.
- d. Ángulo A y lado c.

**Apéndice B. Guías de estudio**

# GUÍA INICIAL DE GEOGEBRA - GEOMETRÍA

Un mundo de exploración adicional en  
matemáticas

---

EIZABETH MIRANDA LÓPEZ  
GUSTAVO ADOLFO MIRANDA LÓPEZ

# ¿Qué es GeoGebra?

EN PALABRAS DE SUS CREADORES

GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. GeoGebra, con su libre agilidad de uso, congrega a una comunidad vital y en crecimiento. En todo el mundo, millones de entusiastas lo adoptan y comparten diseños y aplicaciones de GeoGebra. Dinamiza el estudio. Armonizando lo experimental y lo conceptual para experimentar una organización didáctica y disciplinar que cruza matemática, ciencias, ingeniería y tecnología (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics). La comunidad que congrega lo extiende como recurso mundial, ¡potente e innovador para la cuestión clave y clásica de la enseñanza y el aprendizaje!

**[HTTPS://WWW.GEOGEBRA.ORG/ABOUT?LANG=ES](https://www.geogebra.org/about?lang=es)**

**PARTES DE GEOMETRÍA - GEOGEBRA**

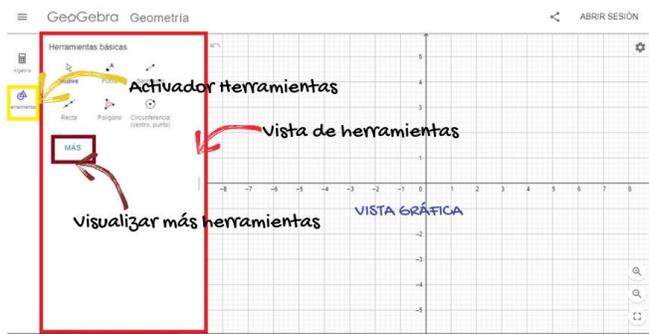


Figura 3. Vista general herramientas

Cada parte de GeoGebra tiene funciones específicas, las cuales vamos a ir trabajando una a una para determinar sus funciones principales y el momento oportuno para su ejecución. También existen funciones adicionales que se pueden activar en el menú de la aplicación.

**ACTIVIDAD PRÁCTICA # 1**

Activa la calculadora gráfica y escribe los siguientes puntos en la línea de comandos:  $A=(4,5)$ ;  $B=(4,1)$ ;  $C=(10,1)$ , recuerda dar enter entre cada comando para poderlo visualizar. Ahora ve a la opción herramientas y selecciona la opción polígono y con el cursor ubícate en cada punto y únelos con una línea. Aparece una gráfica como la siguiente:

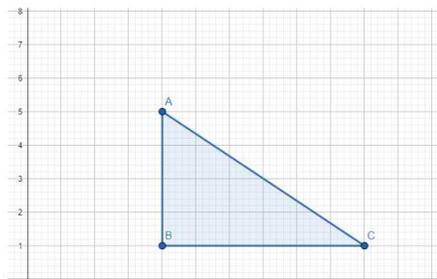


Figura 4. Actividad práctica 1

Ahora podemos aprender las configuraciones se le pueden dar a cada gráfica, punto y línea, cambiando forma, color, tamaño.

**PROCEDIMIENTO PARA CONFIGURAR UN OBJETO**

1. Selecciona el objeto a modificar.
2. Seleccionamos el logo de configuración  o damos clic derecho sobre el objeto y luego en propiedades. En el caso del celular se activa al presionar sostenidamente sobre el objeto. (Ten en cuenta que siempre que vamos a mover o seleccionar un objeto debemos dar clic en el ícono de mueve .
3. Se abrirá una venta con las opciones de **BÁSICO**, **COLOR**, **ESTILO** y **AVANZADO**.

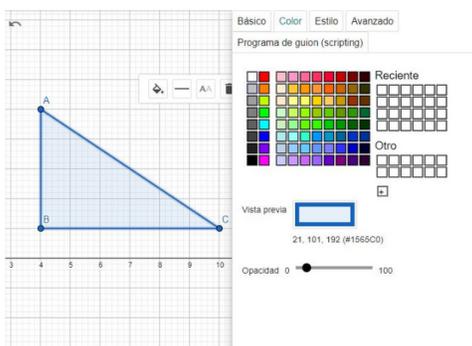


Figura 5. Configurar propiedades de objeto.

**TAREA 1.**

Ahora aplica la configuración de grosor, tamaño y color a la figura y envía una foto como evidencia.

**FUNCIONES DE LAS HERRAMIENTAS**

**Herramientas básicas**



Las herramientas básicas nos ayudan en las construcciones iniciales de una gráfica.

**MUEVE:** Permite seleccionar o mover un objeto dentro de la vista gráfica.

**PUNTO:** Crea un punto en la vista gráfica.

**SEGMENTO:** Permite unir dos puntos en la vista gráfica.

**RECTA:** Traza una recta que une dos puntos, sin principio ni fin.

**POLÍGONO:** Permite construir un polígono regular o irregular mediante el trazo de líneas o uniones de puntos.

**CIRCUNFERENCIA (CENTRO, PUNTO):** Crea una circunferencia a partir de un punto en su centro y se extiende hasta el radio deseado.

**TAREA 2.**

Crea y modifica figuras utilizando únicamente las herramientas básicas. Envía una foto como evidencia.

**Edición**



Las herramientas de edición nos permiten modificar los procesos realizados.

**SELECCIONAR OBJETOS:** Permite seleccionar uno o varios objetos a la vez para aplicarles las mismas modificaciones.

**MOSTAR / OCULTAR ETIQUETA:** Permite seleccionar si queremos ver el nombre de cada objeto o punto construido dentro de la vista gráfica.

**MOSTRAR / OCULTAR OBJETO:** Permite seleccionar si queremos ver el objeto o punto construido dentro de la vista gráfica.

**BORRAR:** Permite eliminar un objetos con un solo clic.

**Construcción**



Las herramientas de construcción nos permiten encontrar líneas o puntos dentro de una figura.

**MEDIO O CENTRO:** Encuentra y marca con un punto el punto medio entre dos puntos, un segmento, circunferencia o cónica.

**PERPENDICULAR:** Traza una línea perpendicular a un punto y segmento, vector, recta o semirrecta.

**MEDATRIZ:** Traza una recta entre el punto medio de dos puntos o un segmento.

**PARALELA:** Traza una recta paralela de acuerdo a un punto y su dirección.

**BISECTRIZ:** Traza la bisectriz con respecto a un ángulo.

**TANGENTES:** Traza la recta tangente entre un punto o recta y una cónica, circunferencia o función.

**Medición**



Permite realizar mediciones de longitud, amplitud y área. (Para activar más opciones de medición debes ir a la parte inferior del menú herramientas y activar la opción "MÁS").

**ÁNGULO:** Permite medir el ángulo de alguna figura a partir de la selección de dos rectas definidas.

**ÁNGULO DADA SU AMPLITUD:** Puede establecer la amplitud de un ángulo a partir de una sola recta y dar la medida de un ángulo.

**DISTANCIA Y LONGITUD:** Permite establecer la medida de longitud de una recta o dos puntos en el espacio.

**ÁREA:** Permite calcular el área de una figura.

## PARTES DE GEOGEBRA - GEOMETRÍA

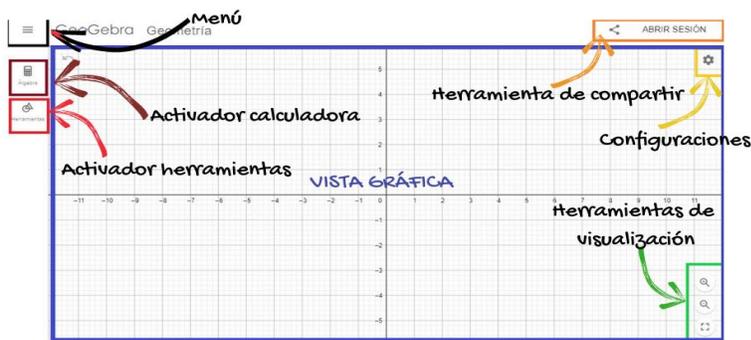


Figura 1. Vista general de GeoGebra - Geometría

Cada parte de GeoGebra tiene funciones específicas, las cuales vamos a ir trabajando una a una para determinar sus funciones principales y el momento oportuno para su ejecución. También existen funciones adicionales que se pueden activar en el menú de la aplicación.

### VISTA ALGEBRAICA

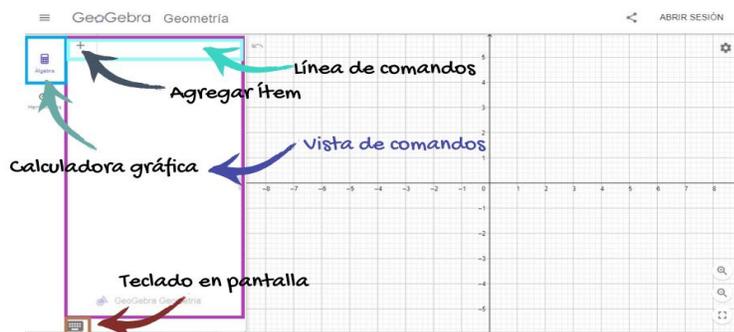


Figura 2. Vista algebraica

Estas opciones permiten escribir fórmulas, comandos y ubicaciones para determinar ubicaciones dentro del plano cartesiano, se pueden agregar símbolos desde el teclado en pantalla, cada comando se va visualizando en la tabla de vista de comandos.

**Rectas**



Muestra las herramientas básicas para crear cualquier tipo de línea con características básicas.

- SEGMENTO:** Crea una recta mediante la unión de dos puntos.
- SEGMENTO DE LONGITUD DADA:** Permite crear una recta a partir de un punto y dando la longitud de la recta.
- RECTA:** Crea una recta que pasa por dos puntos dados.
- SEMIRECTA:** Crea una semirrecta iniciando de desde el punto seleccionado y une un segundo punto.
- VECTOR:** Traza un vector entre dos puntos.

**Circunferencias**



Herramientas para construir circunferencias y sus derivados.

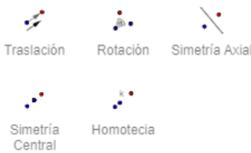
- CIRCUNFERENCIA (CENTRO, PUNTO):** Crea una circunferencia a partir de dos puntos dados, tomando como centro el primer punto y pasa por el segundo.
- CIRCUNFERENCIA: CENTRO Y RADIO:** Traza una circunferencia con un punto de centro y determinando el radio de la circunferencia.

**Polígonos**



Permite construir polígonos, ya sea regular o irregular, de acuerdo a la herramienta seleccionada.

**Transformación**



Herramientas que permiten hacer transformaciones de objetos y figuras en el plano.

- TRASLACIÓN:** Traslada una figura sin cambiar su estructura.
- ROTACIÓN:** Gira una figura de acuerdo a un ángulo de rotación.
- SIMETRÍA AXIAL:** Refleja una figura seleccionada dentro del plano.

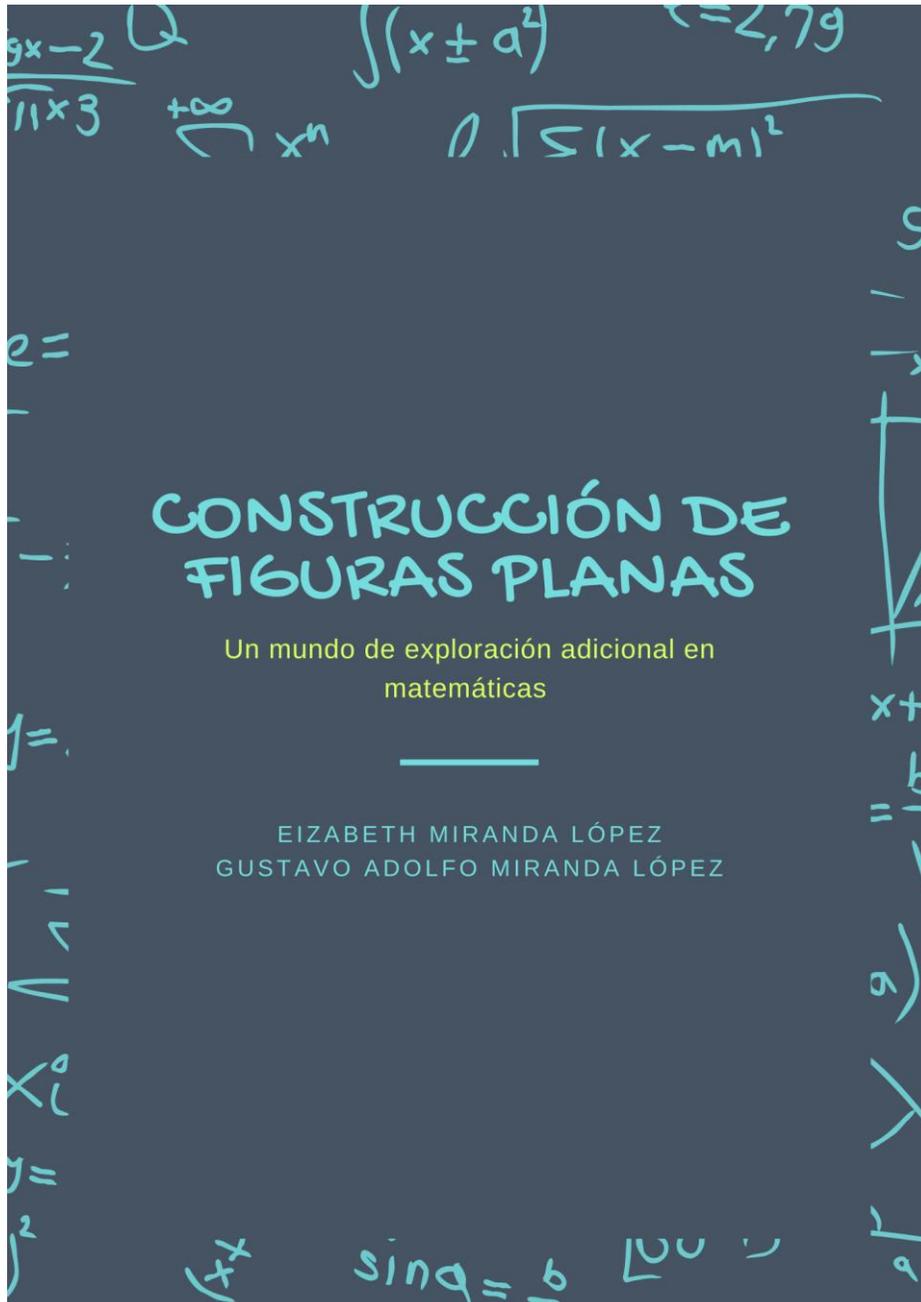
**Medios**



- IMAGEN:** Permite ingresar imágenes almacenadas.
- ABC:** Herramienta para ingresar texto dentro del plano.

**MENOS**      **MÁS**

Los puntos **MENOS** y **MÁS**, permite esconder o ampliar las herramientas.



## CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS PLANAS

Se relacionan diversas formas para construir figuras planas en el espacio mediante la aplicación GEOGEBRA-GEOMETRÍA, pero se debe tener en cuenta su funcionalidad y las estructuras que se necesitan para su desarrollo. Además, es importante revisar si a estas construcciones se les van a aplicar cambios posteriores para poder aplicarlas de la mejor manera.

### ACTIVIDAD # 1. UBICACIÓN DE PUNTOS EN EL ESPACIO.

Para la realización de este taller, se deben tener en cuenta las siguientes instrucciones:

1. Con la herramienta  ubica seis puntos cualesquiera en el espacio.
2. Ve al menú de opción  y dale clic en los tres puntos  y ve a la opción propiedades, esta abrirá una venta emergente con las características del objeto y las configuraciones que se pueden realizar.
3. En la opción  cambia el nombre y escribe observa sus coordenadas cartesianas en la parte de , la primera corresponde al eje "x" y la segunda al eje "y".
4. En la opción  cambia el color de cada punto.
5. Selecciona uno de los puntos, ve a la opción Algebra y luego a propiedades. En la opción "Definición" cambia sus coordenadas cartesianas por (2,5) y observa el cambio.

Nota: Recuerda que estos cambios también se pueden realizar de forma manual con la opción

 del menú herramientas y mover cada punto o figura dentro del plano.

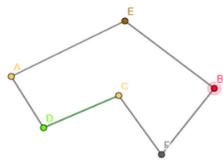


Figura 6. Ejemplo de puntos de colores en el plano.

**ACTIVIDAD # 2. CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS IRREGULARES.**

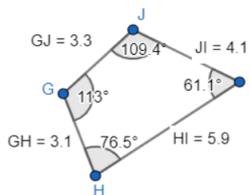
Para la realización de este taller, se deben tener en cuenta las siguientes instrucciones:

1. Ubica seis puntos en el espacio.
2. Con la herramienta  une los puntos construidos.
3. Con la herramienta  ubica los puntos hasta formar una figura como la siguiente:



**Figura 7.** Ejemplo de construcción de figuras irregulares en el plano..

4. Con la herramienta  selecciona de a dos segmentos de recta para determinar la amplitud de los ángulos.
5. Con la herramienta  mide las longitudes de cada segmento
6. Compara las medidas de los ángulos y longitudes con la de tus compañeros.
7. Construye un polígono irregular de cuatro lados que cumpla con la siguiente características:
  - a. Dos de sus ángulos deben ser agudos ( $< 90^\circ$ ) y dos obtusos ( $> 90^\circ$  y  $< 180^\circ$ ).
  - b. La medida de sus lados debe ser menor a 10 cm.



**Figura 8.** Ejemplo de construcción de figuras irregulares en el plano con medidas..

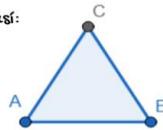
**Nota:** Para obtener más puntos puedes cambiar el nombre y color de cada punto y segmento.

**ACTIVIDAD # 3. CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES.**

Vamos a construir diferentes tipos de polígonos regulares, para ello sigue las siguientes instrucciones:

**Triángulo Equilátero**

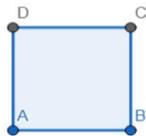
1. Ubica dos puntos en el espacio.
2. Busca la herramienta  uno los puntos construidos, luego te saldrá el número de vértices, escribe 3, luego dale OK y te quedará así:



**Figura 9.** Ejemplo de construcción de triángulo equilátero en el plano..

Construir un cuadrado siguiendo los pasos anteriores, lo único que cambia es el número de vértices, allí vamos a escribir 4.

Te debe que dar así:



**Figura 10.** Ejemplo de construcción de cuadrado en el plano..

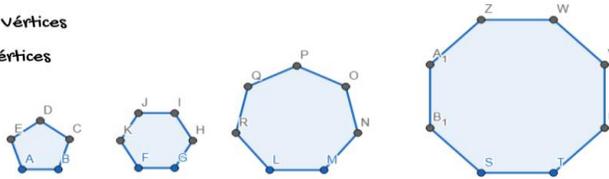
Ahora vamos a construir los siguientes polígonos regulares: No olvides tener en cuenta los pasos anteriores.

Pentágono: 5 vértices

Hexágono: 6 vértices

Heptágono: 7 vértices

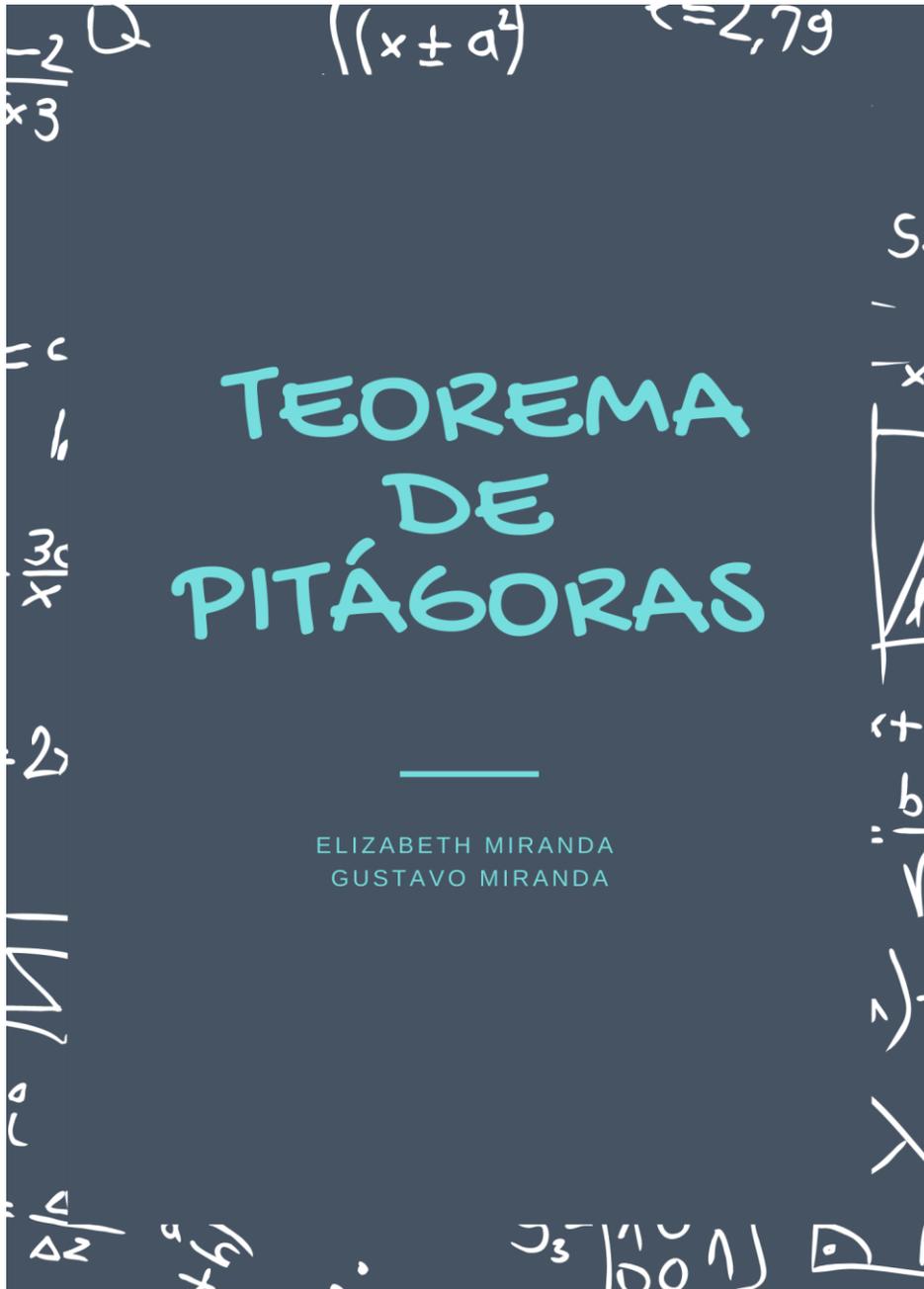
Octágono: 8 vértices



**Figura 11.** Ejemplo de construcción de diferentes polígonos regulares en el plano..

Terminado de construir los diferentes polígonos regulares, escoge uno de ellos y realiza lo siguiente:

1. Con la herramienta  mide las longitudes de cada segmento.
2. Con la herramienta  da clic sobre el polígono se desplegará la pestaña  da clic en los 3 puntos, ve a la opción propiedades, esta abrirá una venta emergente con las características del objeto y las configuraciones que se pueden realizar, ve a la pestaña color y escoge el que quieras para la figura.
3. Ahora vas a realizar el mismo procedimiento anterior pero con los puntos.



## TEOREMA DE PITÁGORAS

**OBJETIVOS:**

- Conocer características del triángulo rectángulo.
- Conocer y aplicar el Teorema de Pitágoras.

**Para comenzar:**

halla el área de las siguientes figuras.

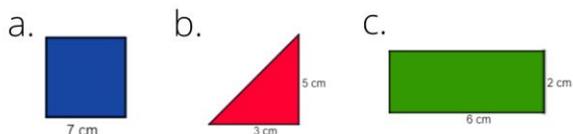


Figura 12. Ejemplos de figuras regulares para hallar área..

**No olvides**

Área de un cuadrado  
 $A_c = b \times a$

Área de un triángulo  
 $A_t = \frac{b \times a}{2}$

**Recordemos:**

**TRIÁNGULO**

Figura 13. Ejemplos de triángulos

Como ya conocemos, un triángulo es una figura de tres lados, tres vértices y la suma de sus ángulos interiores es de 180°.

Ahora conoceremos el triángulo rectángulo

**Las características son:**

- Posee un ángulo recto, es decir que la medida de uno de sus ángulos es 90°, y los otros dos son ángulos agudos.
- Los dos lados que se intersecan y forman el ángulo recto se denominan catetos, y el lado que está frente al ángulo recto se denomina hipotenusa y es el lado con mayor longitud.

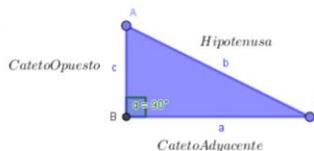


Figura 14. Partes triángulo Rectángulo.

### Aprende un poco de historia



#### Pitágoras de samos

Fue un filósofo y matemático griego, fundador del movimiento filosófico y religioso llamado pitagorismo, nacido alrededor del año 570 a. C.

Muchos de los descubrimientos matemáticos y científicos fueron atribuidos a Pitágoras entre los que se incluye su famoso teorema de Pitágoras, no obstante también hizo descubrimientos en el campo de la música, la astronomía y la medicina.

Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos.

#### Definición Teorema de Pitágoras

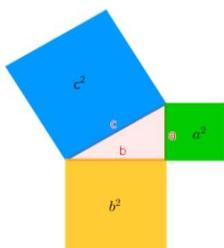


Figura 15. Representación Teorema de Pitágoras.

El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos, es decir, al elevar al cuadrado la medida de la hipotenusa y al sumar al cuadrado las medidas de los catetos se forma una igualdad.

Lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2$$

#### Para tener en cuenta

Para hallar la hipotenusa se usa:

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Para hallar un cateto se usa:

$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$

## Vamos a verificar

Realizar la siguiente actividad en Geogebra

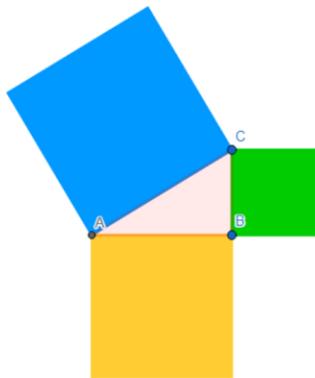


Figura 16. Demostración teorema de pitágoras

- Active la herramienta **segmento**, y construya el segmento entre A y B.
- Active la herramienta **perpendicular**, construya una recta que es perpendicular al punto B y segmento f.
- Active la herramienta **punto**, construya un punto C en la recta perpendicular trazada anteriormente.
- oculte la recta g y el segmento f.
- Active la herramienta **polígono**, una los puntos A, B y C formando un triángulo rectángulo.
- Active la herramienta **distancia o longitud**, indique la distancia entre cada segmento.
- Active la herramienta **polígono regular**, construya un polígono regular de 4 lados en cada lado del triángulo.
- colócale color a cada polígono.
- Active la herramienta **área**, verifique el área de cada uno de los polígonos regulares trazados. La suma de las áreas de los catetos deben ser igual al cuadrado de la hipotenusa.
- haz nuevamente el ejercicio, pero esta vez usando polígonos regulares de 5, 6 y 7 lados.

¿A qué conclusiones llega?

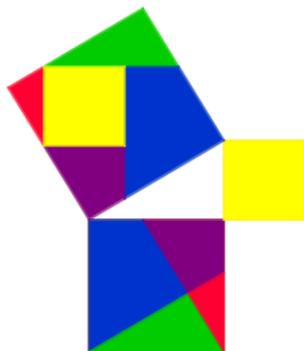


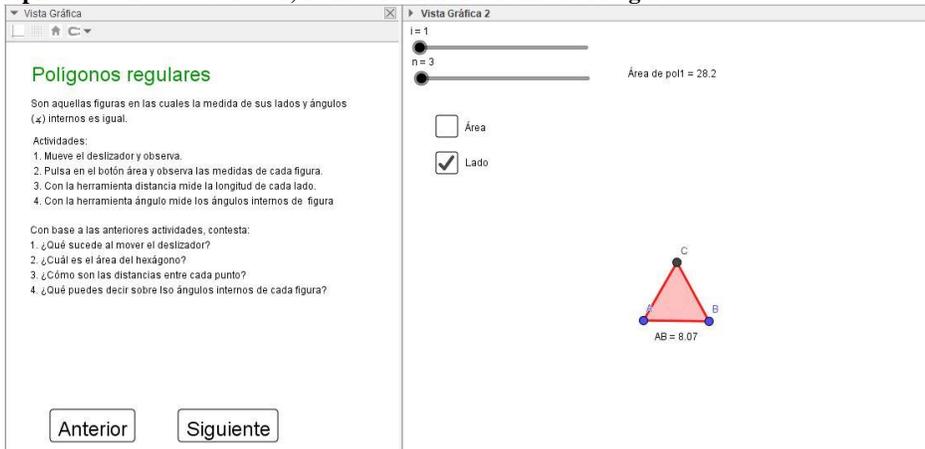
Figura 17. Demostración perigal del teorema de pitágoras.

- a) Active la herramienta **segmento**, y construya el segmento entre A y B.
- b) Active la herramienta **perpendicular**, construya una recta que es perpendicular al punto B y segmento f.
- c) Active la herramienta **punto**, construya un punto C en la recta perpendicular trazada anteriormente.
- d) oculte la recta g y el segmento f.
- e) Active la herramienta **polígono**, una los puntos A, B y C formando un triángulo rectángulo.
- f) Active la herramienta **polígono regular**, construya un polígono regular de 4 lados en cada lado del triángulo.
- g) Active la herramienta **paralela**, construya una recta que es paralela al segmento DE y que pase por el punto F. También construya una recta paralela al segmento DC y que pase por el punto E.
- h) Active la herramienta **intersección**, ubica el punto que es intersección entre las dos rectas anteriores, como también la intersección entre el polígono y las rectas.
- i) Ahora ve a opciones - etiquetado selecciona la opción ningún objeto nuevo.
- j) Active la herramienta **polígono**, construya los polígonos que se han formado con los puntos que han quedado, oculte las rectas que se han hecho.
- k) A los polígonos que se han formado ponles color.
- l) Active la herramienta **vector**, construya un vector de clic desde el punto J hasta cada uno de los vértices del polígono que representa el lado de la hipotenusa.
- m) Active la herramienta **traslación**, traslade cada uno de los polígonos con dirección del vector.

¿A qué conclusiones llega?

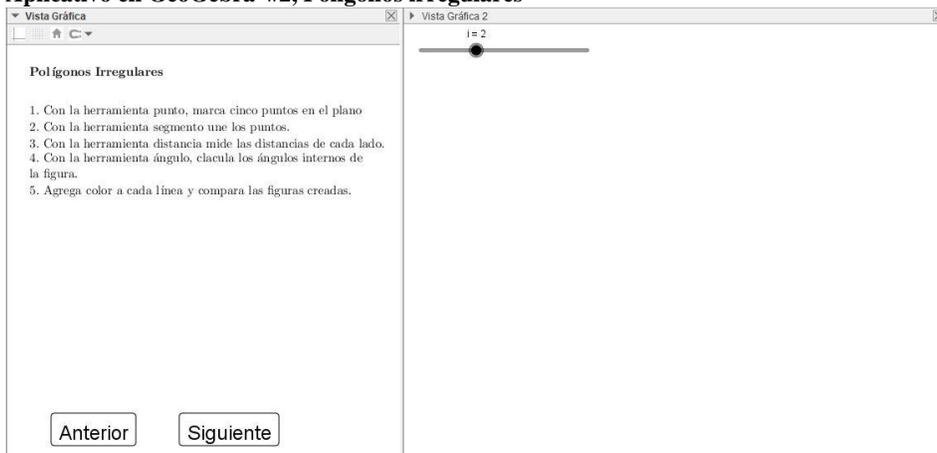
**Apéndice C. Aplicativos en GeoGebra**

**Figura 31**  
**Aplicativo en GeoGebra #1, Demostración Teorema de Pitágoras**



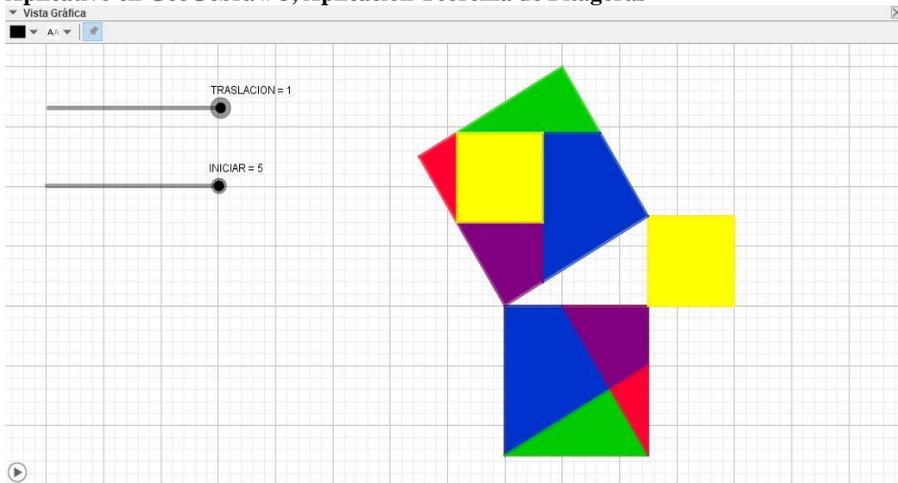
**Fuente:** Autoría propia (2021)

**Figura 32**  
**Aplicativo en GeoGebra #2, Polígonos irregulares**

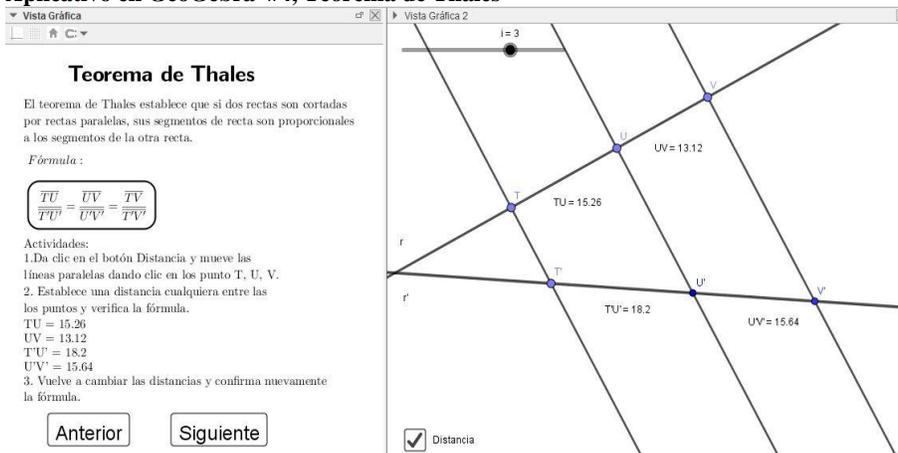


**Fuente:** Autoría propia (2021)

**Figura 33**  
**Aplicativo en GeoGebra # 3, Aplicación Teorema de Pitágoras**

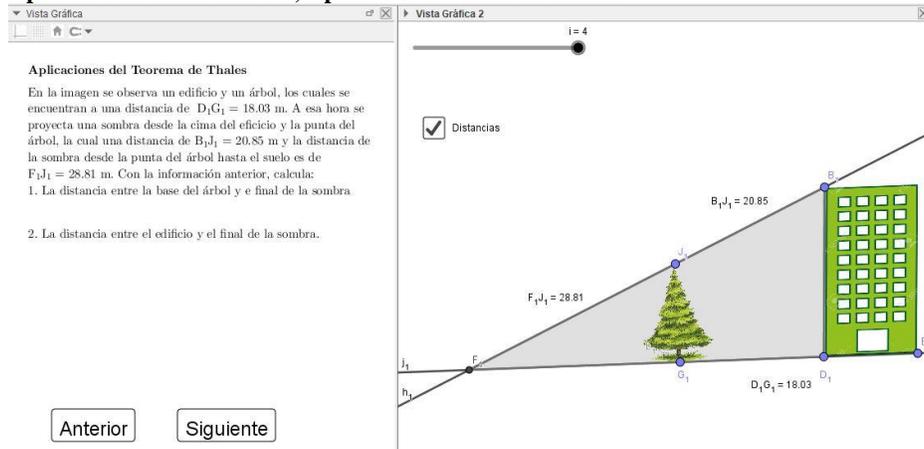


**Figura 34**  
**Aplicativo en GeoGebra #4, Teorema de Thales**



**Fuente:** Autoría propia (2021)

**Figura 35**  
**Aplicativo en GeoGebra # 5, Aplicación Teorema de Tales**



Fuente: Autoría propia (2021)

**Apéndice D. Postest****UNIVERSIDAD CATÓLICA DE MANIZALES****Licenciatura en matemáticas y física**

Aplicativos en GeoGebra para la solución de problemas de los teoremas de Pitágoras y Thales  
a estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Yarumal y Bulgaria

**PRUEBA DE RECONOCIMIENTO**

**Nombre:** \_\_\_\_\_ **Grado:** \_\_\_\_\_

1. En un plano, dos rectas son paralelas si:

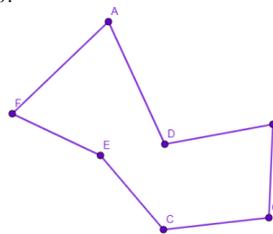
- a. Se cruzan en un único punto.
- b. No tienen ningún punto en común.
- c. Se cruzan en dos o más puntos.
- d. Ninguna de las anteriores

2. El grado es la magnitud del ángulo debido a la división del ángulo ...

- a. Completo en 90 partes iguales.
- b. Obtuso en 90 partes iguales.
- c. Recto en 90 partes iguales.
- d. Llano en 90 partes iguales.

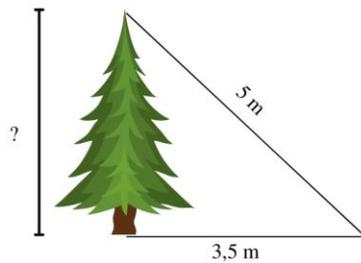
3. De la siguiente figura, ¿Cuáles de sus ángulos son agudos?

- a. A, D y C.
- b. A, B y C.
- c. A, F y B.
- d. Todos los ángulos son agudos.

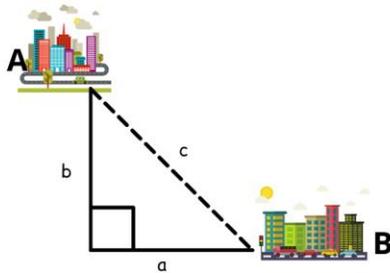


4. Sabiendo que la proyección de la sombra del árbol es de 3,5 m y su medida diagonal es de 5 m. ¿Cuál es la altura del árbol?

- a. 8.45 m
- b. 6.1 m
- c. 10.35 m
- d. 9.45 m



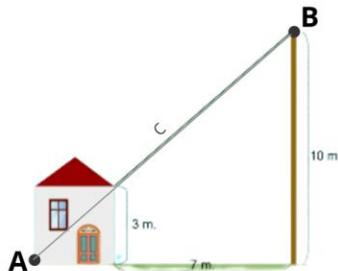
5. Existen dos rutas que conectan a la ciudad A y B. La primera conecta la ruta a con 15 km con la ruta b con 18 km. ¿Cuál será la distancia aproximada de la ruta c?



- a. 23 km
- b. 25 km
- c. 23 m
- d. 18 km

6. Existe una casa con una altura de 3 m y a 7 m se encuentra un poste de luz de 10 m de altura. Si sabemos que el frente de la casa mide 2 m, ¿Cuál sería el procedimiento correcto para calcular la distancia desde el punto A hasta el punto B?

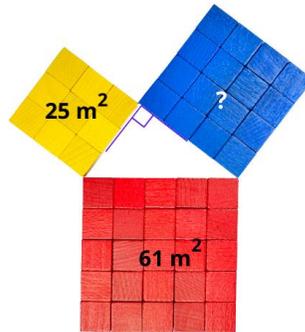
- a.  $c = \sqrt{7^2 + 2^2 + 10^2}$
- b.  $c = \sqrt{(7 + 2)^2 + 10^2}$
- c.  $c = \sqrt{7^2 + 10^2}$
- d.  $c = 7^2 + 10^2$



Tomado de: <https://cdn.todamateria.com/imagenes/teoremapitagoras3-cke.jpg>

7. La unión de los tres cuadrados forma un triángulo rectángulo en su centro. Sabiendo que el cuadrado amarillo ocupa un área de 25 metros cuadrados y el cuadrado rojo un área 61 metros cuadrados. ¿Cuál es el área ocupada por el cuadrado azul?

- a.  $48 \text{ m}^2$
- b.  $49 \text{ m}^2$
- c.  $36 \text{ m}^2$
- d.  $25 \text{ m}^2$



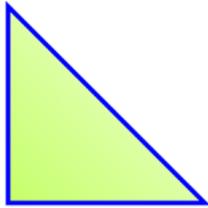
Observa la siguiente imagen, luego responde la pregunta 8.



8. ¿Qué figuras geométricas observas en la imagen?

- a. Triángulos, Cuadrados, círculos.
- b. Triángulos, paralelogramos, círculos.
- c. Triángulos, rombos, círculos.
- d. Triángulos, cuadrados, círculos.

Responde las preguntas 9 y 10, teniendo en cuenta la siguiente figura:



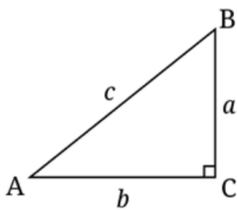
9. Con base a la figura anterior podemos afirmar que:

- a. Tiene dos lados iguales y tres ángulos diferentes.
- b. La medida de sus tres lados y ángulos son iguales.
- c. Tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales.
- d. Tiene sus lados y ángulos iguales.

10. Según la imagen, determina cuál afirmación es correcta

- a. Triángulo rectángulo, escaleno.
- b. Triángulo obtusángulo, isósceles.
- c. Triángulo obtusángulo, equilátero.
- d. Triángulo rectángulo, isósceles.

Teniendo en cuenta la figura, responde las preguntas 11, 12 Y 13.



11. Dado el triángulo podemos decir que sus lados son

- a. A, b y C.
- b. A, B y C.
- c. a, b y c
- d. B, a y C

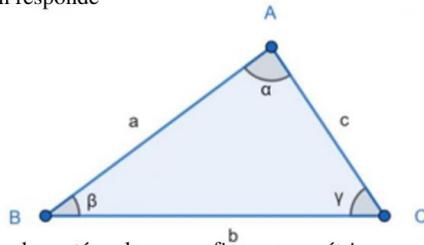
12. De acuerdo a la figura podemos afirmar que

- a. Si el  $\angle C$  mide  $90^\circ$ , entonces el  $\angle A + \angle B = 180^\circ$
- b. Si el  $\angle C$  mide  $90^\circ$ , entonces el  $\angle A + \angle B = 90^\circ$
- c. Si el  $\angle C$  mide  $90^\circ$ , entonces el  $\angle A + \angle B = 100^\circ$
- d. Si el  $\angle C$  mide  $90^\circ$ , entonces el  $\angle A + \angle B = 80^\circ$

13. Teniendo en cuenta que la figura nos muestra un triángulo rectángulo, se puede afirmar que:

- a. La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo agudo.
- b. La hipotenusa es el lado perpendicular al ángulo recto.
- c. La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.
- d. La hipotenusa es el lado de menor longitud del triángulo.

Según la siguiente imagen responde



14. En particular un triángulo rectángulo es una figura geométrica que consta de tres lados: una hipotenusa (lado mayor) y dos catetos (lados que forman el ángulo recto). Determina el ángulo recto y la hipotenusa del triángulo de la figura anterior.

- a. Ángulo A y lado b.
- b. Ángulo B y lado c.
- c. Ángulo C y lado a.
- d. Ángulo A y lado c.

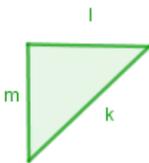
15. Una persona de 1.60 m de altura, a cierta hora del día, proyecta una sombra de 0,80 m. ¿Cuál será la altura de un edificio cercano que a esa hora proyecta una sombra 10 m?

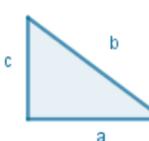
- A. 20 m
- B. 30 m
- C. 15 m
- D. 45 m

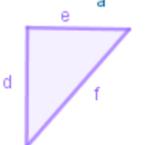
16. Se tiene un triángulo rectángulo con las siguientes medidas 9 cm, 12 cm y x cm. Sabiendo que x es la medida de la hipotenusa, ¿cuál es la medida de la hipotenusa?

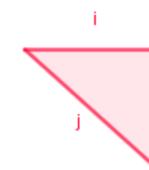
- A. 18 cm
- B. 15 cm
- C. 20 cm
- D. 12 cm

17. ¿Cuál de las siguientes relaciones es correcta?

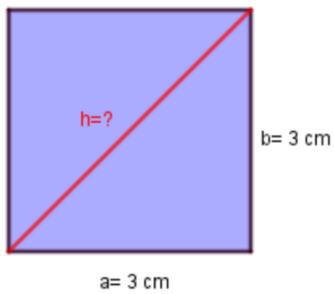
A.   $k^2 = m^2 + l^2$

B.   $a^2 = c^2 + b^2$

C.   $f^2 = d^2 - e^2$

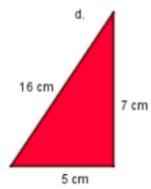
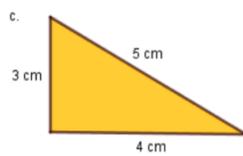
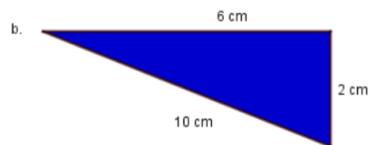
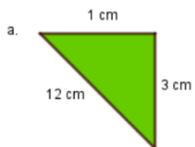
D.   $i^2 = h^2 + j^2$

18. La longitud de la diagonal de cuadrado de 3 cm es

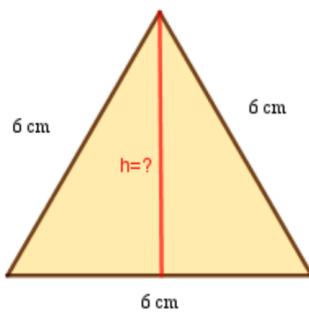


- a. 18
- b.  $\sqrt{18}$
- c. 9
- d.  $\sqrt{3}$

19. Cuál de los siguientes triángulos rectángulos cumple con el teorema de Pitágoras



20. La altura de un triángulo equilátero de lado 6 cm es



- a. 6 cm
- b.  $\sqrt{6cm}$
- c. 27 cm
- d.  $\sqrt{27cm}$

### Referencias

- Alonso, C. (1997). *Oportunidades de aprendizaje: "Los estilos de aprendizaje."*  
<http://www.educadormarista.com/Descognitivo/ESTAPR07.HTM>
- Belloch, C. (2012). *Las Tecnologías de la Información y Comunicación en el aprendizaje*. 9.  
<http://files/40/Belloch - Las Tecnologías de la Información y Comunicación e.pdf>
- Chamorro, M. del C. (2005). *Didáctica de las matemáticas para primaria*.
- Chen, H. T. (2006). A Theory-driven Evaluation Perspective on Mixed Methods Research.  
*Universidad Mercer*, 13(1), 75–83.  
<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.564.6060&rep=rep1&type=pdf>
- Constitución Política de Colombia [Const], 108 (1991).
- De Zubiría Samper, J. (2006). *Los modelos pedagógicos: hacia una pedagogía dialogante - Julián de Zubiría Samper - Google Libros* (Segunda Edición). GÉMINIS.  
[https://books.google.com.co/books?hl=es&lr=&id=wyYnHpDT17AC&oi=fnd&pg=PA3&dq=modelo+dialogante%2Bzubiria&ots=ndXC3XzSaf&sig=CE5icEIUJ5\\_yP4UqEjxcBOfhaPY&redir\\_esc=y#v=onepage&q=modelo+dialogante%2Bzubiria&f=false](https://books.google.com.co/books?hl=es&lr=&id=wyYnHpDT17AC&oi=fnd&pg=PA3&dq=modelo+dialogante%2Bzubiria&ots=ndXC3XzSaf&sig=CE5icEIUJ5_yP4UqEjxcBOfhaPY&redir_esc=y#v=onepage&q=modelo+dialogante%2Bzubiria&f=false)
- Duarte R., J. L., & Sanabria M., Y. (2018). *Informe por colegio del cuatrienio*. GITEI.  
[https://diae.mineducacion.gov.co/dia\\_e/documentos/2018/\\_2\\_Colegios\\_oficiales\\_para\\_web1\\_a\\_15718/173411000097.pdf](https://diae.mineducacion.gov.co/dia_e/documentos/2018/_2_Colegios_oficiales_para_web1_a_15718/173411000097.pdf)
- Formación y capacitación con Logopedia. (2021). *Revista Escuela Superior*.  
<https://escuelasuperior.com.ar/>
- Gardner, H. (2005). *Inteligencias Múltiples*. 46.  
[http://infohumanidades.com/sites/default/files/apuntes/GARDNER\\_inteligencias\\_multiples](http://infohumanidades.com/sites/default/files/apuntes/GARDNER_inteligencias_multiples)

las siete inteligencias\_0.pdf

Godino, J. D. (2002). UN ENFOQUE ONTÓLOGICO Y SEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN MATEMÁTICA. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 22(3), 237–284.

<http://www.ugr.es/local/jgodino>.

Hake, R. R. (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American Journal of Physics*, 66(1), 64. <https://doi.org/10.1119/1.18809>

Instituto GeoGebra. (2021). *Acerca de GeoGebra – GeoGebra. ¿Qué Es GeoGebra?*

<https://www.geogebra.org/about?lang=es>

Ministerio de educación cultura y deporte de España. (2010, June 28). *Matemáticas y las TIC - GEOGEBRA | Observatorio Tecnológico*.

<http://recursostic.educacion.es/observatorio/web/fr/equipamiento-tecnologico/didactica-de-la-tecnologia/806-monografico-matematicas-y-las-tic?start=2>

Ley General de Educación [Ley 115], (1994).

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). *Lineamiento curriculares: Matemáticas* (Magisterio). [https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-89869\\_archivo\\_pdf9.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf9.pdf)

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*.

*Decreto 1290*, (2009) (testimony of Ministerio de Educación Nacional [MEN]). <http://www.suin-juricol.gov.co/viewDocument.asp?ruta=Decretos/1260109>

Montaño, R. T. M. (2012). *AUTORES FACULTAD PLAN DE ESTUDIOS DIRECTOR TÍTULO DE LA TESIS*. 70. <http://files/17/DISEÑO DE ACTIVIDADES EN EL AULA DE CLASE, PARA LOS ESTUDIANTES DE.pdf>

- Morán, M. F. (2019). *Recursos tecnológicos para el aprendizaje de los cuerpos geométricos* [Universidad de Guayaquil]. <http://repositorio.ug.edu.ec/handle/redug/43368>
- Poyla, G. (1989). Cómo plantear y resolver problemas. In *Trillas* (Decimoquin, pp. 51–53). <https://bit.ly/305D3Ef>
- Proyecto Educativo Institucional Isidro Parra [PEI]*. (2021).
- Proyecto Educativo Institucional Yarumal (PEI)*. (2021).
- Rico, L. (2007). <p>La competencia matemática en PISA</p>. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, 1(2), 47–66. <https://doi.org/10.30827/PNA.V1I2.6215>
- Rodríguez, H. F., & Graus, M. E. G. (2017). *Actividades con medios dinámicos para el proceso de enseñanza- aprendizaje de los contenidos geométricos* [Universidad de Las Tunas]. <http://files/4/actividades con medios dinámicos para el proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos geométricos.pdf>
- Sistema Institucional de evaluación de los estudiantes [SIEE] I.E. Yarumal*. (2021).
- Sistema Institucional de Evaluación de los estudiantes [SIEE] I.E.T. Isidro Parra*. (2021).
- Tobón, S. (2006). *ASPECTOS BÁSICOS DE LA FORMACIÓN BASADA EN COMPETENCIAS*. 12. <http://files/36/Tobón y Mesesup - ASPECTOS BÁSICOS DE LA FORMACIÓN BASADA EN COMPETE.pdf>
- Urrea-Buitrago, L. A. (2018). *Fortaleciendo El Pensamiento Geométrico En Básica Secundaria, A Través Del Proceso De Modelación De las Características Del Triángulo, haciendo uso del software GeoGebra* (p. 110). <https://repositorio.ucm.edu.co/handle/10839/2205>
- Van Hiele, P. (1958). *A Method of Initiation into Geometry at Secondary Schools. Report on Methods of Initiation into Geometry*. <https://ci.nii.ac.jp/naid/10020037384>