LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

El Álgebra geométrica como herramienta didáctica para la enseñanza de la factorización de trinomios.

Esteban Vasco Bermúdez

Universidad® Católica de Manizales
VIGILADA MINEDUCACIÓN
Obra de Iglesia de la Congregación
Hermanas de la Caridad Dominicas de La Presentación de la Santísima Virgen

El Álgebra Geométrica Como Herramienta Didáctica Para La Enseñanza De La Factorización De Trinomios.

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de licenciatura en Matemáticas y física

Autor:

Esteban Vasco Bermúdez

Asesora:

Paula Andrea Osorio Gutiérrez

Universidad Católica de Manizales

Facultad de Educación

Licenciatura en Matemáticas y Física

Mayo de 2023

Dedicatoria

Quiero dedicar este proyecto de investigación a los estudiantes de grado octavo dos de la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí, los cuales fueron una pieza primordial para que este proyecto se llevara a cabo. A pesar de que yo era su profesor y quien les enseñaba, ellos también me enseñaron muchas cosas, las cuales me sirvieron para ser un docente más humano, creativo y dedicado.

A mi familia que me apoyó y es testigo de las noches en vela y del esfuerzo que realice para culminar este proyecto del cual me siento orgulloso.

Agradecimientos

Agradezco de corazón el acompañamiento, asesoría y apoyo incondicional de mi asesora de investigación Paula Andrea Osorio, sin ella nada de esto sería posible, pues fue ella quien me mostró, me guio y me motivó durante este proceso. Admiro su carisma, amor y paciencia por todo lo que hace.

A la Universidad Católica de Manizales por aportar a mi formación como estudiante, docente y persona. Pues la formación que se recibe en este lugar es integral y aplicable en los retos y experiencias que se viven dentro del aula de clase.

A los directivos y docentes de la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí, por abrirme las puertas de su colegio, permitirme llevar a cabo mi practica pedagógica allí y bríndame su apoyo para realizar una buena intervención con los estudiantes.

Resumen

La presente investigación ha sido desarrollada a partir de una propuesta didáctica en el escenario de práctica, con la que se pretende obtener un aprendizaje activo por parte de los estudiantes, donde aprendan conceptos de perímetro, área y volumen haciendo uso de la factorización.

El objetivo de este trabajo es fortalecer los procesos de la factorización de trinomios utilizando el álgebra geométrica en estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí.

En la metodología se hizo uso del enfoque cualitativo, pues se cuenta con herramientas que no están predeterminadas por completo, las cuales permiten recolectar otro tipo de datos como: emociones, experiencias, significativos y demás aspectos subjetivos que debe tener en cuenta el docente para solucionar las dudas y necesidades de sus estudiantes.

Los resultados arrojados han sido satisfactorios, debido a las herramientas empleadas para la comprensión de conceptos de tipo geométrico teniendo presente lenguajes algebraicos, encontrando que el uso de material en concreto es de gran utilidad porque le permite al estudiante interactuar con recursos propios, construir conceptos como las operaciones algebraicas, proponer y comprobar sus propios ejercicios, generando un aprendizaje activo y autónomo, además de la participación e interés por el tema tratado y el trabajo en equipo desarrollado en el aula beneficia a la población desde su contexto social.

Palabras Clave: álgebra, geometría, cambios de registro, factorización de trinomios, material en concreto, representaciones semióticas, lenguaje algebraico, trabajo en equipo.

Abstract

The present investigation has been developed from a didactic proposal in the practice scenario, with which it is intended to obtain active learning on the part of the students, where they learn concepts of perimeter, area, and volume using factoring.

This work aims to strengthen the processes of trinomial factorization using geometric algebra in eighth-grade students of the Liceo Mixto Sinaí Educational Institution.

The qualitative approach was used in the methodology since there are tools that are not completely predetermined, which allow the collection of other types of data such as emotions, experiences, significant and other subjective aspects that the teacher must consider solving questions and needs of their students.

The results obtained have been satisfactory, due to the tools used to understand geometric concepts, bearing in mind algebraic languages, finding that the use of specific material is very useful because it allows the student to interact with their resources, build concepts such as algebraic operations, proposing and checking their exercises, generating active and autonomous learning, in addition to participation and interest in the subject matter and teamwork developed in the classroom benefits the population from its social context.

Keywords: algebra, geometry, register changes, trinomial factorization, concrete material, semiotic representations, algebraic language, teamwork.

Tabla de Contenidos

Lista de tablas

Lista de figuras

Introducción

El álgebra es una asignatura que se le dificulta aprender a los estudiantes de grado octavo, debido a que algunos tienen vacíos conceptuales con respecto a la aritmética y la geometría que se enseña en grados anteriores, esto genera cierta frustración y desinterés por parte de los estudiantes al no comprender e interiorizar los ejercicios que se proponen resolver durante la clase. También hay que tener en cuenta que no todos los docentes enseñan esta asignatura apoyándose de estrategias didácticas como lo es el material en concreto, limitando el conocimiento de los estudiantes a procesos memorísticos y poco llamativos para su interés.

El álgebra geométrica es una estrategia didáctica que le permite a los estudiantes manipular objetos, observar gráficos y representar sus saberes, lo cual los hace sentir más comprometidos e interesados en aprender y llegar a sus propias conclusiones, además permite que haya una mejor transición del lenguaje natural al lenguaje algebraico, logrando así una mejor interiorización de conceptos como: expresiones algebraicas, variables y operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), para poder introducirlos en los procesos de factorización más específicamente en la solución de trinomios cuadráticos.

El concepto de factorización se puede enseñar a los estudiantes por medio de la geometría al hallar el área de figuras geométricas básicas como lo son el cuadrado y el rectángulo, permitiendo la transición de diferentes pensamientos matemáticos, como el pensamiento métrico, numérico, algebraico y variacional.

Todo esto sirvió como motivación para construir un libro de actividades didácticas que se implemente en los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí en el cual se hace uso del material en concreto para la resolución de ejercicios y problemas matemáticos que se resuelven a través de la factorización de trinomios.

1. Formulación del Problema

1.1 Planteamiento del problema

El aprendizaje del álgebra en la educación secundaria es de gran importancia ya que los estudiantes aprenden a razonar simbólicamente y les hace entender que los símbolos como la x y la y se utilizan en lugar de números, que varían y que pueden utilizarse para encontrar lo faltante en problemas matemáticos, de la vida real o en situaciones que cambian.

Una clase se puede volver monótona y tediosa cuando el docente se enfoca únicamente en impartir conocimientos teóricos donde priman los procesos memorísticos, lo cual puede convertirse en un arma de doble filo ya que al no comprenderse el verdadero significado de lo que se hace, se pueden cometer errores debido a que la memoria falla en ocasiones. En este sentido los docentes deben dejar de impartir los aprendizajes de la misma forma que lo han hecho durante toda su vida, deben reestructurar sus planeaciones y adicionar en ellas actividades en las que el estudiante se sienta motivado e involucrado en su proceso de aprendizaje.

En la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la educación básica secundaria, se detectan varios problemas que dificultan el entendimiento de esta rama de las matemáticas. Uno de ellos es que no todos los estudiantes al iniciar el curso cuentan con saberes estructurados a la hora de resolver ejercicios aritméticos lo que conlleva a la aparición de errores y confusiones. Otro problema de tipo actitudinal es que los estudiantes creen que el álgebra es difícil y que solamente se trata de operar aritméticamente unas letras, razón por la cual no permite ver el sistema algebraico como un elemento dinamizador de las matemáticas, ni el verdadero significado de lo que son: las variables, las expresiones equivalentes y de las operaciones con expresiones equivalentes. Ballén, O. menciona que:

> En el estudio del álgebra en la educación básica secundaria, se detecta el problema del paso del lenguaje natural al lenguaje simbólico; poco se potencia el uso de otros sistemas de representación como el gráfico, que permite visualizar ciertos procesos de resolución de problemas que involucran ecuaciones de segundo grado y verificación de sus soluciones. (2012, p.6).

Con relación a lo anterior, un problema que tiene que ver con la enseñanza del álgebra actualmente es que la continuación que hay de la aritmética al álgebra es vista por parte de algunos docentes como una transición lineal, por lo cual se basan únicamente en el dominio numérico dejando de lado otros dominios importantes de la matemática como lo es la geometría, donde se puede tener una transversalización de los pensamientos numérico variacional al pensamiento métrico espacial, sin dejar atrás aplicaciones que los estudiantes pueden observar en su propio contexto, encontrando sistemas de representaciones gráficas, tabulares y algebraicas que faciliten la comprensión de los distintos conceptos para dar solución a problemas reales.

En la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí se evidencia que los docentes de matemáticas siguen enseñando a sus estudiantes con métodos tradicionales, como por el ejemplo, el uso del algebra de Baldor para la enseñanza de la factorización teniendo caso 1, caso 2, etc. Sin encontrar la relación que aproxima a los productos notables y tampoco se consolida un lenguaje matemático aplicable a conceptos geométricos en dicha temática. El aprendizaje adquirido por parte de los estudiantes consiste en recibir la teoría por parte del docente, consignarla en sus cuadernos y realizar talleres memorísticos sin hacer uso de material en concreto, tecnológico u otro tipo de representación gráfica, que permita al estudiante hacer una inferencia y análisis para lograr competencias matemáticas. Citando a Herrera, R. (2012) se afirma que:

> La factorización es un proceso inverso al de la multiplicación y tiene como finalidad descomponer una expresión algebraica en un producto de otras expresiones, cuyos procedimientos provienen de las propiedades de los números reales, por tal razón es importante implementar otros recursos en el aula que faciliten la comprensión del concepto y se pueda lograr un aprendizaje significativo. (p.32)

Es por esto, que en esta investigación se desea implementar el *Álgebra Geométrica* como herramienta didáctica que ayude a potenciar el pensamiento variacional y de los sistemas algebraicos en los estudiantes de grado octavo de la institución educativa Liceo Mixto Sinaí, teniendo innovación en el uso de recursos que fomenten la cooperación del trabajo de grupo, la participación, la interacción y que el estudiante sea capaz de solucionar problemas de ámbitos geométricos-algebraicos.

Es así, como los docentes del siglo XXI están llamados a innovar sus clases, realizando ajustes en sus planeaciones de periodo, e incluyendo en ellas otro tipo de actividades como el material en concreto, donde los estudiantes pueden interactuar con su entorno, trabajar en equipo y experimentar, lo cual permite que ellos hagan sus propias conjeturas, análisis e inferencias y las clases sean más significativas para ellos.

1.2 Justificación

Las clases de álgebra en la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí se han venido trabajando con un método tradicional, es decir, los docentes se enfocan en dar la teoría, realizar algunos ejemplos y al final evaluar el conocimiento de sus estudiantes por medio de talleres memorísticos y trabajos escritos, dejando de lado otras estrategias didácticas como lo son: El material en concreto, las gráficas y las unidades didácticas.

Esta investigación pretende fortalecer los procesos de la factorización de trinomios en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí implementando estrategias didácticas como el álgebra geométrica, la cual es una herramienta que se basa en la utilización de material en concreto donde los estudiantes pueden desarrollar otras destrezas y habilidades para apropiarse de diferentes procesos matemáticos, empezando de lo concreto para llegar a los abstracto.

Es necesario que este proyecto se llevé a cabo en la institución pues permitirá que los docentes conozcan y utilicen otras estrategias didácticas para impartir sus clases, en este caso ¨El álgebra geométrica¨. Estrategia que favorece al trabajo cooperativo entre los estudiantes, fortaleciendo así las relaciones interpersonales que en ocasiones es tan compleja entre ellos. También permite que haya una autonomía en el aprendizaje, ya que los estudiantes al interactuar con los objetos y su entorno podrán ver reflejada la teoría de otra forma, hacer cambios de registro y llegar a sus propias conclusiones. Además, este proyecto beneficiara a los docentes de las diferentes sedes de la institución y a futuros docentes que se encuentran en formación, los cuales podrán implementar esta estrategia didáctica y transformar los ambientes de aprendizaje de sus contextos educativos.

Por último, se hace necesario contribuir con la mejora de los resultados de las pruebas estandarizadas que se evalúan en las instituciones públicas como lo son las pruebas saber del ICFES: Evaluar para avanzar y pruebas saber 9 y 11, lo cual beneficiaria directamente a la población estudiantil con una mayor posibilidad de ingreso a la educación universitaria, donde esto a futuro permeara los hogares de la comunidad.

1.3 Objetivos

Objetivo general.

Fortalecer los procesos de la factorización de trinomios utilizando el álgebra geométrica en estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí.

Objetivos específicos.

- Reconocer los conocimientos previos que tienen los estudiantes en operaciones algebraicas y conceptos geométricos de perímetro y área.
- Desarrollar una estrategia didáctica basada en el álgebra geométrica que ayude a fortalecer los procesos de factorización de trinomios.
- Validar la incidencia de los resultados obtenidos con la implementación de la estrategia didáctica para potenciar la factorización de trinomios.

1.4 Contextualización.

Esta investigación se desarrolla en la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí la cual se encuentra ubicada en la Cra 8 Calle 53-54, del barrio Alto Sinaí, de la ciudad de Manizales, ubicada en la comuna ciudadela del norte. El contexto socioeconómico de la comunidad está entre los estratos 1 y 2 donde se evidencia la falta de recursos por parte de algunas familias.

En la figura 1, se puede observar el escudo de la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí y la entrada del colegio con su fachada, la cual son símbolos importantes por los que los estudiantes tienen un alto sentido de pertenencia.

Figura 1. Escudo y fachada del Liceo Mixto Sinaí

La misión del colegio: La Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí fortalece en sus educandos el desarrollo integral, liderando procesos de transformación personal y mental, soportada en un modelo critico social, a través de una convivencia positiva y sana consigo mismo y con el entorno, solución inteligente de los conflictos e incluyente frente a la diversidad. Nuestros estudiantes optan por la integración con la educación formal o superior o el mundo laboral, buscando mejorar su calidad de vida.

La visión del colegio: Hacía el año 2022 la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí será líder en el desarrollo del pensamiento de sus educandos, con gran compromiso con el crecimiento comunitario y alta responsabilidad social, dispuesta a asimilar nuevos retos, buscando el mejoramiento continuo y la calidad de vida, mediante una actitud crítica, sentido de pertenencia, responsabilidad e idoneidad de quienes la conforman.

El modelo pedagógico del colegio es Escuela Activa Urbana (EAU). En el colegio hay una totalidad de 1.107 estudiantes matriculados en la jornada de la mañana y de la tarde. Y 22 profesores en la jornada de la mañana y de la tarde. Hay una totalidad de 16 aulas de transición a 11. El colegio cuenta con los siguientes espacios y herramientas educativas: 1 cancha de futbol y 1 cancha de basquetbol, 1 laboratorio de física,1 laboratorio de química, 2 salas de sistemas, 2 video beam y cada salón tienen un tv donde los profesores pueden compartir contenido audiovisual con sus estudiantes.

De acuerdo con lo planteado, se formula la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo el álgebra geométrica fortalece los procesos de la factorización de trinomios en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí?

Al anterior interrogante se le desprenden las siguientes preguntas auxiliares:

Preguntas auxiliares

¿De qué manera los estudiantes comprenden con el uso del material en concreto los conceptos de la factorización?

¿Cómo los sistemas de representación semiótica facilitan un aprendizaje en los cambios del registro grafico al algebraico?

¿Por qué es necesario incluir en las prácticas de aula estrategias con el uso de material manipulativo para generar un cambio didáctico?

Viabilidad

Esta investigación es viable ya que los materiales que necesitan utilizar los estudiantes no son muy costosos y ajenos a los que están acostumbrados a usar en la escuela, estos materiales pueden ser: pliegos de cartulina, regla, tijeras, colbón, colores, fotocopias, entre otros. Además, la institución y los estudiantes cuentan con herramientas tecnológicas las cuales pueden ser utilizadas para la explicación de temas y actividades referentes con la descomposición factorial.

Algo muy importante que se debe tener en cuenta es el contexto socio cultural en el que viven los estudiantes de La Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí. El colegio se encuentra ubicado en la Comuna 5 (Ciudadela del Norte) en la ciudad de Manizales, este es un contexto donde se pueden presentar hechos que tienen que ver con violencia, drogadicción o inseguridad. Por esta razón el docente investigador debe ser consciente de la manera en que se va a desenvolver con los estudiantes y padres de familia para no generar choques o conflictos sino propiciar espacios de respeto y equidad para poder aprender.

2. Marco Referencial

2.1 Marco de Antecedentes

2.1.1 Antecedentes históricos

A continuación, se presenta una breve historia de los momentos históricos más relevantes en la historia del álgebra, en ellos se encuentran trabajos relacionados con la factorización de polinomios de segundo grado e interpretaciones geométricas de este proceso ya que son los dos temas principales que abordará esta propuesta investigativa.

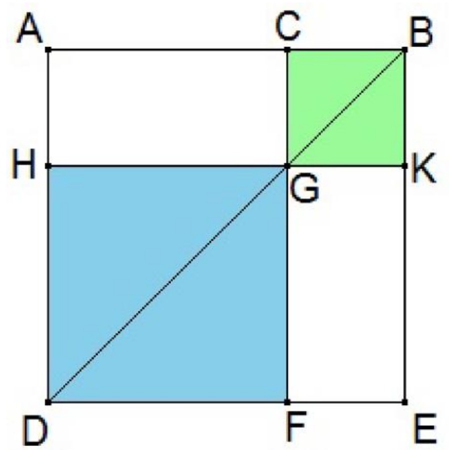
Las ideas más antiguas que se tienen sobre el álgebra provienen de los babilonios en la antigua Mesopotamia; en este lugar se encontraron unas tablillas de arcilla que demuestran sus alcances en la solución de ecuaciones lineales, cuadráticas y hasta de tercer grado. A su vez relacionaban el álgebra para la resolución de problemas geométricos.

En Grecia (600 a.C), se hace referencia especial al trabajo geométrico que hicieron con el álgebra evidenciado en los trabajos de Euclides y Apollonius. En el libro II de los Elementos de Euclides se usan figuras geométricas para representar magnitudes creando todo un lenguaje y tratamiento geométrico para las operaciones algebraicas, es decir:

> *Los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones se realizan por medio de construcciones geométricas, el producto de dos números se convierte en el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos dos números, el producto de tres segmentos es un volumen, la suma de dos números es igual a la prolongación de un segmento en longitud igual a la de otro, la resta es recortar de un segmento la longitud del segundo, la división se indica por la razón entre los segmentos que lo representan* (Kline, 1992 p.98).

Las once primeras proposiciones del libro II corresponden a identidades algebraicas (planteadas con nociones geométricas) en las cuales se usan relaciones entre áreas de rectángulos y cuadrados. El ejemplo más común de estas proposiciones es la II.4 que dice: "Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos".

Figura 2. Representación de la proposición II.4



Nota: DE DONDE SE TOMÓ - REFERENCIARLO

Lo anterior es usualmente conocido como el **cuadrado de una suma**, lo que en el lenguaje simbólico sería $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, donde a representa la longitud $\underline{HD}$ y b representa la longitud $\underline{BK}$.

Otro ejemplo destacado es la proposición II.5 que dice: "Si se corta una línea recta en segmentos iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la recta entera junto con el cuadrado de la recta que está entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad", y se ilustra en la figura 3, donde se afirma que el área del rectángulo de lados AD y DB del cuadrado de la CD es igual al área del cuadrado de lado CB.

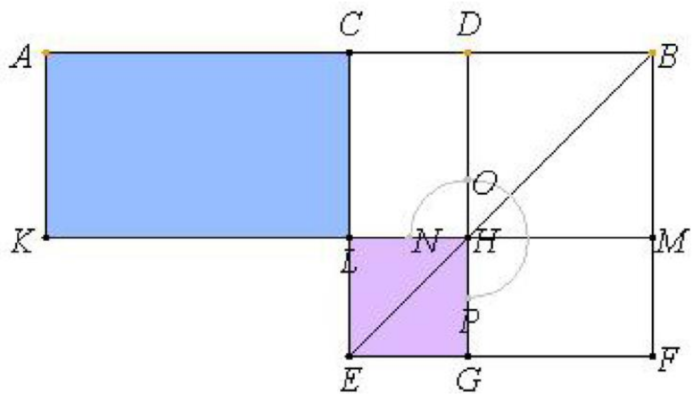
¨Si en cambio denominamos X a la longitud $\underline{CB}$ y a la longitud del $\underline{AC}$, la fórmula que se obtiene es¨:

$$XY + \left(\frac{Y-X}{2}\right)^2 = \left(\frac{Y+X}{2}\right)^2$$

Por último, si denominamos X a la longitud $\underline{DB}$ y a la longitud $\underline{DC}$, se obtiene:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Figura 3. Representación de la proposición II.5



Para concluir esta parte de la historia, recalcamos la importancia que ha tenido la geometría en el razonamiento algebraico a lo largo de los años, motivo que alienta a esta investigación a medir la influencia que tienen los registros gráficos en la comprensión del álgebra como una herramienta didáctica que se implementará con los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí en la ciudad de Manizales.

2.1.2 Antecedentes Internacionales

A continuación, se presentan algunos proyectos los cuales se fundamentan en la enseñanza del álgebra haciendo uso de recursos didácticos como lo son el álgebra geométrica y el material en concreto.

Se encontró una tesis realizada por (Navarrete Rodríguez, 2017) que fue titulada “Importancia de los materiales didácticos en el aprendizaje de las matemáticas” publicada en el Repositorio de la Universidad Peruana Unión. El objetivo de esta investigación era reivindicar y argumentar la importancia del uso de los materiales didácticos en un aula de educación primaria, para el desarrollo de la enseñanza-aprendizaje del área de matemáticas. La metodología usada fue a través del uso de materiales didácticos debido a que con estos los niños se motivan y se implican en su aprendizaje para que este sea significativo. Los materiales didácticos utilizados fueron: Regletas, Ábacos (Ruso, Chino, Japonés) y bloques multibase. La conclusión a la que llega el autor de la investigación es que el uso de los materiales didácticos en un aula de matemáticas es un instrumento o medio interesante que puede servir de gran ayuda para la comprensión de conceptos abstractos, y son casi necesarios, contribuyendo en gran medida a provocar ese cambio en la educación. Pero siendo conscientes, que son una ayuda para el aprendizaje y no un instrumento de entretenimiento para tener a los alumnos/as entretenidos cuando han terminado una tarea o cuando tienen un rato de tiempo libre.

Por otra parte, se encontró una tesis realizada por (Marín Acosta et al., 2017) que se titula "Promover la importancia del uso de material concreto en primer ciclo básico" encontrada en la revista de la Universidad Católica del Valparaíso. El objetivo de esta investigación era promover el uso de material concreto en las prácticas docentes de primer ciclo básico por medio de una infografía, sustentada teóricamente desde el ámbito de la psicología, biología y desde lo establecido por el MINEDUC. En esta investigación se usó el enfoque cualitativo ya que este permite describir experiencias personales y sociales, relacionadas con los hechos ocurridos en las aulas de clase a la hora de manipular material concreto. En esta investigación se concluye que la manipulación de los objetos proporciona vivencias reales, por lo que pueden interactuar y comunicarse verbalmente con los demás. Es importante que el docente entregue el espacio y los materiales adecuados, para que el alumnado vaya experimentando situaciones diferentes en forma directa, y estas a su vez, entreguen una valiosa información que les permitirá afrontar su vida.

Por último, se encontró un artículo titulado “La factorización de polinomios. Una experiencia docente” (Morales, 2008), en la cual se tenía como objetivo diseñar una propuesta de aprendizaje para la factorización de polinomios, basado en un modelo geométrico que les permitiera a los estudiantes factorizar a partir de figuras geométricas. La planeación y desarrollo de las actividades se realizó desde una perspectiva constructivista desarrollado por Jean Piaget; en la cual se da importancia a las acciones que realiza el sujeto para alcanzar un conocimiento. Con esta investigación se pudo concluir que la representación geométrica de números y expresiones algebraicas permite a los estudiantes, establecer significados geométricos familiares con los símbolos y las operaciones algebraicas.

2.1.3 Antecedentes nacionales

A continuación, se exponen algunas investigaciones a nivel nacional las cuales están ligadas con la enseñanza de la factorización polinómica a través de recursos didácticos como lo son el material en concreto y el álgebra geométrica.

Se encontró un trabajo de grado titulado “El álgebra geométrica como herramienta fundamental en el proceso de factorización polinómica” (Palacios et al., 2018), el objetivo de esta investigación era fortalecer los procesos de factorización de trinomios haciendo uso del álgebra geométrica como recurso didáctico. En esta investigación se usó el enfoque cualitativo ya que éste va más allá de una recolección de datos y permite la descripción de hechos reales y sociales. Esta investigación ayudó a que estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Santa Teresita de Sopetrán se apropiaran del proceso de factorización de trinomios con ayuda del álgebra geométrica, la cual les permitió integrar los conceptos algebraicos con su contexto. El autor de esta investigación concluye con su trabajo que se evidenció un impacto positivo pues los estudiantes evaluados con la prueba final que es la misma a la diagnostica, se demoraron menos tiempo en la realización, obtuvieron mejores resultados y en las preguntas que no fueron acertadas reconocieron cual fue su falla.

Por otro lado, se encontró una propuesta didáctica titulada "Tabletas Algebraicas como una alternativa de enseñanza del proceso de factorización de algunos polinomios de segundo grado" (Jimenez & Salazar, 2013). El objetivo de esta propuesta era promover el razonamiento, la comunicación e integración de los diferentes tipos de pensamientos matemáticos, favoreciendo mediante una serie de tareas recopiladas en un folleto la conversión del lenguaje simbólico-algebraico, además de prever ciertas dificultades en los estudiantes. La metodología usada en esta investigación fue a través del uso de tabletas algebraicas para combinar la geometría y el álgebra para la enseñanza del proceso de factorización. El autor concluye con esta investigación que el material permite asignar sentido al proceso de factorizar algunos polinomios utilizando representaciones inactivas, físicas y simbólico-algebraicas; naturalmente, como todo material físico, posee algunos limitantes, por lo cual solo se considera una alternativa para introducir la factorización de algunos polinomios de segundo grado. Este proyecto aportó a la innovación de las clases de álgebra escolar, y les permitió a los estudiantes encontrar relaciones con objetos que facilitaron la conexión entre esos conocimientos.

2.2 Marco legal

En este apartado se relacionarán las leyes y los lineamientos curriculares que se tienen en cuenta en educación para facilitar los procesos de aprendizaje de los niños en la básica y la media vocacional.

De acuerdo con la Constitución Política de Colombia de 1991, en el Articulo 44 se menciona que uno de los derechos fundaméntales de los niños es la educación.(Constitución Politica de Colombia, 1991)

En el mismo sentido se encuentra la Ley General de educación 115 del 8 de febrero de 1994, la cual regula el Servicio Público de la Educación en Colombia, y su función social va acorde con las necesidades e intereses de la sociedad. En el Artículo 1° se menciona que el objetivo de la educación en Colombia es: “Un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes”.(*Ley 115 de Febrero 8*, 1994).

De lo anterior, se puede decir que la educación cumple un papel muy importante en la sociedad y en la subsistencia de las personas ya que aporta en la construcción de conocimientos, valores, vocación y proyección laboral, para mejorar su calidad de vida y la de su entorno.

En la misma línea, en el Artículo 5° se mencionan los fines de la educación, los cuales tienen como objetivo favorecer al desarrollo de la personalidad de los estudiantes dentro de un proceso de formación integral, física, psíquica, intelectual, moral, espiritual, social, afectiva, ética, cívica y demás valores humanos. (*Ley 115 de Febrero 8*, 1994).

Por otro lado, La ley general de educación estableció una serie de lineamientos curriculares, los cuales sirven de guía y apoyo para que las instituciones diseñen sus currículos y para que los docentes a partir de estos puedan planear sus clases. Los lineamientos curriculares están definidos para las áreas obligatorias establecidas por la Ley General de Educación en el artículo 23.

En los lineamientos curriculares de matemáticas se establece que todos los docentes de esta área deben potenciar en sus estudiantes cinco tipos de pensamientos: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional. Con el objetivo de que desarrollen competencias que les permitan afrontar los retos actuales como son la complejidad de la vida, el tratamiento de conflictos y el manejo de la incertidumbre.

Teniendo en cuenta los cinco tipos de pensamiento, se elaboraron y se distribuyeron los Estándares Básicos de Competencia (EBC), los cuales según el MEN (2006) se definen como criterios claros y públicos que permiten establecer los niveles básicos de calidad de la educación en todas las áreas del conocimiento y constituyen unos criterios comunes para las evaluaciones externas. El análisis de los resultados de estas pruebas permite conocer el estado en que se encuentran los estudiantes a nivel nacional en comparación con otros países y a su vez permiten diseñar estrategias de mejoramiento focalizadas en las necesidades que tienen las diferentes regiones, departamentos, ciudades e instituciones del país.

En el año 2015 se crearon los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) Versión 1, en el 2017 se cuenta con la versión 2, los cuales están diseñados por grupos escolares, en este caso se tienen presente los de grado octavo. Debido a que esta investigación se centra en el fortalecimiento del pensamiento variacional de los estudiantes de grado octavo de la I.E Liceo Mixto Sinaí, las competencias que estos deben adquirir son: identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas; construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada; usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

Por último, los DBA son de gran importancia pues a partir de ellos todas las instituciones educativas del país plantean rutas de enseñanza que favorecen a la adquisición de aprendizajes por parte de los estudiantes año tras año. Los DBA a su vez especifican los conocimientos, habilidades y actitudes que deben adquirir los estudiantes en cada grado y estos guardan total coherencia con los Lineamientos Curriculares y los EBC.

2.3 Marco Conceptual

2.3.1 Herramientas didácticas, una transformación en el aprendizaje

Las herramientas didácticas son insumos, estrategias, medios, materiales, entre otros; que le sirven al docente para transmitir el conocimiento pedagógica y dinámicamente con el fin de que se logré el aprendizaje esperado a sus estudiantes de una forma mas fácil. En donde el educador implementa diferentes herramientas didácticas educativas debido a que todas las personas tienen diferentes estilos de aprendizaje, de esta manera el profesor adecua estas herramientas conforme a las capacidades y necesidades del alumno para que la enseñanza impartida cumpla los objetivos planteados. Es importante mencionar que esta dinámica de aprendizaje favorece en cuanto a la participación, dinamismo, inclusión e interés del alumno sobre las actividades que se van a desarrollar en los diferentes espacios educativos.

Con base a lo anterior se puede decir que, para implementar herramientas didácticas de aprendizaje adecuadas a los alumnos, es importante conocer cuáles son los saberes previos, para que así el profesor pueda tener una mejor orientación en la labor educativa. De acuerdo con esto Ausubel menciona que es de vital importancia considerar lo que el alumno ya sabe para que se pueda establecer una relación con lo que se debe aprender. Y esto se conoce como el aprendizaje significativo en donde una nueva información se conecta con un concepto preexistente en la estructura cognitiva. “El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe, averígüese eso y enseñe consecuentemente” (1983, p.2).

En la misma línea, es relevante explicar qué son los materiales en concreto y con qué fin son implementados en la labor educativa, según Tanca, “estos son elementos físicos que aportan mensajes educativos para desarrollar estrategias cognoscitivas, enriquecer las experiencias sensoriales, facilitar el desarrollo y adquisición del aprendizaje” (2000, p.12). Según lo anterior son todas aquellas herramientas u objetos usados por el docente para facilitar el aprendizaje del alumno.

En cuanto a las matemáticas muchos de los conceptos son abstractos por lo cual se implementa el uso del material en concreto con el fin de que el estudiante estimule los conceptos e ideas preexisten en él y los reestructure cognitivamente adquiriendo de esta manera nuevos aprendizajes de una forma adecuada y sencilla. Según Piaget, el entendimiento y aprendizaje de las personas se hace realidad, cuando se hace efectiva la actividad en donde no solo se transmite información al alumno, sino que también se implementa una pedagogía en donde este experimente mediante la interacción de objetos, manipulación de símbolos y acciones reales o simbólicas en donde se dé la transformación del conocimiento. “la inteligencia comienza con la actividad, mediante las trasformaciones, sean acciones reales o simbólicas, que el sujeto construye progresivamente su conocimiento. Esta construcción progresiva implica unas funciones invariantes y unas estructuras cambiantes” Piaget, J. (1973 p.482)

Ahora bien, se tiene claro que el profesor debe tener en cuenta las herramientas y actitudes que podrían favorecer al estudiante en el aprendizaje de las matemáticas por lo cual este debe llevar a cabo unas actividades específicas para lograr ese fin pero de la misma forma los estudiantes deben llevar a cabo otra actividades para contribuir a su conocimiento en donde se puede decir que cada parte cumple con unas obligaciones y en este sentido se estaría hablando de lo que se conoce como contrato didáctico, en donde existe una regulación de los derechos y obligaciones tanto de los estudiantes como de los profesores en donde se establece el tipo de aprendizaje que se va a llevar a cabo y las herramientas didácticas a utilizar "la actitud o forma de enseñar del profesor determinara las relación del alumno con la matemática". Godino, J.(1998)

Entonces para que el educador transmita el conocimiento matemático al estudiante, debe de realizar las respectivas transformaciones que considere adecuadas para adaptarlo progresivamente al conocimiento y capacidades del alumno y de esta forma le sea más fácil adquirir el conocimiento al educando. Chevallard indica que la transposición didáctica remite a la idea de una reconstrucción en las condiciones ecológicas del saber "un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de trasformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza". (1985, p.39).

2.3.2 La enseñanza del algebra geométrica desde la perspectiva didáctica.

El álgebra es una materia muy importante que aprenden los estudiantes de grado octavo y noveno en todas las instituciones educativas del país, pues ayuda a potenciar el pensamiento numérico-variacional el cual les permite a los estudiantes comprender que los símbolos como la *x* y la *y* se utilizan para representar números que varían y que las expresiones algebraicas se usan para encontrar lo que falta en problemas matemáticos, de física, en casos de la vida cotidiana y en relaciones que varían. Sin embargo, a pesar de ser una materia tan importante algunos docentes la enseñan de una manera muy tradicional, plana y poco atractiva para los estudiantes, pues el docente en este caso se encarga de resolver todo únicamente en el tablero, hace que sus estudiantes se aprendan las fórmulas y teorías de memoria y se apoya de los mismos ejercicios y talleres año tras año. Haciendo que los estudiantes realicen todo de manera mecánica, poco creativa y con escases de materiales en los que puedan representar sus aprendizajes de diferentes formas.

Un recurso didáctico que pueden implementar los docentes para la enseñanza del álgebra es “El álgebra geométrica” el cual es un juego que permite visualizar y representar por medio de material en concreto operaciones con números enteros, operaciones con expresiones algebraicas, productos notables, cocientes notables, ecuaciones, casos de factorización y sistemas de ecuaciones de primer grado y segundo grado. Según Piaget (1963) menciona que:

> El juego para el alumno es una herramienta que brinda posibilidades para explorar, crear e imaginar a través de la imitación y la representación simbólica, lo cual estimula las habilidades, en este caso del rompecabezas que se genera con el algebra geométrica como herramienta lúdica que permite el desarrollo intelectual y social de los alumnos. (p.23)

Por otro lado, para la enseñanza del álgebra es importante que los docentes hagan uso de las diferentes representaciones semióticas, las cuales son todos los signos y gráficos que permiten al alumno interactuar con el conocimiento matemático, ya que por este medio se puede registrar y representar las ideas que se tienen. Duval menciona que: “la utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática y para serle intrínseca” (2004, p.3). De acuerdo con lo anterior, las actividades matemáticas deben llevarse a cabo por medio de un sistema semiótico que acompañe el progreso del conocimiento que va de la mano con las condiciones de posibilidades generadas por herramientas didácticas para el aprendizaje, logrando la interacción con este material se afianzan los conceptos y se logra el cambio entre registros para facilitar la enseñanza del álgebra.

Para generar las condiciones de aprendizaje mencionadas anteriormente se hace referencia a las situaciones didácticas que plantea Brousseau, donde se menciona que los conocimientos matemáticos se construyen mediante la auto búsqueda de soluciones que se ponen en común con todos los alumnos, es decir, que el educador debe generar una situación didáctica cuya finalidad sea ayudar al alumno a adquirir el conocimiento deseado. Brousseau se refiere a las situaciones didácticas como “un conjunto de relaciones establecidas explícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un medio (que comprende instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido” (1982, p.21).

También es importante destacar la función que cumple el docente dentro del aula de clase, el cual debe generar estrategias para ayudar en un proceso de aprendizaje, generando una ruta que motive al estudiante, acompañándolo en la toma de decisiones y presentando la mayor cantidad de herramientas para crear un ambiente lúdico, de participación, y de interacción con otros y el propio material. (Área, 2010. p.16).

Es por esto, que el docente debe guiar y supervisar las actividades elaboradas por los estudiantes de tal manera que facilite el descubrimiento de un concepto a través del uso de materiales o herramientas para fomentar autonomía en la transferencia de los contenidos y pueda relacionar y argumentar con referencia a la solución de problemas que se propongan como actividad experimental, planteando distintos retos para encontrar un alumno más competente y pueda participar del proceso de aprendizaje.

Estándares Básicos de Competencia [EBC]

Por último, se hace referencia a los Estándares Básicos de Competencia tomando la pertinencia para grado octavo, pues a partir de ellos los docentes planean y orientan sus clases, con el fin de que los estudiantes alcancen los logros y aprendizajes que allí están estipulados. [EBC], (2006, p.87)

Pensamiento métrico y sistemas de medida.

- Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
- Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
- Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y análiticos.

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Uso proceso inductivos y lenguaje algebraico para formula y poner a prueba conjeturas.

2.3.3 El uso de las representaciones semióticas para la enseñanza de los trinomios

Anteriormente se han mencionado distintos roles y responsabilidades que tienen los docentes a la hora de enseñar álgebra, pero también es importante mencionar que los estudiantes deben cumplir con otras responsabilidades como: prestar atención a las explicaciones, participar, investigar, entre otros. Con el fin de que ellos sean participes de su proceso de aprendizaje al formular sus propias ideas, argumentaciones, explicaciones, demostraciones y conjeturas. Según esto Área (2010) afirma: […] “En la tarea de aprender nadie le puede sustituir: tiene que implicarse y esforzarse y tiene que aprender a autorregular su propio proceso de aprendizaje (aprender a aprender)” (p.17). En este sentido, se debe resaltar que en todo proceso educativo se requiere que el estudiante interactúe y se involucre con su proceso de aprendizaje siendo un medio importante la utilización del trabajo en equipo, mostrando interés por lo que va aprender, participando de las actividades propuestas en el aula, preguntando y generando conjeturas que le permitan entender el significado de un tema específico para adquirir las herramientas necesarias y poder tener mejores resultados de manera individual y grupal donde se relacionen esas ideas para optimizar estos conocimientos en la aplicación de modelos teóricos que la comprueben y se vea el progreso en la construcción de dichos conocimientos.

Por otra parte, el educador debe propiciar espacios y enseñarles a sus estudiantes prácticas de trabajo en equipo en donde puedan llegar a la solución de diferentes problemas y conflictos. Citando a (Johnson. D, Johnson. R ,1991,1992) se refuerza la idea que: “los grupos de base permiten que los alumnos entablen relaciones responsables y duraderas que los motiven a esforzarse en sus tareas, a progresar en el cumplimiento de sus obligaciones escolares y a tener un buen desarrollo cognitivo social” (p.6)

Como se mencionó anteriormente en la práctica de enseñanza de las matemáticas, es importante que el educador utilice el sistema semiótico de una forma adecuada evitando modificar el objeto mismo de aprendizaje para transmitir el conocimiento al educando de una manera asertiva sin confundir al estudiante, por tal motivo es fundamental que tanto el profesor como el estudiante dominen los sistemas semióticos. Fandillo, M. (2012) hace referencia que: “Existe un salto semiótico fuerte que nos lleva a pensar en la oposición entre realidad, modelo concreto, representación figural y objeto matemático” (p.99)

Todo lo expuesto confirma que el uso de las representaciones semióticas permite la comprensión de pasar de un lenguaje concreto a un lenguaje algebraico, esto facilita que el concepto sea entendible desde diferentes perspectivas, encontrando en los objetos matemáticos una misma representación convertida en distintos registros, logrando interiorizar una transformación del modelo en concreto a una representación figural, en este caso al lenguaje algebraico de los trinomios.

Duval (1999 citado en Morales y Sepúlveda, 2006, p.1) argumenta que: Los conceptos se van construyendo mediante acciones que impliquen el uso de diferentes representaciones ya sea de los conceptos mismos, de los elementos asociados a ellos o de los objetos matemáticos, así como la manipulación de estás para promover una articulación coherente entre ellos y sus representaciones. Durante esta investigación se emplearon herramientas en concreto que permiten el análisis gráfico y a su vez la conversión a un registro algebraico, lo que da por resultado la conceptualización de las reglas de los trinomios algebraicamente para los estudiantes de grado octavo, llevándolos a un proceso de conjetura donde ellos mismos construyen el conocimiento a partir del objeto matemático visto en el modelo *El álgebra es un juego*, herramienta proporcionada por el investigador.

3. Diseño Metodológico.

3.1 Descripción general del estudio

3.1.1 Enfoque de investigación

La presente investigación tendrá un enfoque cualitativo, ya que este permite recolectar datos no estandarizados, es decir, que no están predeterminados completamente sino que están relacionados con las perspectivas y puntos de vista que tienen los participantes, que en este caso serían los estudiantes de grado octavo de la I.E Liceo Mixto Sinaí; estos datos pueden ser (emociones, prioridades, experiencias, significados y demás aspectos subjetivos) relacionados con el estudio y aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, a este enfoque le resulta de gran interés conocer y comprender las relaciones e interacciones que se dan entre los participantes, lo cual se relaciona con esta investigación, pues es labor del docente observar, analizar y comprender: cómo aprenden mejor sus estudiantes las matemáticas, es decir, que estrategias didácticas funcionan y cuáles no, qué tipo de actividades despierta más su curiosidad e interés y cuáles les parecen aburridas y ¿por qué?, conocer a fondo sus habilidades, fortalezas y destrezas como también sus falencias, dificultades y necesidades.

Por último, el enfoque cualitativo, según Hernández Sampieri (2008) permite: "comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto" (p.425) Lo anterior es de gran relevancia para esta investigación, pues se busca conocer los puntos de vista y pensamientos que van surgiendo por parte de los estudiantes al entrar en contacto con las nuevas estrategias didácticas (álgebra geométrica) para la enseñanza de la factorización de trinomios, sin dejar a un lado la realidad y el contexto en que estos se desenvuelven cotidianamente.

3.1.2 Tipo de investigación

Esta investigación es de tipo descriptiva debido a que su objetivo es llegar a conocer situaciones, características y actitudes predominantes en un grupo de personas, en este caso se desea describir que actividades, métodos y estrategias ayudan a mejorar los procesos de factorización de trinomios en los estudiantes de la I.E Liceo Mixto Sinaí. Con base a lo anterior Arias (2012) afirma que:

> “La investigación descriptiva consiste en la caracterización de un hecho, fenómeno, individuo o grupo, con el fin de establecer su estructura o comportamiento. Los resultados de este tipo de investigación se ubican en un nivel intermedio en cuanto a la profundidad de los conocimientos se refiere” (p.24)

Por último, este tipo de investigación permite describir cuáles son las fortalezas y debilidades que tienen los estudiantes con respecto al aprendizaje del álgebra, ayuda a describir cómo fueron las clases en las que se implementaron nuevas estrategias didácticas para la enseñanza de la factorización y así mismo describir qué resultados se obtuvieron.

3.2.1 Población

Este proyecto se desarrolló con estudiantes de grado octavo, modalidad presencial, del Colegio Liceo Mixto Sinaí, el colegio posee ciclos académicos de preescolar, básica primaria, bachillerato y educación media, estudiantes con un rango de edad entre los 13 y 14 años, representan la población, la muestra tomada para realizar la investigación son los estudiantes de grado octavo A, conformado por 39 estudiantes.

La muestra de esta investigación será de participantes voluntarios pues todos los estudiantes de grado octavo de la I.E Liceo Mixto Sinaí participan de manera voluntaria en el proyecto de investigación propuesto en la práctica pedagógica y en las actividades de aula. Además, porque los instrumentos no son estructurados sino creación de autoría propia por parte del autor de esta investigación.

3.2.2 Estructura metodológica

Como primera medida se busca reconocer los conocimientos previos que tienen los estudiantes en operaciones algebraicas y conceptos geométricos de perímetro y área. Para esto se desarrolla una prueba diagnóstica la cual puede visualizarse en el apéndice A

Se usarán dos tablas para diferenciar las respuestas del pensamiento métrico y del pensamiento numérico variacional, cada una de ellas compara el número de respuestas acertadas y no acertadas.

En la tabla 1, se observan las preguntas relacionadas con el pensamiento métrico.

Tabla 1. Resultados para prueba diagnóstica pensamiento métrico.

Grado	Pensamiento Métrico										
Preguntas	1	2	3	6	8.1	8.2	8.3	11.1	11.2	11.3	11.4
Acertadas											
No acertadas											
Total participantes											

En la tabla 2, se observan las preguntas relacionadas con el pensamiento numérico variacional.

Tabla 2. Resultados para prueba diagnósticapensamiento variacional.

Grado	Pensamiento Numérico-Variacional													
Preguntas	4.1	4.2	4.3	5	7	9	12.1	12.2	13.1	13.2	13.3	13.4	13.5	13.6
Acertadas														
No acertadas														
Total participantes														

En segundo lugar, se desea desarrollar una estrategia didáctica basada en el álgebra geométrica que ayude a fortalecer los procesos de factorización de trinomios. Para esto el autor de la investigación elaboró un taller de actividades didácticas el cual puede visualizarse en el Apéndice B.

En tercer lugar, se desea implementar la estrategia didáctica basada en el álgebra geométrica que ayude a fortalecer los procesos de factorización de trinomios. Para esto el autor de la investigación aplica el taller didáctico con los estudiantes de grado 8.1 y 8.2 en las clases de práctica pedagógica. De este trabajo se tienen evidencias fotográficas las cuales se pueden encontrar en el Apéndice C.

En último lugar, se desea validar los resultados obtenidos con la implementación de la estrategia didáctica para potenciar la factorización de trinomios. Para esto se desarrolla un cuestionario de 6 preguntas abiertas que se puede encontrar en el apéndice D.

3.5 Fases de la investigación

Iniciación: Como primera medida se busca reconocer los conocimientos previos que tienen los estudiantes en operaciones algebraicas y conceptos geométricos de perímetro y área. Para esto se desarrolla una prueba diagnóstica.

Diseño: En segundo lugar, se desea desarrollar una estrategia didáctica basada en el álgebra geométrica que ayude a fortalecer los procesos de factorización de trinomios. Para esto el autor de la investigación elaboró un taller de actividades didácticas en el cual los estudiantes adquieren los siguientes aprendizajes a través de la aplicación de la estrategia "El álgebra Geométrica"

- Hallar el perímetro y área de cuadrados y rectángulos haciendo uso de expresiones algebraicas.
- Construcción del material en concreto "El álgebra es un juego" en la que se pone a prueba el pensamiento métrico-espacial y el trabajo colaborativo por parte de los estudiantes.
- Uso correcto del material (reglas y normas), introducción al concepto de factorización por medio del álgebra geométrica y descomposición de números en factores primos.
- Factorización de un trinomio cuadrado perfecto a través del uso del álgebra geométrica.
- Factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ a través del álgebra geométrica.
- Factorización de un trinomio de la forma $\mathrm{A}x^2 + bx + c$ a través del álgebra geométrica.

Implementación: En tercer lugar, se desea implementar la estrategia didáctica basada en el álgebra geométrica que ayude a fortalecer los procesos de factorización de trinomios. Para esto se llevan a cabo las clases durante la práctica pedagógica, aplicando el taller realizado por el autor de la investigación, con el cual se enseña la factorización de trinomios por medio del álgebra geométrica. De estas actividades se tienen evidencias fotográficas.

Validación: En ultima estancia se desea Validar la incidencia de los resultados obtenidos con la implementación de la estrategia didáctica para potenciar la factorización de trinomios. Para esto se diseñó un cuestionario con 6 preguntas abiertas, donde los estudiantes describen cómo les pareció la aplicación del juego el álgebra es un juego para comprender los conceptos de factorización de trinomios.

4. Resultados y discusión.

Los resultados arrojados han sido considerados a partir de un cuestionario inicial, aplicado en el grado 8.1 y 8.2, el cual consta de 26 preguntas que están relacionadas con el pensamiento numérico variacional y el pensamiento métrico con el fin de conocer los saberes que tienen los estudiantes con respecto a operaciones algebraicas elementales, máximo común divisor, productos de expresiones algebraicas, perímetros y áreas de expresiones algebraicas, entre otras. Posterior a esto se llevaron a cabo unas clases en las cuales se implementó la estrategia didáctica "El álgebra geométrica" donde los estudiantes crearon su propio material para representar la solución de ejercicios que se resuelven a partir de la factorización del trinomio cuadrado perfecto, el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y el trinomio de la forma $Ax^2 + bx + c$ el cual les permitia pasar de un lenguaje grafico a un lenguaje abstracto. Finalmente se realizó un cuestionario de validación el cual constaba de 6 preguntas para conocer incidencia de los resultados obtenidos con la implementación de la estrategia didáctica para potenciar la factorización de trinomios.

4.1 Resultados prueba diagnóstica

En el grado 8° se desarrolla un cuestionario inicial que deja entrever los conocimientos con que cuentan los estudiantes, como operaciones algebraicas elementales, máximo común divisor, productos de expresiones algebraicas, perímetros y áreas de expresiones algebraicas, entre otras.

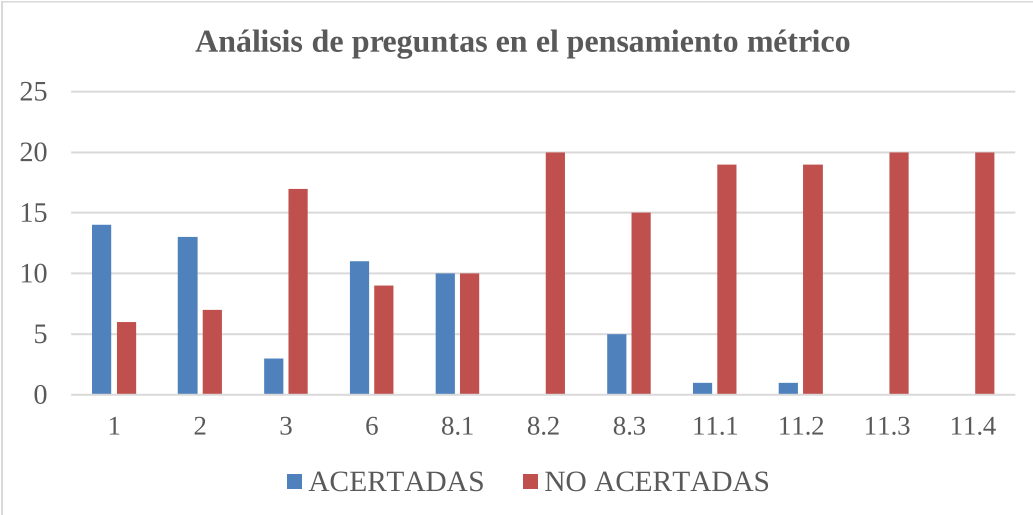
Durante la aplicación de la prueba, se reconoce que muchos de los temas mencionados anteriormente ya deben haber sido adquiridos y aprendidos, teniendo así, un aprendizaje significativo, por lo que se puede comprender situaciones problemas que involucren aspectos algebraicos para su respectiva solución, no obstante, se evidencian barreras y muchas falencias en esos aprendizajes, que obstaculizan los nuevos conocimientos, debido a que no permite avanzar en el proceso y por el contrario, se debe iniciar desde cero para cerrar la brecha de esos aprendizajes no adquiridos en años anteriores, recordando que este tiempo es de postpandemia, por lo que se puede percibir muchos vacíos conceptuales en los estudiantes de grado 8°.

La prueba está diseñada a partir de los pensamientos métrico y variacional, encontrándolos clasificados por preguntas donde son valoradas como acertadas o no acertadas, teniendo un total de 26 preguntas.

En la figura 4, se presentan los resultados de los 20 estudiantes de 8°1 con respecto al pensamiento métrico, donde algunos estudiantes comprenden expresiones algebraicas, sus términos y la reducción de términos semejantes, reconocen el concepto de área y perímetro, pero al momento de calcularlo algebraicamente se dificultan algunos procesos operacionales, por lo que es necesario reforzar operaciones con productos de expresiones algebraicas.

Geométricamente se les dificulta reconocer como hallar el área de figuras compuestas, teniendo en cuenta que se debe fortalecer el pensamiento métrico para comprender situaciones que lleven al estudiante a modelar a partir de contextos que requieran la aplicación del álgebra.

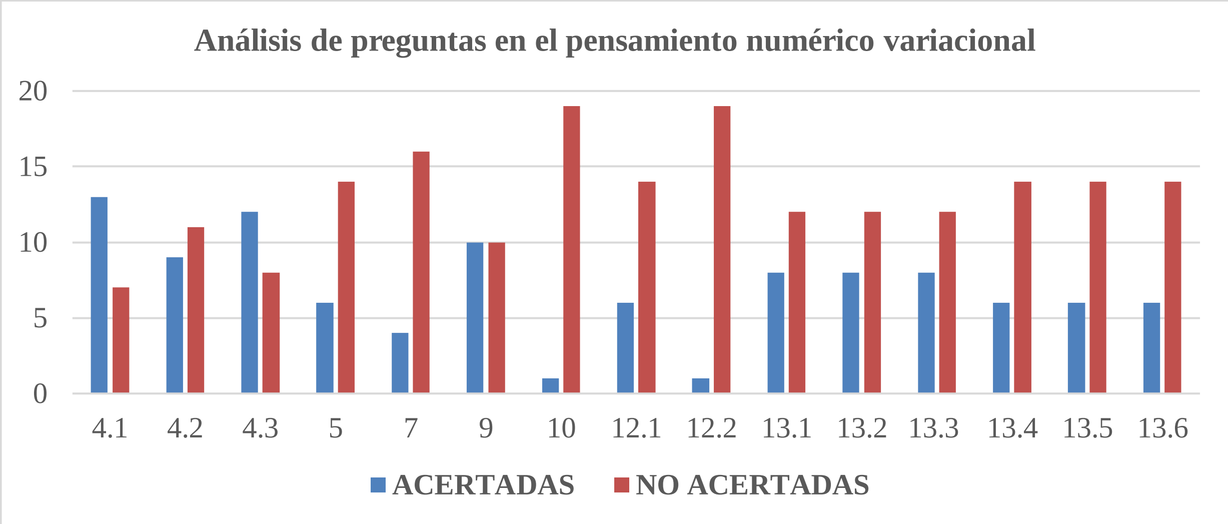
Figura 4. Resultados pensamiento métrico 8°1



Nota: Resultados prueba diagnóstica 8°1, en el pensamiento métrico

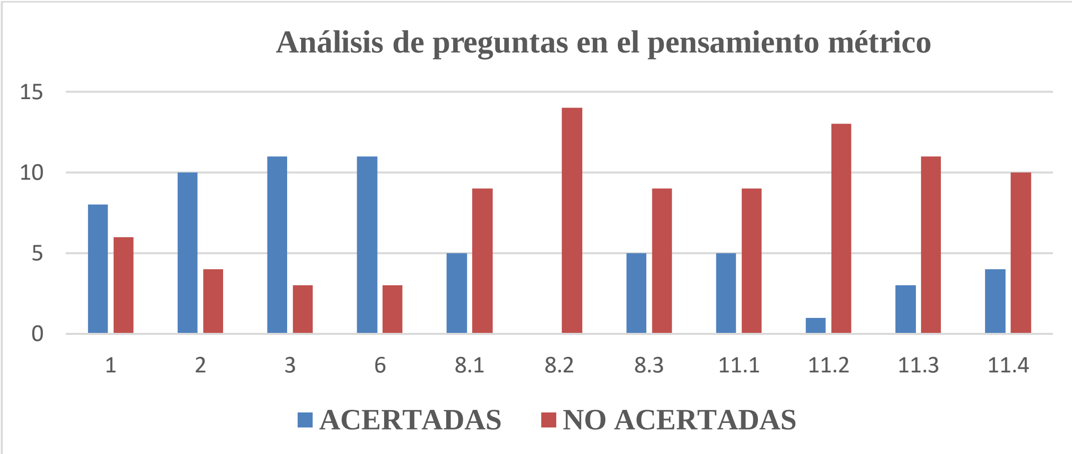
En la figura 5, se muestran los resultados de los 20 estudiantes de 8°1 con respecto al pensamiento numérico variacional, algunos de ellos comprenden el proceso de descomposición para hallar el M.C.D entre dos números, reconocen el proceso de multiplicación de un monomio por un binomio, pero se les dificulta la multiplicación entre binomios, por lo que es necesario reforzar operaciones básicas con expresiones algebraicas. Por otra parte, algunos estudiantes reconocen las propiedades de los exponentes cuando se multiplican bases iguales, pero se les dificulta la división de números y de bases iguales en donde los exponentes se deben restar. Para finalizar, la mayoría de los estudiantes tienen claro el concepto de raíz cuadrada, pero se debe profundizar en el concepto de raíz cubica.

Figura 5. Resultados pensamiento variacional 8°1



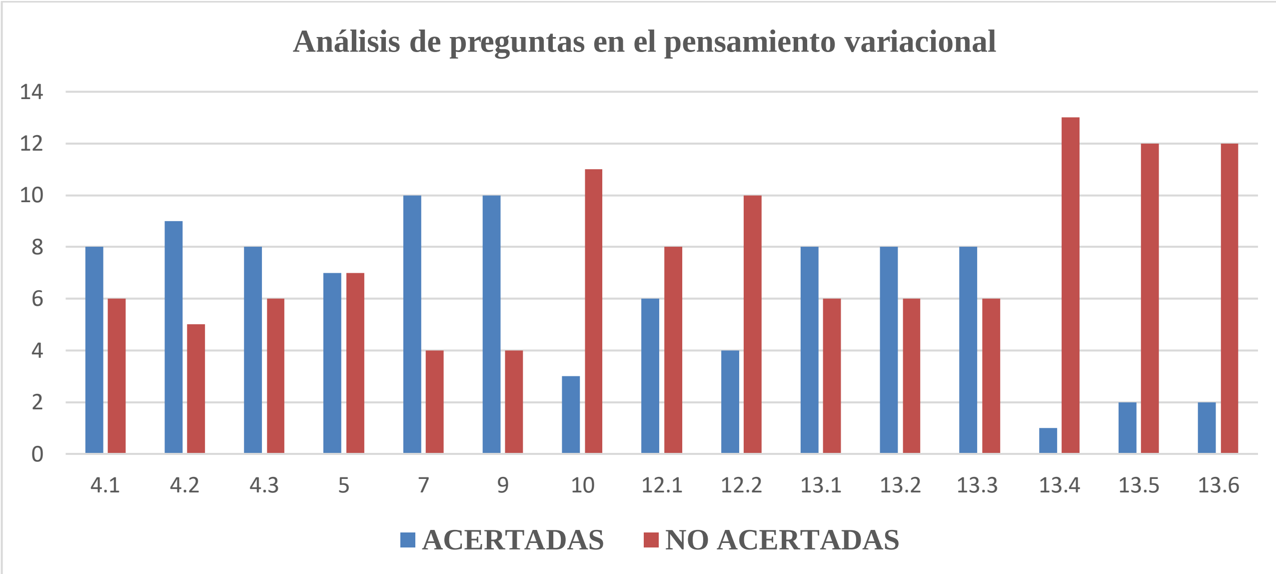
En la figura 6, se presentan los resultados de los 14 estudiantes de 8°2 con respecto al pensamiento métrico, donde la mayoría de los estudiantes comprenden el concepto de área y perímetro de cuadrados y rectángulos. También en su mayoría hacen uso del producto notable (cuadrado de un binomio) para hallar el área de un cuadrado. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no conocen la fórmula para hallar el área de un triángulo y otras figuras geométricas. Por lo que es necesario trabajar más desde la parte geométrica para que conozcan como hallar el área y el perímetro de otros polígonos diferentes al cuadrado y al rectángulo en los que la medida de sus lados son expresiones algebraicas y en ejercicios donde las figuras pueden ser compuestas.

Figura 6. Analisis de preguntas pensamiento métrico 8.2



En la figura 7, se muestran los resultados de los 14 estudiantes de 8°2 con respecto al pensamiento numérico variacional, donde la mayoría comprenden el proceso de descomposición de números para hallar el M.C.D entre dos o más números, reconocen el proceso de multiplicación de un monomio por un binomio, saben elevar al cuadrado números naturales y comprenden el concepto de raíz cuadrada. Sin embargo, se debe trabajar más con los estudiantes el proceso de multiplicación de binomios, la multiplicación y división de variables con exponentes y el concepto de raíz cubica.

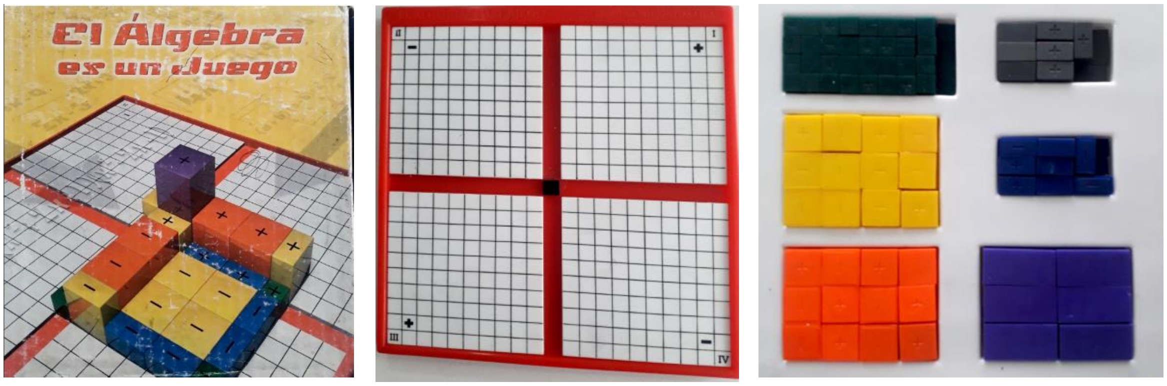
Figura 7. Analisis de preguntas del pensamiento variacional 8.2



4.2 Diseño e implementación de la estrategia.

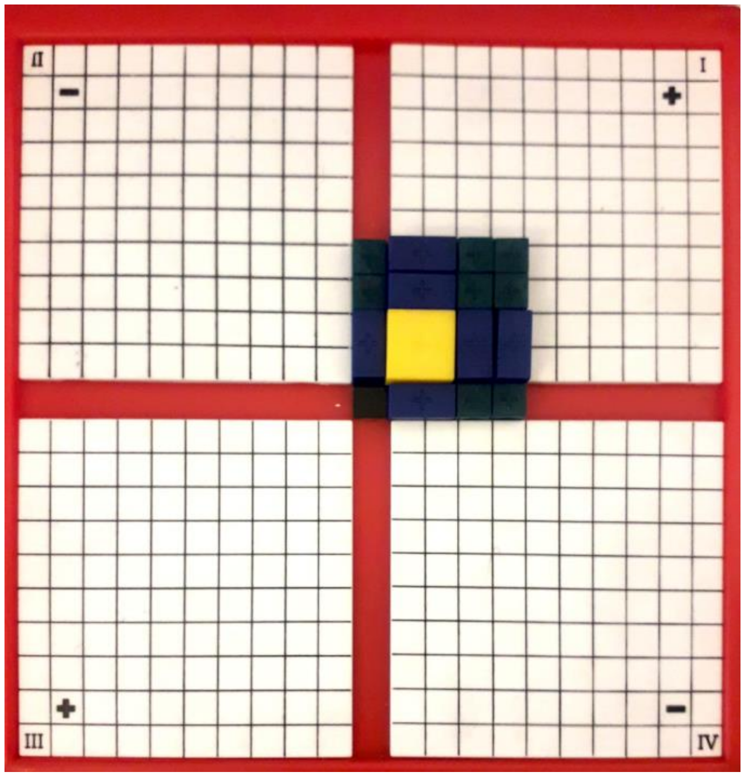
Durante el proyecto investigativo se diseñó un material didáctico llamado ¨El álgebra es un juego¨ el cual trata de un juego compuesto por un tablero que representa el plano cartesiano con los ejes ampliados y un conjunto de fichas. Este material fue creado por Acevedo, H. (2021) y tiene como objetivo comprobar geometricamente conceptos algebraicos, en este caso la factorización de trinomios. A continuación se anexan las imágenes del material.

Figura 8. Material didáctico "El álgebra es un juego".



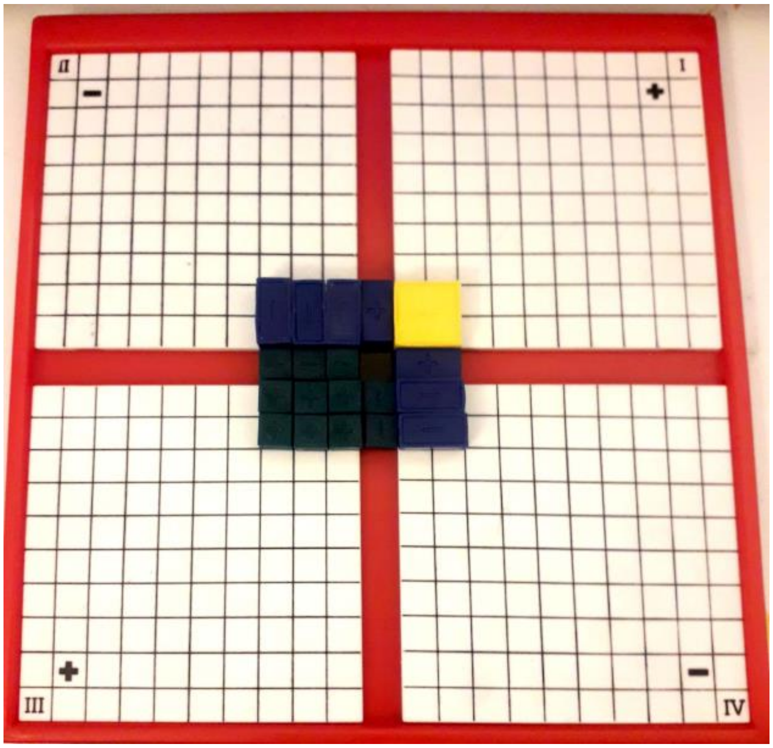
En la sesión #04 los estudiantes ya tenian elaborado su propio material, por lo tanto se procedio a enseñarles las reglas de los colores, las cuales consisten en que: Si se multiplica una ficha verde por otra verde da como resultado verde, dado que 1x1 es 1. Al multiplicar una ficha verde por una azul el resultado es azul, dado que $1. x = x$. Y al multiplciar una ficha azul por una azul el resultado es una ficha amarilla, pues $x. x = x^2$. Los estudiantes comprendieron esta regla y la aplicaron con el material. Tambien se les enseño que los factores se ubicaban en las canaletas rojas y que el producto se ubica en los 4 cuadrantes ampliados del plano cartesiano. Durante esta sesión los estudiantes estuvieron muy motivados, se podría decir que fue la sesión donde más participaron pues me preguntaron con más insistencia para comprobar si sus resultados estaban correctos en comparación a clases anteriores donde solo se hacia uso del cuaderno. Con esta sesión los estudiantes comprendieron y observaron la formula para hallar el cuadrado de un bonomio, la cual es: El primer termino al cuadrado, más 2 veces el primer termino por el segundo, más el segundo termino al cuadrado. Y lo conectaron con los pasos para factorizar un cuadrado perfecto, los cuales son: sacar la raiz cuadrada al primer y tercer termino y multiplicar estas raices por dos para verificar si se obtenia el termino del medio y así poder dar como respuesta dentro de un parentesis elevado al cuadrado la suma o resta de estás raices dependiendo del signo del segundo termino. A continuación se muestra una imagen de la solución del trinomio $x^2 + 4x + 4$ realizada por un grupo de estudiantes durante esta sesión, la cual dio como resultado $(x + 2)^2$ ó $(x + 2).(x + 2)$.

Figura 9. Solución geometrica de un trinomio cuadrado perfecto.



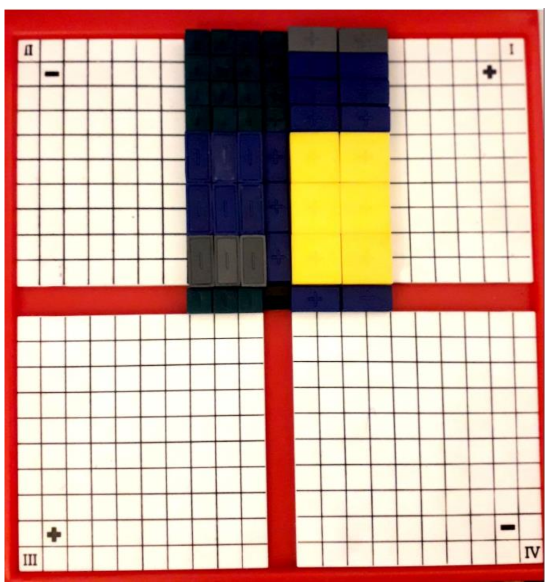
En la sesión #05 se procedio a enseñar la factorización del trinomio de la forma $x^2 + bx + c$. En la cual los estudiantes ya tenian mucho más claro como ubicar las fichas dentro de los cuadrantes y canaletas para hallar la solución a los ejercicios. Los estudiantes en esta sesión primero realizaron el proceso de factorización como se les habia enseñado en el cuaderno y luego ubicaron y comprobaron la respuesta haciendo uso del material en concreto. Durante esta sesión tambien hubo participación activa por parte de los estudiantes, se noto el trabajo en equipo y las ganas de entregar los ejercicios propuestos por el docente. A continuación se observa la solución del trinomio $x^2 - 5x + 6$ realizada por un grupo de estudiantes, en la que su respuesta fue $(x-3).(x-2)$. En la imagen se puede observar que en el cuadrante I se obtuvo x^2, en el cuadrante II el cual es negativo se obtuvo – 3x y en el cuadrante IV que tambien es negativo se obtuvo – 2x, por lo tanto al ser terminos semejantes se pueden sumar dando como resultado – 5x y por último en el cuadrante III el cual es positivo se obtuvo + 6. Lo cual quiere decir que la respuesta es correcta.

Figura 10. Solución geometrica de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.



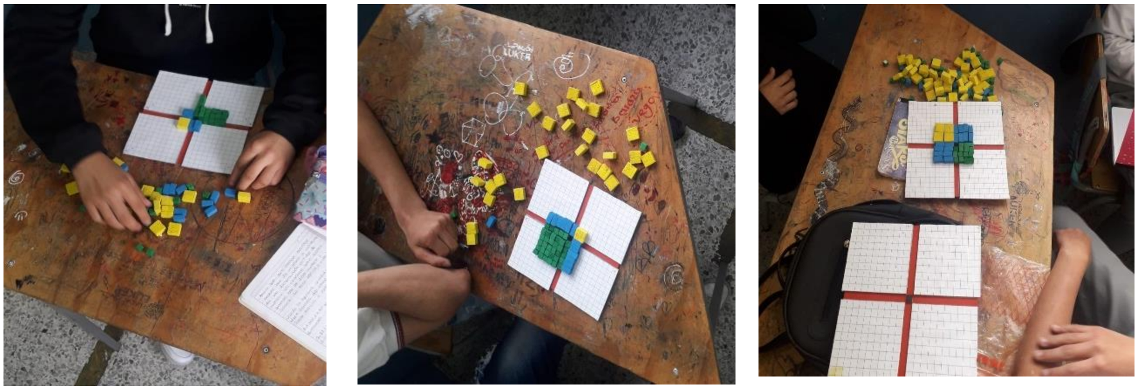
En la sesión #06 se le enseño a los estudiantes a factorizar el trinomio de la forma $Ax^2 + bx + c$ haciendo uso del material en concreto. Los estudiantes se ubicaron por grupos, y escogieron factorizar 3 de los 5 ejercicios que propuso el profesor, y luego ellos se inventaron 2 ejercicios en los que debian de dar la solución con el material y en el cuaderno. Pasando así del lenguaje abstracto al concreto y viceversa. Esta fue la última sesión, los estudiantes trabajaron muy concentrados, motivados por realizar la actividad propuesta y al final todos mostraron la solución de sus ejercicios, acontecimientos que no sucedian cuando se les proponia desarrollar actividades que solo podian realziar en sus cuadernos. A continuación se muestra una imagen de la solución del trinomio $6x^2 - x - 12$ realizada por un grupo de estudiantes, en la cual se puede observar que en el cuadrante I que es positivo quedaron 6 x^2 + 8x y en el cuadrante II que es negativo quedaron $-9x$ – 12. Como 8x y $-9x$ sont erminos semejantes, se realiza la operación y se obtiene $-x$. Y en las canaletas rojas se obtiene la solución del trinomio la cual es $(2x - 3).(3x + 4)$.

Figura 11. Solución geometrica de un trinomio de la forma $Ax^2 + bx + c$



En la figura 12, puede apreciarse el registro fotográfico desarrollado con el material por parte de los estudiantes, empleando la estrategia didáctica que favorece la comprensión del trinomio y facilita la generalización en los resultados.

Figura 12. Evidencias fotográficas, implementación de la estrategia didáctica.



4.3 Validación cuestionario de salida.

En la última sesión con los estudiantes de 8.1 y 8.2 se realizó un cuestionario de salida, para validar la incidencia de los resultados obtenidos con la implementación de la estrategia didáctica para potenciar la factorización de trinomios. El cuestionario constaba de 6 preguntas. A continuación, se realizará una descripción general de la respuesta que dieron los 18 estudiantes del grado 8.1 y los 9 estudiantes del grado 8.2 que asistieron este día a clases.

Primera pregunta: ¿Cómo te parecieron las clases en las que se hizo uso del material en concreto para comprender el proceso de factorización de trinomios? ¿Por qué?

La mayoría de los estudiantes en esta pregunta respondieron que les pareció una forma más creativa, entretenida, dinámica y divertida de aprender álgebra, ya que podían trabajar en equipo, algunos respondieron que les gustó porque resolver los ejercicios de esta forma era un reto para ellos lo cual los motivaba ya que les gusta ser competitivos, también respondieron que les encantó las clases pues no todo se tiene que enseñar por medio del tablero y el cuaderno. Por último, respondieron que les gustaba más atender a las explicaciones del profesor pues este hacia representaciones gráficas y no solo dictabas pasos y contenidos memorísticos.

Segunda pregunta: ¿Cómo se te hizo más fácil comprender el proceso de factorización de trinomios, haciendo uso del material en concreto o con las explicaciones y ejercicios que se realizaban solo en el cuaderno? ¿Por qué?

En esta pregunta todos los estudiantes respondieron que se les hizo más fácil comprender el proceso de factorización por medio del material en concreto pues así sentían que prestaban más atención, sentían que el tema se explicaba y se entendía mejor gracias a las representaciones geométricas, algunos dicen que los objetos matemáticos eran más entendibles que los números y letras que se escribían en el tablero, otros dicen que les gusto aprender por medio del material pues no se aburrieron y se sintieron integrados y tenidos en cuenta durante las actividades. También respondieron que el material les facilito a comprender operaciones algebraicas como la multiplicación entre binomios y suma de términos semejantes, otros respondieron que con el material pudieron jugar y compartir más con sus compañeros. Por último, para algunos estudiantes fue mejor trabajar con el material ya que así podían ordenar las fichas a su manera, podían tomar diferentes rutas para llegar a la respuesta y así el trabajo era más autónomo llevándolos a crear sus propias conclusiones y conjeturas.

Tercera pregunta: ¿Crees que el uso de material en concreto favorece a la comprensión de conceptos matemáticos? ¿Por qué?

En esta pregunta, todos los estudiantes respondieron que el uso de material en concreto si favorece a la comprensión de los conceptos matemáticos pues les parece que de esta forma es más sencillo, fácil y dinámico aprender matemáticas. Algunos respondieron que los ejemplos que se dan con el material son más entendibles que los que se dan en el cuaderno. Otros estudiantes respondieron que les gustaría que los demás profesores también hicieran uso de materiales para enseñarles. Por último, algunos estudiantes respondieron que el uso de material en concreto era más práctico para poner a prueba sus conocimientos y que las actividades de este tipo eran más allegadas a la realidad.

Cuarta pregunta: ¿Crees que el uso de representaciones gráficas y algebraicas te ayudo a comprender de una mejorar manera el proceso de factorización de trinomios? ¿Por qué?

Todos los estudiantes respondieron que el uso de representaciones gráficas les ayudo de forma notable a comprender el proceso de factorización, pues así podían comparar si las respuestas que realizaban en su cuaderno estaban correctas, algunos respondieron que a través de la multiplicación de los lados en el plano cartesiano podían hallar el área de los cuadrados y rectángulos y que así era mucho más fácil entender el proceso de factorización. Otros respondieron que les gusto el trabajo con representaciones gráficas pues podían proponer sus propios ejercicios y así las clases no eran tan monótonas. Por último, hay estudiantes que respondieron que debido a que son más kinestésicos el manejo y orden del material les favoreció a realizar mucho de una manera más clara y rápida los ejercicios propuestos en clase.

Quinta pregunta ¿Consideras que es importante que se sigan aplicando este tipo de estrategias didácticas para la enseñanza del álgebra y otros aprendizajes matemáticos? ¿Por qué?

En esta pregunta todos los estudiantes respondieron que si es importante que se sigan aplicando estas estrategias para la enseñanza de las matemáticas pues no todas las personas aprenden de la misma manera, y el uso del material favorece el trabajo en equipo, la observación, la manipulación de objetos, la comunicación asertiva entre ellos mismos y con el docente, entre otras. Otros estudiantes respondieron que si es importante la implementación del material en concreto pues les aburre escribir siempre en el cuaderno. Por último, los estudiantes consideran que los docentes deben hacer uso de diferentes estrategias didácticas para enseñar un tema pues esto ayuda a que las clases sean más amenas y el tiempo se pase más rápido.

Sexta pregunta: ¿Cómo te sentiste en las clases donde se hizo uso del material en concreto para comprender el proceso de factorización de trinomios?

En esta pregunta algunos estudiantes respondieron que se sintieron muy bien ya que el ambiente de clase cambio, pues el profesor no tenía que regañar tanto pues todos estaban más concentrados en el trabajo y porque se les dejaba trabajar en equipo lo cual es algo que a ellos les gusta. Por último, algunos estudiantes respondieron que se sintieron alegres y motivados en las clases pues por medio del material en concreto comprendían mejor los tres tipos de factorización de trinomios y pudieron participar más de las clases, contrario a lo que sucedía cuando solo se hacía uso del cuaderno.

4.4 Análisis de la implementación vs la teoría de las múltiples representaciones

Durante el desarrollo de la investigación se puede evidenciar la utilidad de las teorías didácticas en relación con el instrumento diseñado y aplicado en el aula de clase. En la tabla 3, se presenta la matriz donde se hace tensión a la teoría de las representaciones semióticas descritas en Duval (2006) donde expresa el uso de las representaciones semióticas y su cambio didáctico en la transformación de los contenidos y por qué se usó vs lo expuesto por Fandiño (Citarla y escribir lo que expone)

Tabla 3. Tensión entre la teoria y la aplicación del instrumento.

	Registro verbal	Registro gráfico	Registro Algebraico
Modelo concreto	El lenguaje propio de las matemáticas permite al estudiante desarrollar a partir de elementos y propiedades la construcción de figuras geométricas, a través de medidas que quedaron plasmadas en el material en concreto.	Al estudiante con anterioridad se le daban explicaciones y ejemplos, usando la pizarra y material tangible para la construcción de un modelo visual que le permitiera observar el desarrollo y solución de un ejercicio de la factorización.	El estudiante al usar el material en concreto pudo reconocer el significado existente entre la manipulación de las figuras con un lenguaje algebraico, logrando una conversión entre los registros.
Representación figural	El estudiante comprende a través del lenguaje verbal lo que se le pide representar con el material en concreto, se evidencia mejor comprensión del lenguaje algebraico y se observa un progreso en el desarrollo de ejercicios que se resuelven a través de la factorización de trinomios.	La figura permite que el estudiante comprenda el significado de área, perímetro y volumen. También permite que el estudiante visualice los términos de la multiplicación como lo son: los factores y el producto observados en el plano propuesto donde en la canaleta se representaban los factores y en los cuadrantes se representaba el producto.	La manipulación de objetos y representaciones gráficas le permite al estudiante plasmar en su cuaderno lo que está haciendo o modelando y le facilita hacer uso de diferentes lenguajes (abstracto y concreto) para dar a conocer lo que sabe, proporcionado al docente nuevas herramientas para generar un aprendizaje activo y significativo en los estudiantes

5. Conclusiones y recomendaciones.

5.1 Conclusiones

El álgebra geométrica realmente favoreció a que los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí fortalecieran los procesos de factorización de trinomios debido a que sus respuestas, procedimientos y resultados mejoraron notablemente cuando trabajaron y se apoyaron del material en concreto pues con este podían hacer cambios de representación, trabajar en equipo, proponer sus propios ejercicios y comprobar si los procedimientos que habían realizado estaban correctos lo cual contribuía a un aprendizaje más autónomo y significativo.

El uso del material permitió que los estudiantes comprendieran conceptos tan simples como que x.x es x^2, que $\frac{x^3}{x} = x^2$, que $-7+5=-2$, que $(-3).(5)=-15$, entre otros. Lo cual no comprendían o no recordaban cuando se hacía uso únicamente del cuaderno, con el material también se reforzaron temas como la agrupación de términos semejantes ya que los colores de las fichas y los cuadrantes del plano cartesiano permitían que este proceso fuera más rápido y evidente para los estudiantes. Los estudiantes constantemente manifestaban su gusto e interés por trabajar con los objetos matemáticos ya así las clases les parecían más amenas y divertidas.

La aplicación de los sistemas de representación semiótica favorece a la enseñanza de la factorización de trinomios debido a que los estudiantes pueden hacer cambios de registros, es decir, pasar del lenguaje abstracto al geométrico y viceversa, dotando de herramientas al estudiante para que pueda manifestar los conocimientos y aprendizajes adquiridos en clase.

5.2 Recomendaciones

Se recomienda que los docentes que orientan el área de álgebra en el grado octavo hagan uso del material en concreto “El álgebra es un juego” ya que a través de este se pueden enseñar varios temas como lo son: Operaciones con números enteros, operaciones con expresiones algebraicas, productos y cocientes notables y los casos de factorización. Este material lo pueden elaborar los estudiantes con implementos de papelería y no es costoso conseguir estos materiales.

Se recomienda que los docentes hagan uso de diferentes estrategias para la enseñanza de las matemáticas, no solo el uso del material en concreto, también el uso de videos, laboratorios, consultas, juegos, proyectos y exposiciones para que así la educación evolucione y los aprendizajes adquiridos en clase sean más aplicables a la vida real.

Se recomienda a futuros investigadores que realicen su proyecto investigativo en barrios o comunas vulnerables de la ciudad que las actividades que planeen sean concretas y claras ya que los estudiantes tienden a dispersarse más rápido, también se les recomienda ser pacientes, cariñosos y empáticos con sus alumnos pues la realidad que estos viven no es la misma a la que se observa en otros lugares de la ciudad.

Se recomienda a los docentes de matemáticas potenciar más el pensamiento métrico espacial, pues desde la geometría se pueden hacer diferentes representaciones de contenidos conceptuales, lo cual puede ser más llamativo para los estudiantes y ayudará a que estos comprendan características y propiedades matemáticas desde diferentes puntos de vista.

Lista de Referencias

Área, M., Parcerisa, A. y Rodriguez, J. (Coords) (2010). *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios.* Ed: Grao.

Ausubel, D. (1983) Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo. 2° Ed. TRILLAS México.

Ballén, J. (2012) *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado*. Tesis. Universidad Nacional de Colombia.

Brousseau, G. (1997) *Los diferentes roles del maestro en: Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Paidos, México, pp.65-94.

Constitución Política de Colombia [Const]. Art. 44. 7 de julio de 1991 (Colombia).

Chevallard, Y. (1985) *La transposición didáctica; del conocimiento erudito al conocimiento enseñado*. París, La Pensée Sauvage.

Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas. [DBA]. MEN (2015).

Duval, R (2004) Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Cali. Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía. Grupo de educación matemática.

Estándares Básicos de Competencias Matemáticas. [EBC]. MEN (2006).

Fandiño, M. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Prefacio de Giorgio Bolondi. Bogotá. Magisterio.

Godino, J. et al (2004) *Didáctica de las Matemáticas para maestros*. Universidad de granada. GAMI, S. L. Fotocopias Avda. de la Constitución.

Herrera, R (2012) *El álgebra geométrica en el proceso de la factorización de trinomios cuadráticos*. Tesis. Universidad del Atlántico. Colombia.

Jiménez & Salazar (2013) *Tabletas Algebraicas como una alternativa de enseñanza del proceso de factorización de algunos polinomios de segundo grado*. Universidad Pedagógica Nacional. Fac. Cien y Tec.

Johnson. D, Johnson. R. (1991,1992). *El Aprendizaje Cooperativo en el Aula*. Association For Supervision and Curriculum Development, Virginia.

Kline, M. (1992) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* España: Alianza editorial.

Ley General de Educación 115 [L.G.E]. Art. 1, Art. 5. 8 de febrero de 1994 (Colombia).

Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Santa Fé de Bogotá D. C. Julio de 1998. MEN.

Marín Acosta et al. (2017) *Promover la importancia del uso de material en concreto en primer ciclo básico.* Tesis. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Fac. Educ.

Morales, M. (2008). *La factorización de polinomios, una experiencia docente*. Tesis. Universidad Autónoma de Santo Domingo. Fac. Educ.

Navarrete, J.P. (2017*) Importancia de los materiales didácticos en el aprendizaje de las matemáticas*. Tesis. Universidad de Jaén. Fac. Cien.

Palacios et al (2018) *El álgebra geométrica como herramienta fundamental en el proceso de factorización polinómica*. Tesis. Universidad Cooperativa de Colombia. Medellín. Fac. Cien.

Rodríguez, W. (1999) *El legado de Vigotski y de Piaget a la educación. Revista Latinoamericana de Psicología*. Volumen 31 N°3 P. 477-489.

Tanca (2000) *Influencia del uso de material concreto en el proceso de enseñanza aprendizaje en estudiantes de primer año básico, en la asignatura de matemática*. Tesis. Universidad Andres Bello. Fac. Educ. Chile.

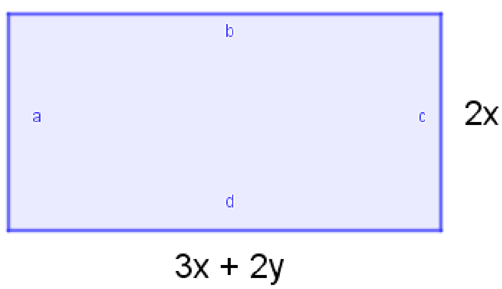
Apéndices

Apéndice A. Prueba diagnóstica

ACTIVIDADES PARA DESARROLLAR:

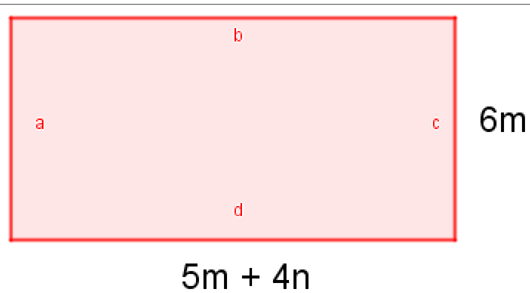
- Lea con atención cada ítem y de respuesta en el espacio en blanco.

1. Hallar el perimetro del siguiente rectángulo

	Argumente en este recuadro la forma cómo hallaría la respuesta de este ejercicio:

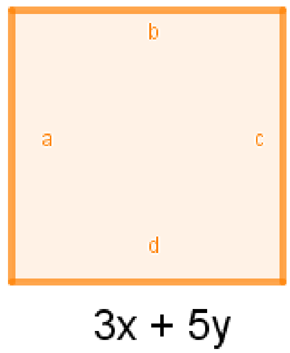
R: Perímetro: _______________

2. Hallar el área del siguiente rectángulo.

	Argumente en este recuadro la forma cómo hallaría la respuesta de este ejercicio:

R: Área: ____________________

3. ¿Cómo hallaría el área del siguiente cuadrado haciendo uso del producto notable correspondiente?

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Argumente en este recuadro la forma cómo hallaría la respuesta de este ejercicio:</td>
</tr>
</table>

R: Área: ____________________

4. Hallar el M.C.D de los siguientes números.
a. 18 y 21
b. 42 y 35
c. 129 y 75

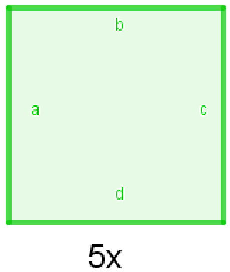
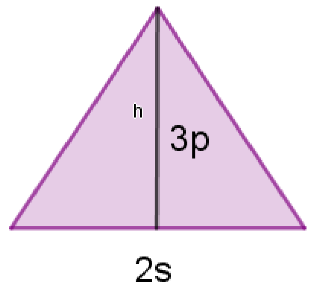
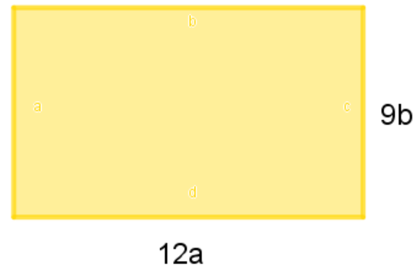
- Lea con atención cada ítem y justifique tomando una opción como respuesta correcta.

5. De las siguientes expresiones ¿Cual es la incorrecta?
a. $-3 + (4^2 + 2) = 15$
b. $(6 + 4)^2 = 52$
c. $(3^2 + 5^2) = 34$

6. El área del rectángulo cuya base mide 6m y la altura 8m. es:
a. $36m^2$
b. $54m^2$
c. $48m^2$

7. La expresión $8^2 + 4^2$ es igual a:
a. $64 + 16$
b. $16 + 8$
c. $(8 + 4)^2$

8. Escriba una expresión para calcular el área de las siguientes figuras.

		
A=	A=	A=

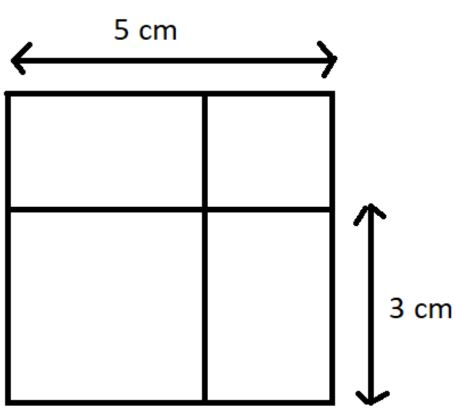
9. Encuentre el producto de $7(2n + 5m)$

R: ______________

10. Encuentre el producto de $(3x + 2y)(4x - 2y)$

R: ______________

11. De acuerdo con la figura halla lo que te piden:



a. Área del cuadrado pequeño que esta dentro de la figura:
b. Área del cuadrado mediano que esta dentro de la figura:

c. Área de los rectángulos:
d. Área del cuadrado grande:

12. Realice las siguientes operaciones, teniendo en cuentas las normas de los exponentes.

a. $x^6 . x^3 . y^2 . y =$

b. $\frac{8\ m^4 . n^5}{4\ m^2 . n} =$

13. Halle las raíces de los siguientes números.

a. $\sqrt{64} =$

b. $\sqrt{25 =}$

c. $\sqrt{81 =}$

d. $\sqrt[3]{64 =}$

e. $\sqrt[3]{125 =}$

f. $\sqrt[3]{27 =}$

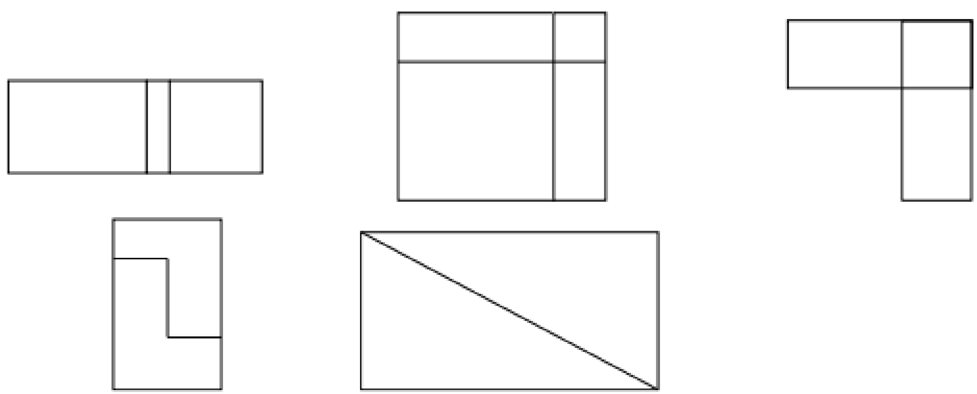
Apéndice B.

Sesiones aplicando la estrategia didáctica (Álgebra geométrica)

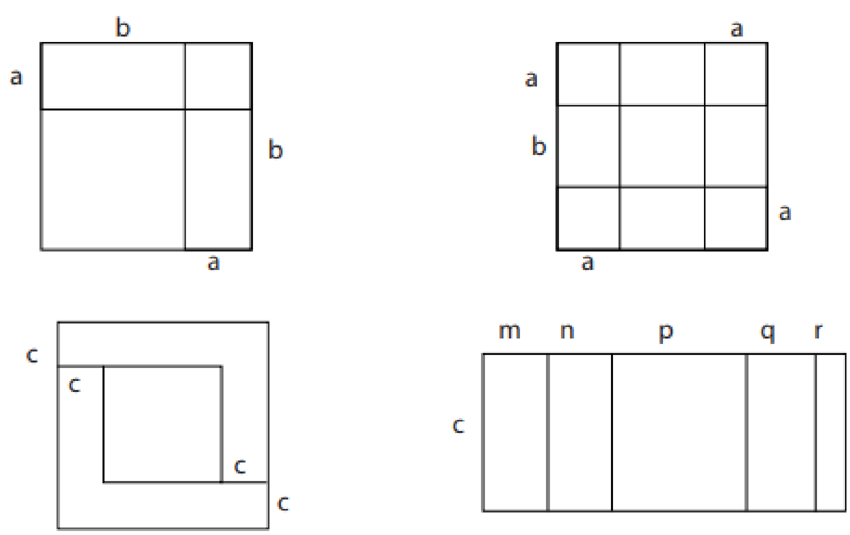
Sesión #01 : Activación de saberes previos de geometría (Cuadrados y rectángulos)

A cada estudiante se le entregara el siguiente material para la actividades de saberes previos.

1. Coloree de color rojo todos los rectángulos que vea y de verde todos los cuadrados sin hacer modificaciones a las figuras.



2. Calcule las áreas de los cuadrados y rectángulos si a= 2 , b= 3, c= 4, m=5, n= 6, p= 7, q= 8, r= 9.



3. Si el perimetro de un cuadrado es 24 metros, ¿Cuánto miden sus lados?

4. Si el área de un cambo de fútbol con forma de cuadrado es de 64 m^2, ¿Cúal es la longitud total de la malla que rodea el campo?

Compromisos: Para la próxima clase por grupos de 3 estudiantes traer los siguientes materiales, los cuales se usaran para desarrollar la sesión #03.

- Regla
- Tijeras
- Lápiz
- ½ pliego de cartón paja
- 15 balsos de 1 cm x 1 cm y 15 balsos de 2 cm x 2 cm.

Sesión #02 : Conceptualización y construcción del álgebra geométrica.

Para la realización de este material se tuvo como referencia "El algebra es un juego" Acevedo, H. (2021) *El álgebra es un juego.* Didáctica interactiva ltda. El cual se adapto para desarrollar ciertas actividades propuestas por el investigador.

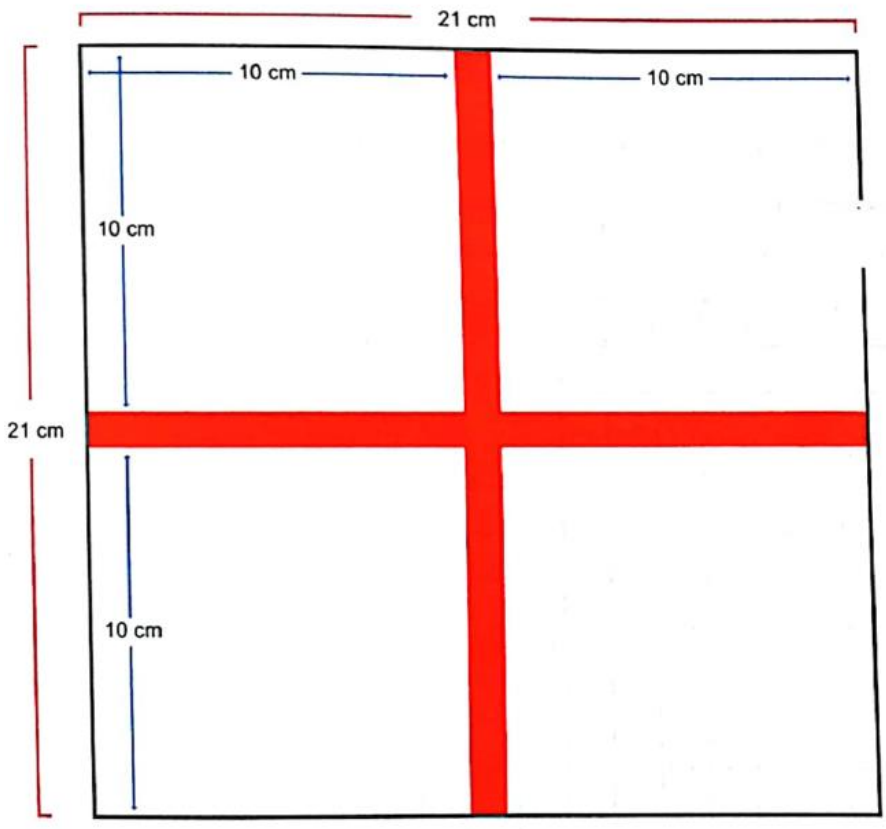
Concepto de algebra geometrica:

El álgebra geométrica es un material concreto que se utiliza para la factorización de expresiones algebraicas. Esta contiene dos cuerpos geométricos: cubos y prismas cuadrangulares.

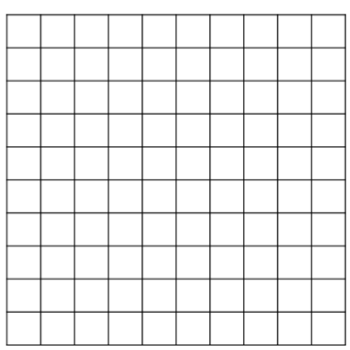
INDICACIONES:

Con el ½ pliego de cartón paja, recorte las siguientes figuras:

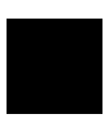
1 cuadrado de 21 cm x 21 cm y pinte de rojo la parte que se indica en la gráfica.



4 cuadrados de 10 cm x 10 cm, haga la cuadrícula como se indica en la gráfica (cada cuadrito mide 1 cm x 1 cm).



1 cuadradito de 1 cm x 1cm. Píntelo de negro.



Con los balsos de 1 cm x 1 cm y de 2 cm x 2 cm corte las siguientes figuras:

72 cubos de 1 cm x 1 cm x 1 cm. Píntelos de verde.

18 prismas de 1 cm x 1 cm x 2 cm. Píntelos de azul.

18 prismas de 1 cm x 1 cm x 2 cm. Píntelos de gris.

24 prismas de 2 cm x 2 cm x 1 cm. Píntelos de amarillo.

12 cubos de 2 cm x 2 cm x 2 cm. Píntelos de naranja.

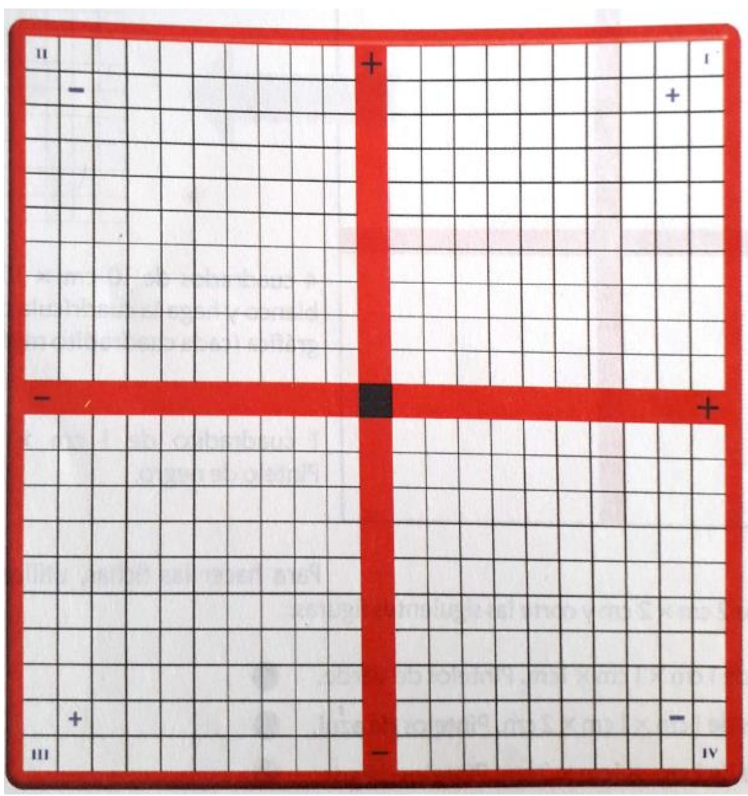
6 cubos de 2 cm x 2 cm x 4 cm. Píntelos de violeta.

Después de pintar todas las fichas, colóque el signo más (+) en una cara y el signo menos (-) en la cara opuesta.

Pegue las cuadriculas en el cuadrado grande, dejando visible la parte roja.

Pegue también el cuadradito negro en el centro y los signos de los cuadradantes y ejes.

El tablero que representa un plano cartesiano con los ejes ampliados, queda así:



USO:

Cada uno de los cubos verdes representa una unidad.

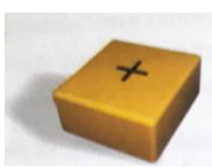
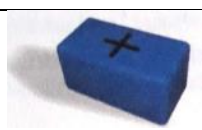
Cada uno de los prismas azules o grises representa cualquier variable elevada a la primera potencia.

Cada uno de los prismas amarillos, representa cualquier elevada al cuadrado.

Cada uno de los cubos naranja representa cualquier variable elevada cubo.

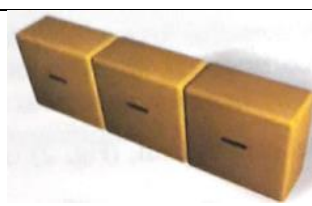
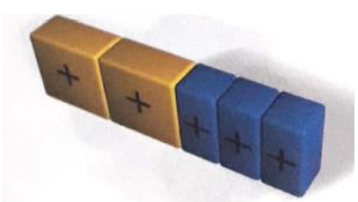
Cada uno de los prismas violeta representa cualquier variable elevada a la cuarta potencia.

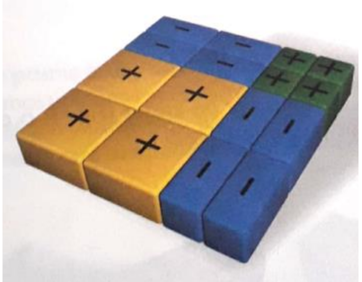
Así:

	Esta figura representa x^4 o la cuarta potencia de cualquier variable. Si x = 10, x^4 = 10.000
	Esta figura representa x^3 o el cubo de cualquier variable. Si x = 10, x^3 = 1.000
	Esta figura representa x^2 o el cuadrado de cualquier variable. Si x = 10, x^2 = 100
	Esta figura representa x o cualquier variable.

	Si x = 10, x^2 = 100
	Esta figura representa y o cualquier variable.
	Esta figura representa 1.

Use los siguientes ejemplos con el material que elaboro para que interactue con la herramienta y se apropie de ella.

	Representa 5 unidades.
	Representa 2 unidades y 2x negativo.
	Representa $3x^2$ negativo.
	Representa $2x^2 + 3x$

	Representa $4x^2 - 8x + 4$

REGLA DEL BISTURÍ: Una vez formado el rectángulo, pase un bisturí horizontal y verticalemnte por las líneas que se forman entre ficha y ficha. Si el bisturí pasa libremente de un extremo al otro, sin chocarse contra ninguna ficha, su ubicación es correcta.

Actividad.

Proponga 4 ejercicios similares a los vistos donde se cumpla la regla del bisturí y expongalo a sus compañeros.

Sesión #03: Introducción a la factorización con el álgebra geométrica.

¿Qué es factorizar?

Descomponer una expresión numérica en factores es escribirla como un producto. Por ejemplo, la expresión 9 .4 es un despcomposición en factores del número 36.

Un caso particular de la descomposición en factores se presenta cuando se tiene un número compuesto. Ejemplo: 36=3. 3. 2. 2

Factorizar un expresión numérica o algebraica es descomponerla en factores.

Se debe aclarar que no todas las expresiones son factorizables. La factorización de cada expresión algebraica se acostumbra a clasificar por grupos de tal manera que se pueda utilizar un proceso adecuado para mostrar una expresión en factores.

ACTIVIDAD:

- **Descomponer los siguientes números en factores primos.**

Ejemplo:

70	**2**		
35	**5**	**70**	**2.5.7**
7	**7**		
1			

a. 132
b. 480
c. 567
d. 360
e. 3024

- **Descomponer las siguientes expresiones algebraicas.**

Ejemplo:

$\mathbf{24x^2y^3 = 2.2.2.3.x.x.y.y.y}$

a. $4m^3n^5 =$
b. $18a^4b^3 =$
c. $8m^4 =$
d. $21a^4b =$
e. $22x^2y^5 =$

Sesión #4: Explicación de la factorización del trinomio cuadrado perfecto utilizando el álgebra geométrica.

1. Conceptualización

Factorización del trinomio cuadrado perfecto.

Un trinomio ordenado con respecto a una de sus variables es cuadrado perfecto cuando:

- El primer y el tercer término son cuadrados perfectos, es decir, tienen raiz cuadrada exacta.
- El segundo término es el doble producto de las raíces cuadradas del primer y tercer término.
- El primer y tercer término siempre son positivos, el segundo término puede ser positivo o negativo.

Factorizar un trinomio cuadrado es el proceso inverso a encontrar el desarrollo del cuadrado de la suma o diferencia de dos términos.

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Por tanto, el trinomio cuadrado perfecto, cuando está ordenado se factoriza así:

- Si el segundo término es positivo, se eleva al cuadrado la suma de las raíces cuadradas del primer y tercer término.
- Si el segundo término es negativo, se eleva al cuadrado la diferencia de las raíces cuadradas del primer y tercer término.

La factorización de un trinomio cuadrado perfecto es:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$$

Por ejemplo, para factorizar el trinomio $9a^2 + 16b^2 + 24ab$.

Primero se ordena el polinomio así: $9a^2 + 24ab + 16b^2$. Luego, se verifica que sea trinomio cuadrado perfecto, así:

$\sqrt{9a^2 =} 3a$ y $\sqrt{16b^2 =}\ 4b$, se halla la raíz cuadrada del primer y tercer término.

Ahora, el segundo término, que es 24ab, es igual al doble producto de las raíces 3ª y 4b. Es decir, 24ab = 2. (3a). (3b).

Cómo el segundo término es positivo, entonces, la factorización del trinomio es:

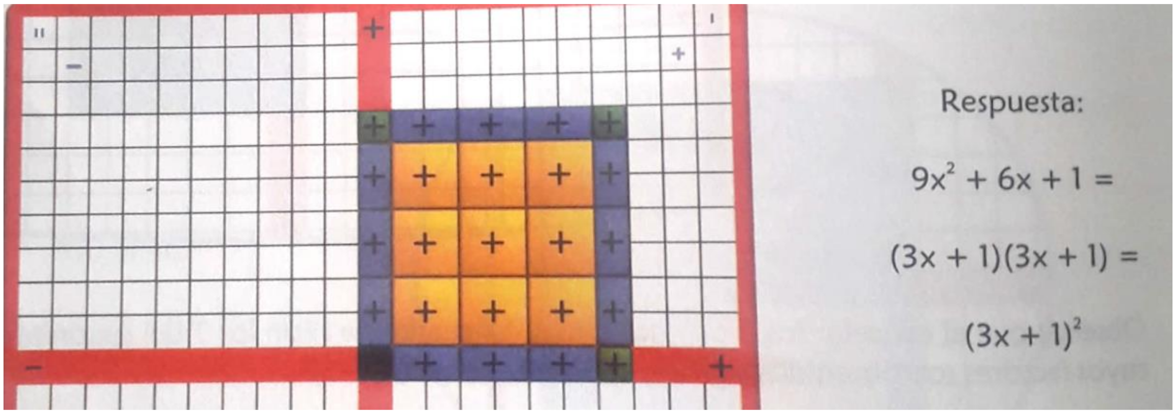
$9a^2 + 24ab + 16b^2 = (3a + 4b)^2$

2. El profesor realizara varios ejemplos con los estudiantes de como resolver un trinomio cuadrado perfecto haciendo uso del material en concreto.

   Ejemplo 1: Factorizar $9x^2 + 6x + 1$

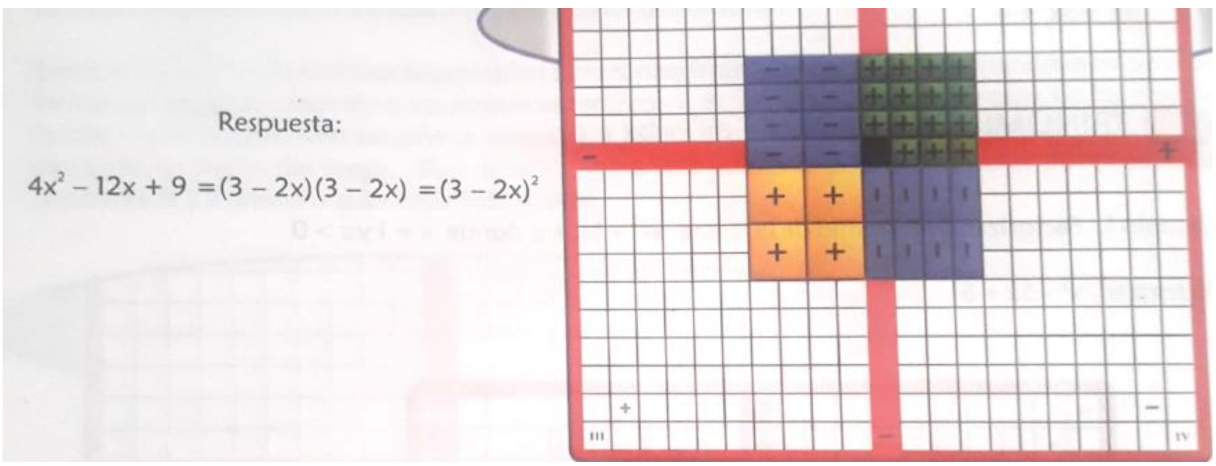
   Este trinomio es un cuadrado perfecto porque el segundo termino es el doble del producto de las raíces de los otros dos.

En este ejemplo se utiliza el cuadrante I.



Ejemplo 2 : Factorizar $4x^2 - 12x + 9$

Aquí se utiliza el cuadrante III (+) para ubicar $4x^2$, los cuadrantes II (-) y IV (-) para colocar $-12x$ y se ubicó +9 en el cuadrante I (+)



Actividad.

3. Con base a los ejemplos realizados por el profesor, en grupos de 3 factorizar los siguientes trinomios utilizando el juego y compruebe los resultados aplicando los productos notables.

Ejercicios.

1. $x^2 - 2x + 1$

2. $x^2 - 10x + 25$
3. $9 - 6x + x^2$
4. $16x^2 + 8x + 1$
5. $4x^2 + 16x + 16$
6. $x^4 + 12x^2 + 36$
7. $4x^4 - 8x^2 + 4$

Sesión #5: Explicación de la factorización del trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ utilizando el álgebra geométrica.

1. Conceptualización

Factorización del trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Expresiones como $x^2 + 5x + 6$, $a^4 - 8a^2 - 20$, $m^8 + 7m^4 - 44$ son trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

Las caracteristicas de los términos del trinomio ordenado de la forma $x^2 + bx + c$ son:

- El primer término tiene coeficiente 1 y es un cuadrado perfecto.
- El segundo término contiene la misma variable que el primer término, elevado a la mitad del exponente qu tiene el primer término.
- El tercer término es un término independiente.

Para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, se realiza el siguiente procedimiento.

- Primero, se halla la raíz cuadrada del primer término y se escribe en dos paréntesis.
- Luego, se buscas dos números tales que su producto sea el término independiente c y su suma el coeficiente b del segundo termino.
- Finalmente, se expresa el producto en dos factores de tal forma que en cada uno se ubique la suma de la raíz cuadrada del primer término con los números r y s. Así:

$x^{2n} + bx^n + c = (x^n + r)(x^n + s)$, donde $r+s = b$ y $r.s = c$.

Ejemplo:

Para factorizar $x^2 + 9x + 14$

Primero, se halla la raíz cuadrada del primer térimono

$\sqrt{x^2 = x.}$

Segundo, se escribe la raíz, en dos paréntesis, así:

$x^2 + 9x + 14 = (x \quad)(x \quad)$

Luego, se buscan dos números cuya suma sea 9 y su producto 14.

Los números son: 7 y 2, porque:

7 + 2 = 9 y 7 . 2 = 14

Por último, se ubican los números y las variables en cada factor, así:

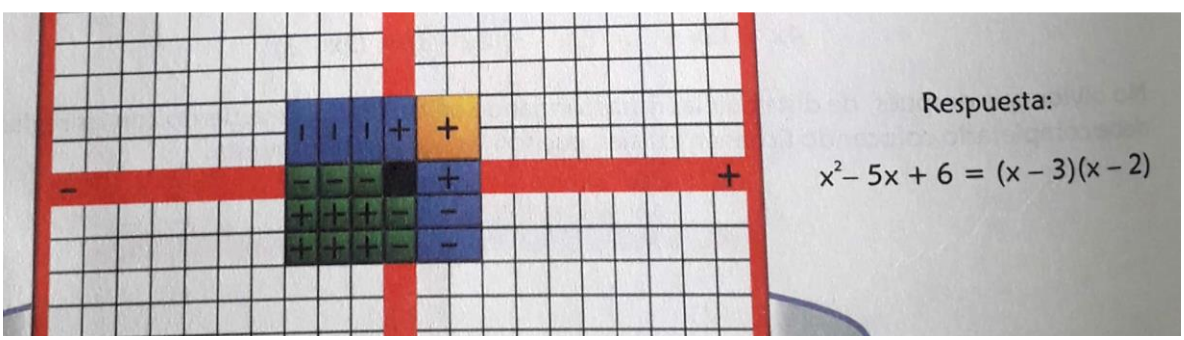
$x^2 + 9x + 14 = (x + 7)(x + 2)$

Por tanto, $x^2 + 9x + 14 = (x + 7)(x + 2)$.

2. El profesor realizara varios ejemplos con los estudiantes de como resolver un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ haciendo uso del material en concreto.

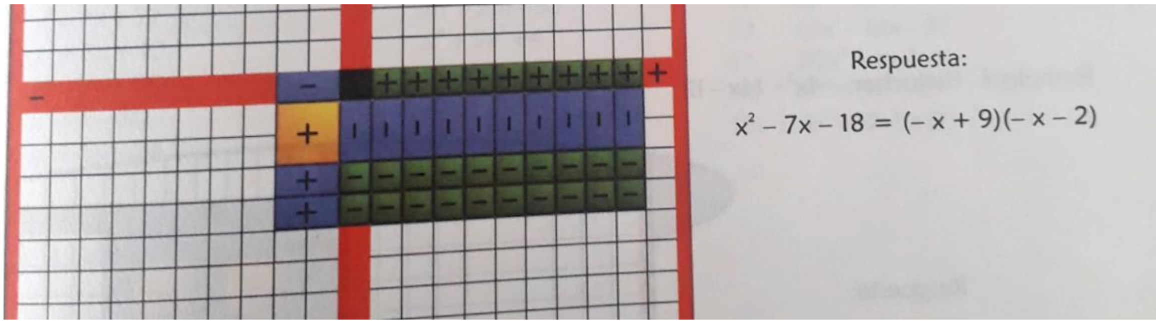
Ejemplo 1. Factorizar $x^2 - 5x + 6$

Este ejercicio y muchos más requieren de su capacidad de análisis para colocar las fichas formando un rectángulo, utilizando los cuatro cuadrantes si es necesario. Como en todos los casos de descomposición factorial, la respuesta se obtiene como el producto de las expresiones en los ejes ampliados: $(x - 3)(x - 2)$



Ejemplo 2. Factorizar $x^2 - 7x - 18$

Ejercicios como éste desarrollan la capacidad de razonamiento y la creatividad, buscando la manera de formar un rectángulo, cuando no es posible hacerlo con la expresión dada. En este caso, no fue posible formar un rectángulo con un prisma amarillo, 7 prismas azules y 18 cubos verdes ($x^2 - 7x - 18$), siguiendo las reglas del juego. Para hacerlo, hubo que adicionar 2 prismas azules positivos en el cuadrante III y 2 prismas azules negativos en el IV.



Es recomendable que busque las dos soluciones. Si ubica las fichas en los cuadrantes I y II la solución será: $x^2 - 7x - 18 = (x - 9)(x + 2)$

Actividad.

3. Con base a los ejemplos realizados por el profesor, en grupos de 3 utilice el juego para factorizar los siguientes trinomios y compruebe las respuestas, aplicando la convención de colores para la multiplicación.

Ejercicios.

1. $x^2 - 7x + 12$
2. $x^2 + 3x + 10$
3. $x^2 - 9x + 20$
4. $x^2 + x - 30$
5. $y^2 + 5y - 24$
6. $m^2 - 2m - 35$
7. $x^4 + 5x^2 + 4$
8. $a^2 - 6a - 40$

Sesión #6: Explicación de la factorización del trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ utilizando el álgebra geométrica.

1. **Conceptualización**

Factorización del trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Expresiones como $8x^2 + 5x - 22,\ \ 3y^4 - 4y^2 + 1,\ \ 2n^8 - 11n^4 + 5$ son trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$.

Las caracteristicas de los términos del trinomio ordenado de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ son:

- El primer término tiene coeficiente diferente a 1.
- El segundo término contiene la raíz cuadrada de la variable del primer término.
- El tercer término es un término independiente.

En la factorización de trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$, se aplican diversas maneras para factorizarlo. Los siguientes son los pasos para factorizar el trinomio por uno de los métodos.

- Primero, se toma como referencia el producto entre a y c.
- Segundo, se descompone el producto a.c en dos factores r y s de tal forma que:
  $rx^n + sx^n = bx^n$.
- Tercero se escribe el trinomio $ax^{2n} + bx^n + c$ como el polinomio equivalente a:
  $ax^{2n} + rx^n + +sx^n + c$.
- Por último, se factoriza el polinomio resultante como factor común por agrupación de términos.

Ejemplo:

Factorizar el trinomio $15x^4 - 23x^2 + 4$.

Primero, se multiplica 15 . 4 = 60

Luego se descompone 60 en dos factores, r y s , tales que $rx^2 + sx^2 = -23x^2$.

En este caso r = -20 y s = -3, ya que $-20x^2 - 3x^2 = -23x^2$ y $(-20)\,.(-3) = 60$

Ahora se escribe $15x^4 - 23x^2 + 4$ como: $15x^4 - 20x^2 - 3x^2 + 4$.

Después se factoriza $15x^4 - 20x^2 - 3x^2 + 4$ por factor común por agrupación de términos, así:

$$15x^4 - 20x^2 - 3x^2 + 4 = (15x^4 - 20x^2) - (3x^2 - 4)$$

$$= 5x^2(3x^2 - 4) - (3x^2 - 4)$$

$$= (3x^2 - 4)(5x^2 - 1)$$

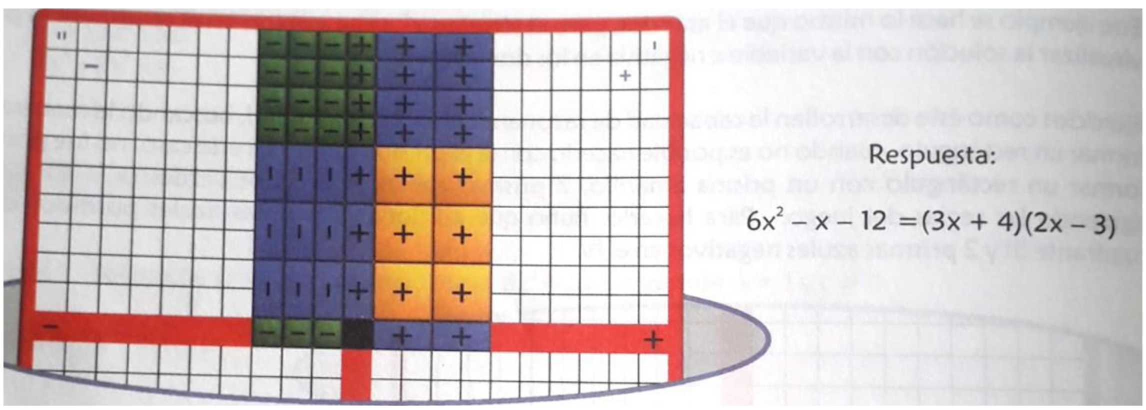
Por tanto la factorización es: $15x^4 - 23x^2 + 4 = (3x^2 - 4)(5x^2 - 1)$

2. El profesor realizara varios ejemplos con los estudiantes de como resolver un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ haciendo uso del material en concreto.

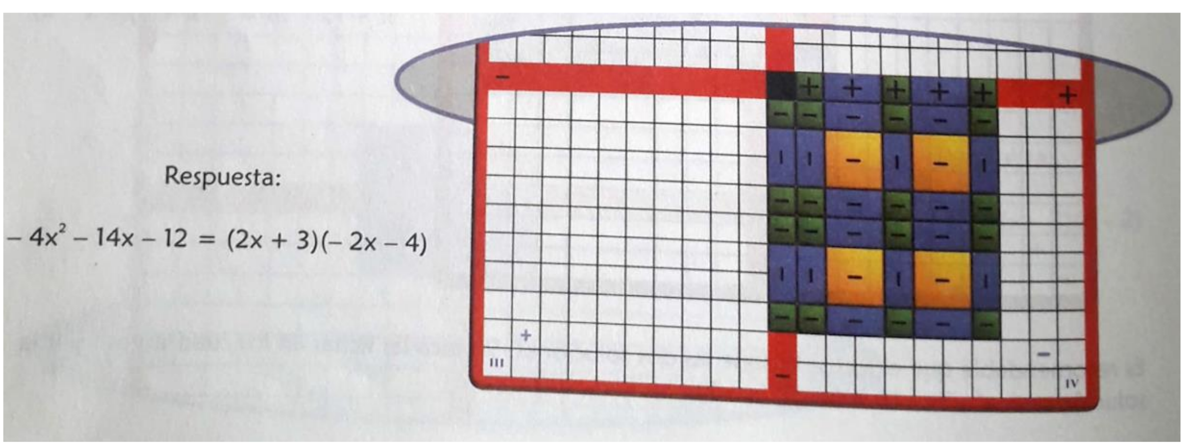
Ejemplo 1. Factorizar $6x^2 - x - 12$.

Para resolver este ejercicio es necesario adicionar 8x en el cuadrante I y -8x en el II.

Observe que si se cancelan 8 prismas azules positivos con 8 prismas azules negativos, queda el trinomio dado $6x^2 - x - 12$ cuya descomposición factorial es $(3x + 4)(2x - 3)$.



Ejemplo 2. Factorizar $-4x^2 - 14x - 12$



Actividad.

3. Con base a los ejemplos realizados por el profesor, en grupos de 3 utilice el juego para factorizar los siguientes trinomios y compruebe las respuestas, aplicando la convención de colores para la multiplicación.

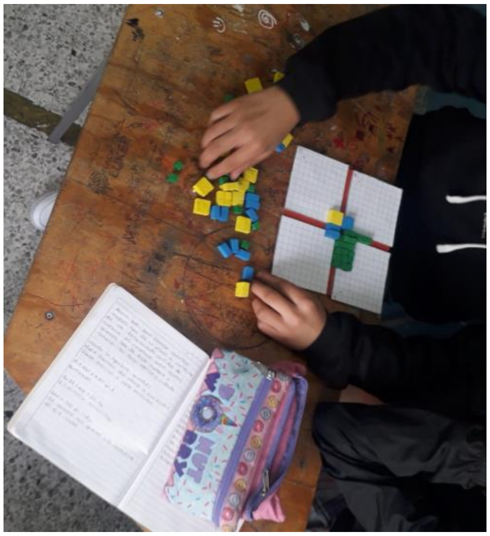
Ejercicios

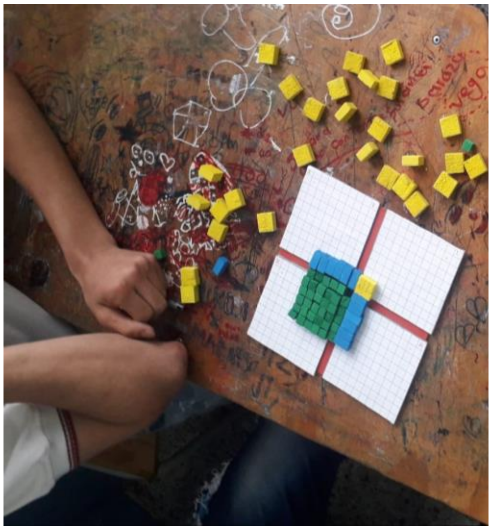
1. $2x^2 + 3x - 2$
2. $6x^2 + 7x + 2$
3. $6x^2 - 5x - 6$
4. $12x^2 - 13x - 35$

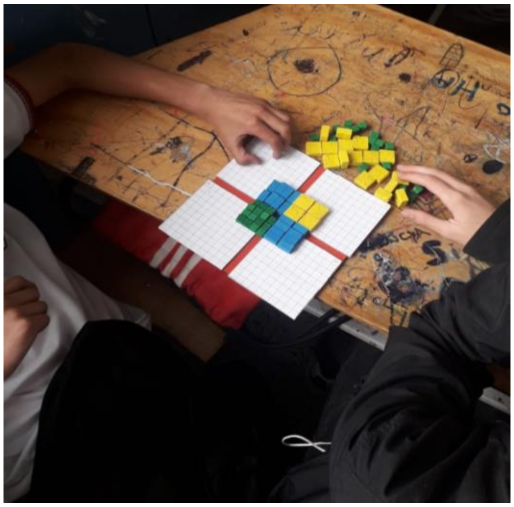
Apéndice C.

Registros fotográficos

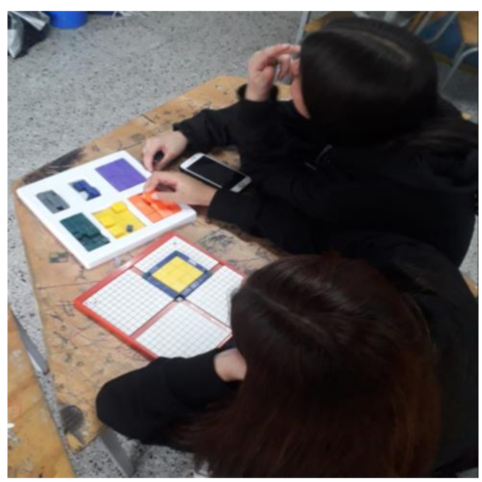
Durante la intervención, se tomaron algunos tomas fotográficas las cuales pueden observarse la manipulación de la estrategia por parte de los estudiantes, donde pueden desarrollar competencias que les permita comprender e interpretar mejor los procesos de los trinomios geométricos. Se tuvo una excelente respuesta de motivación, interés y participación por parte de los estudiantes del Instituto Sinaí.

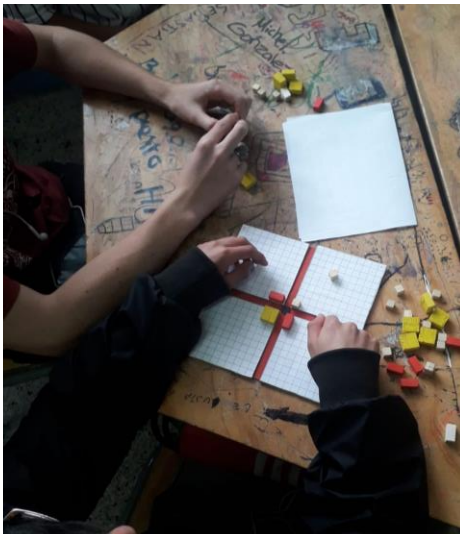







JORDAN





Apéndice D.

Cuestionario de salida.

Nombre: ___________________________________ Grado: ______ Fecha: ____________

1. ¿Cómo te parecieron las clases en las que se hizo uso del material en concreto para comprender el proceso de factorización de trinomios? ¿Por qué?

____

____

____

2. ¿Cómo se te hizo más fácil comprender el proceso de factorización de trinomios, haciendo uso del material en concreto o con las explicaciones y ejercicios que se realizaban solo en el cuaderno? ¿Por qué?

____

____

____

3. ¿Crees que el uso de material en concreto favorece a la comprensión de conceptos matemáticos? ¿Por qué?

____

____

____

4. ¿Crees que el uso de representaciones gráficas y algebraicas te ayudo a comprender de una mejorar manera el proceso de factorización de trinomios? ¿Por qué?

____

____

____

5. ¿Consideras que es importante que se sigan aplicando este tipo de estrategias didácticas para la enseñanza del álgebra y otros aprendizajes matemáticos? ¿Por qué?

____

____

____

6. ¿Cómo te sentiste en las clases donde se hizo uso del material en concreto para comprender el proceso de factorización de trinomios?

____

____

____

Universidad® Católica de Manizales

VIGILADA MINEDUCACIÓN

Obra de Iglesia de la Congregación

Hermanas de la Caridad Dominicas de La Presentación de la Santísima Virgen

Universidad Católica de Manizales
Carrera 23 # 60-63 Av. Santander / Manizales - Colombia
PBX (6)8 93 30 50 - www.ucm.edu.co