



LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Estrategia didáctica para la comprensión de crecimiento poblacional con el uso de la función exponencial y la serie Fibonacci

Juan Manuel Ocampo Ocampo



Universidad[®]
Católica
de Manizales

VIGILADA Mineducación

Obra de Iglesia
de la Congregación



Hermanas de la Caridad
Dominicas de La Presentación
de la Santísima Virgen

Estrategia didáctica para la comprensión de crecimiento poblacional con el uso de la función exponencial y la serie Fibonacci a estudiantes de grado décimo de la Normal superior de Ntra. Sra. de la Candelaria

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de licenciatura en
Matemáticas y física

Autor:

Juan Manuel Ocampo Ocampo

Asesora:

Paula Andrea Osorio Gutiérrez

Universidad Católica de Manizales

Facultad de Educación

Licenciatura en Matemáticas y Física

Mayo de 2023

Dedicatoria

A mis padres, María Verónica Ocampo y William Ocampo, quienes con su esfuerzo, apoyo, amor y compromiso me permitieron alcanzar de forma exitosa una de mis metas en la vida; ellos fueron mi principal apoyo y agradezco mucho sus enseñanzas, su buenos ejemplos y el ayudarme a transformar una meta en una realidad.

Agradecimientos

Le agradezco primero que todo a mi tutora Paula Andrea Osorio Gutiérrez, una persona que con su compromiso, entusiasmo, carisma y gran inteligencia me permitió construir un excelente trabajo; del mismo modo le agradezco al docente Oscar Javier Sánchez por brindarme de su tiempo con el fin de direccionar mi trabajo, a su vez le agradezco a mi compañera Mónica Ríos Ospina por ser un apoyo moral en el proceso y finalmente pero no menos importante a Dios por prestarme la vida para llegar a este punto y aspirar a más.

Resumen

Dado a que los procesos matemáticos hacen parte de todos los entornos de la vida cotidiana, es preciso considerar desde el estudio de la función exponencial el crecimiento de poblaciones y su relación con fenómenos naturales donde se nota implícita la serie Fibonacci, su implementación tiene como finalidad crear un conocimiento en el contexto de la Escuela Normal Superior N.S Candelaria con los estudiantes del grado 10°.

El objetivo a alcanzar está enfocado en la implementación de una estrategia didáctica para la comprensión del crecimiento poblacional a través de la función exponencial y su relación con la serie de Fibonacci; en el cual se implementan tres hojas de trabajo, en la primera se aborda una temática conocida, en la segunda una poco frecuente y en la tercera se genera una unión de las anteriores para explicar un fenómeno social.

En la aplicación de dichas intervenciones se hace evidente el interés de los estudiantes, se pregunta de manera curiosa sobre los temas abordados y se cuestionan la relación que hay entre estos generando sus propias ideas las cuales facilitaron el proceso y formaron lazos de relación más sólidos entre los componentes de las hojas de trabajo; es allí donde se puede concluir que las temáticas abordadas son interesantes y explícitas para los estudiantes, permitiendo que ellos mismos vean en los procesos un parentesco o similitud, y se permiten a su vez utilizar este para hallar resultados de problemas basados en el crecimiento de poblaciones

Palabras claves: Aprendizaje activo, crecimiento poblacional, función exponencial, series y patrones, Serie Fibonacci

Abstract

Given that mathematical processes is part of all environments of daily life, it is necessary to consider from the study of the exponential function of the growth of populations and its relationship with natural phenomena where the Fibonacci series is implicitly noted, its implementation has the purpose of creating knowledge in the context of the Escuela Normal Superior N.S Candelaria with the students of the 10th grade.

The objective to be achieved is focused on the implementation of a didactic strategy for the understanding of population growth through the exponential function and its relationship with the Fibonacci series; in which three worksheets are implemented, in the first one a known theme is addressed, in the second an infrequent one and in the third a union of the previous ones is generated to explain a social phenomenon.

In the application of these interventions, the interest of the students becomes evident, since they curiously ask themselves about the topics addressed and they question the relationship between them, generating their ideas, which facilitated the process and formed stronger relationship ties. between the components of the worksheets; It is there where it can be concluded that the topics addressed are interesting and explicit for the students, allowing them to see a relationship or similarity in the processes, and in turn, allow themselves to use this to find results of problems based on population growth.

Keywords: Active learning, population growth, exponential function, series and patterns, Fibonacci Series

Tabla de Contenidos

Introducción	10
1. Planteamiento del problema del Problema.....	13
1.1 Descripción general del estudio.....	13
1.2 Justificación.....	14
1.3 Objetivos	16
Objetivos específicos.	16
1.4 Delimitación del problema	17
2. Marco Referencial	19
2.1 Marco de Antecedentes	19
2.1.1 Antecedentes Internacionales	19
2.1.4 Antecedentes Nacionales.....	24
2.2 Marco legal.....	26
2.3 Las matemáticas y su legado en la secuencia de patrones	27
2.3.1 La comprensión de fenómenos en aprendizajes significativos.....	29
2.3.2 Aplicaciones que convergen con el contexto.....	31
2.3.3 La relación de función exponencial y serie Fibonacci	33
2.4 La didáctica como ciencia que permite la enseñanza	34
3. Diseño Metodológico.....	40
3.1 Enfoque de investigación	40
3.2 Tipo de investigación	40
3.3 Población y muestra.....	41
3.3.1 Población	41

3.3.2 Muestra.....	41
3.3 Estructura metodológica.....	42
3.5 Validez y pilotaje de los instrumentos	49
3.6 Fases de investigación.....	50
4. Resultados y discusión.....	53
5. Conclusiones y recomendaciones.....	77
Respuesta a la pregunta central	77
Recomendaciones	82
Referencias Bibliográficas	83
Apéndices.....	88

Lista de tablas

Tabla 1. Resultados de identificación de patrones.....	43
Tabla 2. Análisis resultados hoja de trabajo 1.	47
Tabla 3. Análisis de resultados de la hoja de trabajo 2.	47
Tabla 4. Análisis de resultados hoja de trabajo 3	48
Tabla 5. Validación del pilotaje.....	50
Tabla 6. Item de calificación actividad introductoria.....	55

Lista de figuras

Figura 1	Modelo de las situaciones didácticas.	39
Figura 2.	Identificación de la secuencia	56
Figura 3.	Comprensión de la representación gráfica.....	57
Figura 4.	Habilidad para encontrar patrones	58
Figura 5.	Registro fotográfico de respuestas al presaber	64
Figura 6.	Resultados de hoja de trabajo 1, momento 3	65
Figura 7.	Resultados momento 5, hoja de trabajo 1.....	67
Figura 8.	Registro fotográfico momento 1, hoja de trabajo 2.....	68
Figura 9.	Resultados Momento 3, hoja de trabajo 2	70
Figura 10.	Resultados momento 4, hoja de trabajo 2	72
Figura 11.	Resultados de la actividad previa, hoja de trabajo 3	73
Figura 12.	Resultados momento 3, hoja de trabajo 3.....	74
Figura 13.	Resultados momento 4, hoja de trabajo 3.....	76
Figura 14.	Resultados momento 5, hoja de trabajo 3.....	77

Introducción

El presente trabajo ha sido una propuesta didáctica, diseñada para mejorar los procesos del pensamiento variacional, donde se busca que los estudiantes a través de la función exponencial, encuentren patrones de crecimiento y puedan proyectar situaciones que impliquen el crecimiento en poblaciones, además, se busca también que los estudiantes puedan analizar desde la serie Fibonacci una particularidad con respecto a la función exponencial un aumento similar que permita generar conjeturas y poder presentar un modelo de crecimiento a través de algunos fenómenos que pueden percibirse y visualizarse en el contexto rural.

Este proyecto se desarrolla en la Escuela Normal Superior Ntra. Sra. De la Candelaria., con estudiantes del grado décimo, donde se aplicaron unas hojas de trabajos que busca que los estudiantes analicen diversas situaciones de crecimiento poblacional a través de la función exponencial y encontrar relaciones descritas con la serie Fibonacci.

El trabajo investigativo, está diseñado en cinco capítulos, los cuales se describen a continuación:

En el primer capítulo se aborda el planteamiento del problema, en el cual surge en base a una dificultad y un vacío en el conocimiento, por lo cual se planea implementar una estrategia didáctica para facilitar la comprensión del crecimiento poblacional a través de la función exponencial y su relación con la serie de Fibonacci, la cual se enfocará en el pensamiento variacional apoyados en su lógica y orden.

En el segundo capítulo se tiene marco referencial, se tuvo un rastreo bibliográfico, el cual contiene antecedentes internacionales, nacionales y locales, además, este trabajo es apoyado en teorías pedagógicas, didácticas y disciplinares, las cuales son de gran interés para dar un soporte desde la literatura a mejorar los procesos de enseñanza de las matemáticas. Los autores que más

tienen relevancia en esta investigación son Ausubel por su aporte con el aprendizaje significativo.

En una segunda intervención, en la que es apoyada por D'Amore (2006), en la cual se trabaja sobre la resolución de problemas matemáticos, abriendo paso a la interacción con situaciones problémicas del entorno inmediato de los estudiantes y dando soluciones reales a problemas reales, generando de este modo un conocimiento real y aplicado. En base a esto también se examina a Hitt (2017), en el que representa la manera de visualizar objetos y representarlos mediante diferentes formas, proporcionando así al estudiante una comprensión profunda desde la visualización de los temas y un mejor desempeño al momento de solucionar incógnitas. “La visualización matemática en este contexto tiene que ver con una visión global, integradora, holística, que articule, libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas”. (Hitt, 1997). Todos estos autores y otros serán de gran relevancia y soporte para el desarrollo de la investigación.

En el tercer capítulo se tiene el diseño metodológico, teniendo un enfoque cualitativo de tipo descriptivo, asumiendo que los instrumentos utilizados están siendo propuestos por el autor de dicha investigación, donde la estructura abordada para las hojas de trabajo propuestas, son pensadas desde la rúbrica didáctica que se tiene como modelo en la Escuela Normal Superior Ntra. Sra. De la Candelaria. También se mencionan las fases que se desarrollaron durante la investigación.

El cuarto capítulo, es el análisis de los resultados, donde se recolecta la información y los datos de las diferentes hojas de trabajo, además, se realizó un análisis analítico descriptivo de los ejercicios trabajados, se realizó un proceso de descomposición y análisis de respuestas, ejercicios, gráficos, dibujos y construcciones propias de los estudiantes donde se reafirma la

importancia y aplicabilidad de la intervención realizada en el aula, debido a los resultados tuvieron un buen porcentaje de éxito, entendimiento y utilidad en el entorno donde se encuentra inmersa la población, proporcionando a los educandos una visión diferente, amplia y aplicada de los procesos matemáticos que han aprendido.

El quinto capítulo, se presentan las conclusiones y recomendaciones que demuestra que la propuesta investigativa, teniendo una estrategia didáctica para la comprensión de crecimiento poblacional a través de la función exponencial y la serie Fibonacci, permite a otros docentes e investigadores, desarrollar intervenciones aplicadas al aula, que favorezcan no solo el aprendizaje, sino el fortalecimiento del pensamiento analítico, reflexivo y crítico.

1. Planteamiento del problema del Problema

1.1 Descripción general del estudio

Las matemáticas están presentes en todos los espacios de la vida, por lo que la necesidad de razonar y analizar todas las situaciones de forma lógica se vuelve totalmente necesario en el desarrollo de cada uno de los seres humanos. Siendo esta la premisa, este proyecto se enfoca en mejorar habilidades fundamentales de observación, análisis y capacidad de sacar conclusiones acertadas frente a lo que sucede en el entorno; es por ello, que se busca implementar una estrategia para el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de grado 10°.

Con el propósito enriquecer a los jóvenes con diferentes habilidades matemáticas, se implementa como estrategia didáctica la comprensión del crecimiento poblacional a través de la función exponencial y su relación con la serie de Fibonacci, la cual se enfocará en el pensamiento variacional apoyados en su lógica, orden y estructura de alta belleza; generando una pequeña descripción sobre el pensamiento anteriormente mencionado, se puede basar en la definición dada en los Estándares Básicos De Competencias en matemáticas, donde describen el pensamiento variacional como el encargado de reconocer, percibir o identificar el cambio que se puede presentar en diversos contextos, así como la descripción, la modelación y la representación en diferentes sistemas simbólicos; por ende, al relacionar algunas sucesiones como la de Fibonacci con la espiral y a su vez con la forma en que se distribuye el crecimiento de las hojas de algunas plantas, se puede apreciar un orden de elementos en un espacio determinado.

De igual modo, se pretende que los estudiantes comprendan y desarrollen habilidades investigativas científicas con las cuales puedan mejorar su interpretación y representación

matemática, la correcta distribución los diferentes componentes y la importancia de estos en algunos espacios, es crítico que los estudiantes aun teniendo un amplio laboratorio constituido por un ambiente natural no aprovechen el mismo con el fin de comprender, entender, analizar e interpretar los diversos fenómenos naturales presentes en el ambiente de su contexto.

La presente propuesta didáctica se pretende llevar a cabo en la Institución Educativa Escuela Normal Superior N.S candelaria, la cual está ubicada en el casco urbano del municipio de Marquetalia Caldas, los principales beneficiados con esta intervención investigativa son los estudiantes de grado 11° de dicha institución, estos jóvenes oscilan entre los 15 y 18 años; son un grupo muy diverso, ya que se conforma por estudiantes que han llevado sus procesos educativos de diferentes maneras, algunos recibieron gran parte de su educación es escuelas rurales con un modelo escuela nueva, otros son estudiantes con un nivel diferente porque llegaron de diferentes ciudades y su mayoría son estudiantes que siempre han estado en los procesos realizados por la institución, independientemente de dichos procesos todos muestran una dificultad en común y es el proceso de ubicación espacial basado en patrones de crecimiento.

La intención del proyecto es fortalecer a los estudiantes por medio de unas intervenciones dirigidas específicamente a los patrones de crecimiento, en estas se incluirán algunas sucesiones como la de Fibonacci y su acercamiento a la función exponencial, puesto que serán de gran ayuda para la introducción a la temática.

1.2 Justificación

La investigación a desarrollar es una propuesta de intervención en el aula, con un enfoque matemático estructurado a partir de los lineamientos curriculares estipulados para grado 10°, siendo una de las temáticas que componen un amplio campo de relación existente entre las

matemáticas y la composición natural de algunos elementos, esta idea dará a conocer y entender un tema de la disciplina sea apoyado con objetos del entorno, observando en algunos casos donde se ve reflejada la sucesión de Fibonacci la cual a su vez se acerca y se aprecia junto a la función exponencial.

Con todo esto se busca que los estudiantes relacionen las matemáticas con otras ciencias, las cuales a pesar de tener diferentes orientaciones convergen en partes fundamentales; por ejemplo, las naturales con la que comparte muchos aspectos, y aprovechando uno de ellos se logra conectar dos ciencias diferentes e interesantes, las cuales permiten ampliar la comprensión y el conocimiento. De este modo, se desea mostrar la aplicabilidad de las matemáticas en un entorno natural el cual está siempre presente, aumentando así la conciencia natural de los jóvenes y mostrando las plantas como organismos maravillosos y necesarios, desde la perspectiva matemática del crecimiento.

Por ello, es viable enfocar esta investigación en un ambiente natural, ya que permite ver los procesos distributivos paso a paso y analizar los mismos, dando una relación entre lo teórico y lo existente, brindando la posibilidad de aprender significativamente, de razonar lógicamente y direccionar los conocimientos para hallar soluciones; sin olvidar que este estudio servirá como impulsador de conciencia para continuar con una línea de cuidado de los componentes naturales del entorno.

Con base en lo planteado en la propuesta investigativa, se puede afirmar que los jóvenes tendrán el reconocimiento de patrones de crecimiento y su relación con una modelación matemática a través de la función exponencial y la comparación particularmente con la serie Fibonacci, esto implica una visión diferente de los procesos de distribución y un patrón de ciertos datos numéricos; a su vez, una mejor comprensión de su entorno, analizando a través de un

conocimiento adquirido, la aplicabilidad en el entorno a través de la interpretación de mapas, análisis secuenciales de fenómenos en la naturaleza, entre otros, con el fin de hacerlo no solo observable, sino comprobarlo matemáticamente.

De igual modo, cada uno de los docentes podrá generar sus propias relaciones con la temática, ya que al desarrollar a partir de patrones de crecimiento y secuencias de orden, será sencillo enfocar este avance a líneas de tiempo que describan, el desarrollo de historias, los procesos naturales, los movimientos astrológicos e incluso con otro tipo de actividades que permitan dinamizar y transversalizar el proyecto con las enseñanzas logradas. Los estudiantes podrán tener nuevas herramientas que posibilite la comprensión desde el campo con las matemáticas, para describir, interpretar y argumentar fenómenos y que puedan estar a la vanguardia.

Los investigadores en matemáticas escolares, podrán tener nuevos recursos y estrategias que permita el desarrollo del pensamiento crítico, analítico y reflexivo, para mostrar otras dinámicas de dominio y progreso de los contenidos en el aula de clase.

1.3 Objetivos

Objetivo general.

Implementar una estrategia didáctica para la comprensión del crecimiento poblacional con el uso de la función exponencial y la serie Fibonacci.

Objetivos específicos.

- Clasificar distintas secuencias numéricas, geométricas y representaciones gráficas para categorizarlas en función de crecimiento o decrecimiento.

- Diseñar una estrategia didáctica que fortalezca la comprensión de la función exponencial a través del crecimiento de poblaciones similares a las de la serie Fibonacci y aplicarla en estudiantes de grado 11°.
- Evaluar la estrategia implementada para reconocer desde la función exponencial el crecimiento de poblaciones en cualquier contexto.

1.4 Delimitación del problema

El presente proyecto procura darle herramientas a los maestros y estudiantes, las cuales podrán usar en aspectos diversos de su vida mejorando la interpretación que le dan a su entorno, y el papel que asume para contribuir al desarrollo de una sociedad académica más rigurosa, en la que a su vez sirve para enfrentarse a nuevos retos que estimulen la indagación, la argumentación y el pensamiento crítico.

Es de destacar que el entorno que tienen los jóvenes en este momento no les genera las oportunidades suficientes para fortalecer temas puntuales como los patrones de crecimiento, secuencias numéricas, análisis de funciones, entre otras, las cuales proporcionan la comprensión de la razón de esta expansión buscando un sentido lógico al fenómeno exponencial al cual se van a someter; es este el punto débil que se fortalece con la presente intervención, como objetivo se presenta el entendimiento de dicho fenómeno, su explicación por medio de diversas actividades y la oportunidad de preparar a los adultos del mañana.

La propia comunidad hace énfasis en su carencia reconocen que por falta de exigencia se generó una problemática, es allí donde estudiantes, padres y docentes convergen en un interés natural sobre el tema a tratar; una de las grandes facilidades que destacan en el ejercicio es que al usar algunas secuencias de crecimiento se puede entender la manera en que se construyen las

ciudades o pueblos, o como arán los campos, el porqué de un punto central o de partida y su papel en el proceso de construcción. De igual forma el ambiente del propio municipio ayuda a experimentar directamente con la serie Fibonacci, este es espléndido en ecosistemas vegetales los cuales siguen dicha norma de orden para la distribución de sus ramas u hojas, lo cual nos da una idea natural de organización en crecimiento.

Con esta finalidad y aprovechando los diversos procesos de cuidado ambiental que lleva a cabo la institución, se puede generar una transversalización directa con cuidado, mantenimiento y restablecimiento de ecosistemas abarcando con un proyecto una amplia gama de procesos que se llevan a cabo en la institución. Por ende, todo este proceso de comprensión sobre patrones de crecimiento a favor del uso de secuencias como la de Fibonacci y su relación con la función exponencial, abre una gran oportunidad de avance a los estudiantes mejorando sus procesos de comprensión matemática mientras se preparan para su camino de vida.

Pregunta de investigación

¿Cómo implementar una estrategia didáctica para la comprensión del crecimiento poblacional a través de la función exponencial y la serie de Fibonacci?

A partir de lo expuesto, se extraen las siguientes preguntas auxiliares

Preguntas auxiliares

¿Cómo entiende el estudiante la relación entre la función exponencial y la sucesión de Fibonacci?

¿De qué manera generar una estrategia didáctica adecuada para hacerlas funcionales con el entorno y la explicación de fenómenos?

¿Cómo las representaciones semióticas influyen en el aprendizaje de la función exponencial y la relaciona con la sucesión Fibonacci?

2. Marco Referencial

En la realización de esta propuesta investigativa, se tiene en cuenta desde el rastreo bibliográfico, la caracterización del estado del arte, tomando antecedentes internacionales, nacionales y locales. También se presenta un marco legal, en el que se desprenden las políticas educativas lideradas desde el Ministerio de Educación Nacional MEN y los lineamientos curriculares que darán soporte a los aprendizajes que deben alcanzar los estudiantes en el grado 10°, teniendo en cuenta los Estándares Básicos de Calidad EBC y los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA en su segunda versión.

Así mismo, se destaca en la realización del rastreo literatura que fundamenta y teoriza los procesos didácticos, epistémicos y pedagógicos, los cuales se establecen desde las representaciones semióticas de Duval (2006) y en comparación con la resolución de problemas descritas por Bruno D'Amore.

2.1 Marco de Antecedentes

2.1.1 Antecedentes Internacionales

Durante el rastreo bibliográfico se han encontrado algunos trabajos relacionados con la temática abordada. Para indicar el primero de estos trabajos, se hace prudente revisar a (Pallchisaca Suquilanda & Zhimnay Valverde, 2019a), en el cual se trabaja sobre una estrategia educativa que tiene Estrategia educativa para fomentar la interdisciplinariedad entre las asignaturas de matemática y ciencias naturales mediante la sucesión de Fibonacci la cual está centrada en los procesos de interdisciplinariedad de las asignaturas matemáticas y ciencias naturales usando como recurso la sucesión de Fibonacci; el objetivo que se tuvo en esta investigación es Proponer una estrategia educativa que favorezca el enfoque interdisciplinar en

las asignaturas de Matemáticas y Ciencias Naturales, mediante la aplicación de la sucesión de Fibonacci, en el séptimo “C” de la escuela Zoila Aurora Palacios”; en este proceso se implementó la investigación educativa por medio de una estrategia que permitió el desarrollo de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas con las ciencias naturales, afirmando que la colaboración a la hora de impartir estas materias generaría en los jóvenes una nueva manera de aprender y relacionar los conceptos adquiridos en dos ramas importantes de la colegiatura. De los procesos realizados en dicha investigación se hace necesario resaltar el diseño y aplicación de la estrategia educativa con bases en la sucesión de Fibonacci, la cual integra ambas ciencias y obtiene como resultado una eficiente organización de contenidos entre asignaturas lo cual evidencia la relación directa entre estas, se notó el aumento del interés por parte de los estudiantes al trabajar la sucesión de Fibonacci y comprender su aplicación en diferentes procesos, de igual forma los alumnos aprendieron sobre el proceso de interdisciplinariedad y la implementaron debidamente al generar la relación y entender las posibles similitudes entre las matemáticas y las ciencias naturales y además el proceso paso de estar centrado en el conocimiento impartido por el docente y se dirigió hacia los procesos del conocimiento generado por los mismos estudiantes.

El aporte que se genera para este proyecto es que hace evidente la relación de la sucesión de Fibonacci con los procesos de crecimiento en plantas y en otros sucesos biológicos, aporta una estrategia educativa, la cual es base de las guías didácticas que se trabajaran y de igual forma nos da explicaciones amplias sobre el proceso creciente de Fibonacci y la estructura de organismos en base a esto, lo cual se relaciona con los procesos exponenciales y el crecimiento de poblaciones.

También se analiza un segundo antecedente, este fue escrito por (Berardi & Corica, 2021a) y recibe el nombre de investigación ABP (Aprendizaje Basado en Proyectos) en la escuela secundaria: análisis de la gestión de un proyecto sobre el crecimiento de plantas y sus vínculos con la matemática; en este se tratan una serie de propuestas ministeriales para la escuela secundaria en Argentina, en estas se aconseja un estudio co-disciplinar, como estrategia para minimizar la fragmentación en la enseñanza-aprendizaje, dando como propuesta pedagógica el diálogo, la articulación y vinculación de saberes; sus primeros registros evidencian que: el trabajo guiado por proyectos permitió que los estudiantes sean los protagonistas de sus propios avances y saberes, ya que son ellos quienes formulan y responden preguntas de una manera más autónoma y responsable. Por lo tanto, el objetivo que tuvo esta investigación es comprender la gestión del saber matemático en el desarrollo de un proyecto disciplinar, en el que trabajaron de manera cooperativa un profesor de matemática y otro de biología para el estudio del crecimiento de las plantas. La metodología que se implementó es descrita con enfoque exploratorio, descriptivo e interpretativo, el cual define los procesos de un proyecto disciplinar realizado por dos maestros, uno de matemáticas y otro de biología, los cuales hacen referencia al trabajo en conjunto de dos materias diferentes con enfoques similares; para ello se usó la sucesión de Fibonacci e implantaron 22 clases de 2 horas cada una para llevar a cabo un aprendizaje interdisciplinario y bien estructurado. El proyecto les permitió a los estudiantes descubrir por sí mismos el comportamiento de diversas plantas a medida que pasaban por las diferentes fases de crecimiento, en medio de este avance se les explicó a los estudiantes como era el avance y el desarrollo de estas de una manera matemática lo cual permitió un conocimiento sólido en los estudiantes y una relación diversa y sólida entre dos materias.

Con esto se permite ver nuevamente la relación de Fibonacci con las demás materias de estudio y permite la descripción de procesos interdisciplinarios y de relación usando como base la versatilidad y aplicación de la sucesión.

2.1.3 Antecedentes nacionales

En el rastreo bibliográfico que se realiza, se encuentra un primer trabajo hecho por (Olaya, 2012), el cual trabaja en la construcción de una unidad didáctica que le sea de utilidad para facilitar la enseñanza del concepto de función exponencial, de igual forma incorporó en sus procesos algunas aplicaciones útiles y fáciles de implementar; dando inicio al proceso, tomo norte al ocuparse de generalizar la visión que se tenía de la función exponencial, ya que decidió mostrarla de una manera versátil resaltando la importancia que esta tiene en la construcción y el desarrollo del álgebra, con esto en mente decidió construir su investigación desde los enfoques históricos y culturales de diferentes regiones, puesto que menciona diferentes lugares como Babilonia, Egipto, Grecia Clásica y la Grecia Alejandrina, obteniendo así un mapeo histórico que sostiene la intención de su estudio.

De esta manera genera un estudio con una interpretación completa sobre la función exponencial y alcanza su objetivo al construir una unidad didáctica entendible, sencilla, explícita y fundamentada no solamente en los procesos históricos, sino en todo lo que compone a la función logrando un avance desde lo más simple hasta lo más complejo.

De igual forma, se tiene otro estudio similar realizado por (Cuero Cuero, 2021) el cual tiene como título "Una secuencia de aprendizaje para la comprensión de algunos elementos de la función exponencial a través de la articulación de diferentes registros de representación"; en la cual, decide generar una secuencia de aprendizaje que le ayude a comprender a profundidad los

elementos que componen la función exponencial a través de tareas multirregistro; en este proceso se tuvo en cuenta a Raymond Duval y su perspectiva semiótico-cognitiva, la cual da apoyo a las representaciones que procuran centrar la atención en las funciones cognitivas que se hacen presentes al momento de solucionar o reproducir una actividad matemática y con esto potenciar las capacidades de razonamiento, análisis y visualización de la matemática misma.

De igual modo la autora tuvo en cuenta a Pontón el cual sugiere algunos elementos teóricos que permiten generar un análisis de los procesos de comprensión que lleva el estudiante al recibir información sobre un ejercicio con el denominado lenguaje natural, puesto que a fines de la tesis la autora interpreta que parte de la solución que se da a los problemas matemáticos depende de la comprensión que tiene el estudiante sobre el lenguaje natural; por ello es importante darle explicación y comprender su mensaje cuando los encontramos en los mismos textos escolares o en los ejercicios realizados por los maestros. Entre los procesos realizados en este proyecto podemos destacar que la secuencia generada a lo largo del trabajo investigativo es un insumo útil para los maestros que buscan enseñar algunos aspectos de la función exponencial a través del crecimiento poblacional, se hace destacar que esta secuencia es susceptible a modificaciones, adaptaciones o cambios en pro de mejorar la comprensión de la función exponencial en el aula de clases. De igual forma se define que la comprensión del estudiante en base a la forma en que se escribe el problema o el modelo de representación usado, por ende, explica diferentes formas de hacerlo sencillo al entendimiento buscando así la mejor forma llevar el ejercicio al estudiante.

En base a esto, el ejercicio anterior es de gran ayuda, entrega diferentes formas de enseñar y relacionar la función exponencial con el crecimiento poblacional y a su vez nos permite moldear su estructura con la finalidad de hacerlo entendible y diverso, esto sumado a la

forma de enunciar y a su explicación, contribuye para una buena generación y redacción de instrumentos.

El siguiente estudio es realizado en la ciudad de Medellín, el cual se lleva a cabo por (Ferrando & Segura, 2010a) que se titula: La sucesión de Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza, en donde buscan evidenciar la relación de una rama de la botánica y la matemática mediante un estudio llamado La sucesión de Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza; la rama de la botánica que trabajaron dichos investigadores es la Filotaxis, la cual describen como la ordenación de las hojas alrededor de un tallo; con esto se amplía el concepto trabajado y permite generar una observación de un primer patrón de crecimiento, el cual con análisis y sentido se relaciona directamente con la función exponencial. Dichos investigadores usaron como herramienta principal los procesos de observación, análisis y descripción histórica en donde relacionaron de forma directa la relación de las plantas y la sucesión, respetando que aunque esta se refleja en su gran mayoría, también es muy dependiente del tipo de planta, el lugar donde crece y las condiciones que la cobijan; entre los hallazgos se tiene que poseer este ejercicio, el más relevante es la relación que forma entre la botánica, la matemáticas y la física, dejando así un campo mucho más amplio en el cual estudiantes y docentes pueden navegar con facilidad y desarrollar procesos de relación para la enseñanza.

2.1.4 Antecedentes Nacionales

Continuando con la búsqueda bibliográfica, se puede establecer algunas investigaciones desarrolladas en el sector educativo de la región, en el que se cuenta con un estudio realizado por (Tec Escalante, 2016), teniendo como objetivo documentar el diseño, implementación y evaluación de una secuencia didáctica que promueva en estudiantes de los primeros semestres de nivel superior el desarrollo de conocimiento y comprensión alrededor del concepto de función

exponencial, mediante la modelación de situaciones que impliquen que el estudiante haga uso de conceptos asociados, como variación y tasa de cambio. En el cual, se trabaja el crecimiento poblacional a través de una modelación con la función exponencial; donde se explica el concepto de función de forma detallada y progresiva, tomándolo como un ejercicio complejo que puede ser comprendido y aplicado, una de las primeras ideas que plantea la tesis es que el ser humano como ser pensante, racional e impredecible, vive sujeto al cambio de tal modo que este influye directamente en su propia vida, es por eso que la mejor forma de controlar y avanzar en este entorno es con el uso aplicado de las matemáticas. Para este proyecto implementaron una metodología de análisis didáctico, la cual permitió que la prueba realizada se aplicara dos veces, la primera como piloto para mejorar fallas y ubicar fortalezas, luego la segunda con todos los procesos bien desarrollados permitiendo unos resultados acertados; los investigadores pueden concluir que los estudiantes tiene un manejo general de algunos procesos matemáticos relacionados con la función exponencial y el crecimiento poblacional como objeto de estudio, aun cuando no saben expresarla de una manera exacta. Con este ejercicio realizado se puede generar una nueva mira de la función exponencial y el crecimiento poblacional, se puede emplear dicha modelación y convertirla en un ejercicio de interés para los estudiantes sin perder de vista el objetivo de la presente investigación.

Con el trabajo realizado por (Cordoba Muñoz, 2014), se genera una relación entre la sucesión de Fibonacci y la didáctica en las matemáticas, buscando con esto mejorar la disposición de los estudiantes con ejercicios que muestren una matemática aplicada y funcional, dejando de lado la idea abstracta o las sugerencias hipotéticas. Por esa razón el trabajo se dedicó a mostrar de que maneras se puede relacionar la sucesión de Fibonacci con las matemáticas a través del número de oro, los procesos de filotaxis y demás curiosidades que sitúan a las

matemáticas en un puesto atractivo y con un enfoque interdisciplinar. Este trabajo tiene como función proporcionar ciertos recursos a los docentes en los cuales hace visible la sucesión de Fibonacci y su gran relación con diferentes campos de la enseñanza, la naturaleza y los procesos didácticos variados.

De esta manera se pueden extraer varios puntos validos de este proyecto los cuales son de gran apoyo y aporte, da idas claras sobre el método utilizado, la finalidad de este y como los estudiantes pueden avanzar en su trabajo, especifica los objetivos y como se pueden alcanzar, haciendo de cada actividad un propulsor directo a los procesos que de quieren llevar a cabo.

2.2 Marco legal

Desde el Ministerio de Educación Nacional MEN, se tienen unos lineamientos curriculares para trabajar en todas las instituciones educativas de la básica primaria, secundaria y media, donde permite la construcción de las mayas curriculares y el plan de estudios, que son una ruta de navegación para impartir los distintos conocimientos que permite a los estudiantes un aprendizaje coherente.

En la educación colombiana se contemplan los (*Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*, 2006), en donde se concentran por pensamientos matemáticos, y para esta propuesta investigativa se toma como referencia el pensamiento variacional, por lo que apoya el aprendizaje de los estudiantes y además permite el desarrollo de competencias matemáticas como la resolución de problemas, la comunicación y el razonamiento.

Entre los EBC se contemplan para esta propuesta investigativa los siguientes:

- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

- Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
- Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Es importante dar claridad sobre los Derechos Básicos de Aprendizaje DBA versión 2 (2016) que se relacionan de manera directa con los procesos estipulados en el siguiente documento; por ello y con el propósito de definir la temática de la relación entre la función exponencial y la serie Fibonacci, se menciona los (DBA.2017), quienes permiten realizar el trabajo respecto a los siguientes elementos:

4: Comprende el significado de la razón de cambio promedio de una función en un intervalo (a partir de gráficas, tablas o expresiones) y la calcula.

10: Compara y comprende la diferencia entre la variación exponencial y lineal.

Desde estos lineamientos anteriormente mencionados, se requiere tener en cuenta la asimilación que busca en el estudiante el acercamiento del conocimiento, con nuevas formas de aprendizaje en el aula, donde el docente busca mediar e implementar desde las guías que se diseñan para incidir desde la relación que se da entre la función exponencial y la serie Fibonacci.

2.3 Las matemáticas y su legado en la secuencia de patrones

Las matemáticas han sido una estructura que ayuda a la modelación para una solución de problemas en ámbitos cotidianos; no obstante, en las escuelas y en la enseñanza de las matemáticas es notorio que no se presente la relación entre las diversas fenomenologías con patrones de secuencia que se fundamenta en contextos de la naturaleza, el sector económico, históricos, entre otros, por lo que se precisa en esta investigación la aplicabilidad de sus modelos a través de la indagación y la argumentación.

La sucesión de Fibonacci se toma como punto de partida su origen histórico,

fue en el año 1202 cuando Leonardo de Pisa o Fibonacci compartió con la comunidad matemática y el mundo una de las series más perfectas, estructuradas y aplicables que se puede observar; obteniendo a su vez una relación precisa con rectángulo áureo y describiéndose con una forma de espiral que representa el sentido de su crecimiento, al igual que es la que permite su relación con una gran parte de la estructura en el mundo.

Para entenderla de una mejor manera, se tiene la explicación de su orden numérico, el cual parte desde los números cero y uno en donde las siguientes cantidades se generan mediante la suma de los dos números anteriores en la lista; por ejemplo, a tercera entrada será $0+1$, que da como resultado el número 1, así empieza la lista infinita de números naturales:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_0 + a_1 = 0 + 1 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$$

los elementos van quedando: 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

La explicación propia que se le da a esta sucesión, se basa en una observación de la reproducción de los conejos. Estos animales desde su nacimiento deben madurar durante un periodo de tiempo antes de su primera reproducción; en base a esto, Fibonacci decide observar y termina generando una explicación con el siguiente sentido: una pareja de conejos recién nacidos (pareja 1), necesita antes de reproducirse un periodo de un mes, al segundo mes pueden producir una segunda pareja (pareja2), la cual debe esperar nuevamente un mes para su primera reproducción, sin embargo la primer pareja (pareja 1) puede seguir con su labor reproductiva produciendo una nueva pareja para su tercer mes de vida (pareja 3), ahora bien, la pareja 2 ya

está en capacidad de reproducirse generando una cuarta pareja, y la pareja 1 de igual modo produce una nueva pareja, la pareja 5 y así mes a mes cada pareja fértil produce una nueva, las parejas nuevas maduran y pueden reproducirse generando un crecimiento poblacional basado en la serie Fibonacci; 1,1,2,3,5,8,13,21...

Con dicha explicación, se obtuvo una visualización del proceso distributivo propio de esta serie, se conecta con su forma en espiral creciente y se relacionará con algunos procesos observables o internos en diferentes elementos que podemos encontrar en nuestro entorno; uno de los primeros campos en hacerse observable la distribución Fibonacci es el natural; se puede percibir una estructura de diversas especies; entre estas, los girasoles, las piñas de los pinos, las hojas de las suculentas, la forma en que se organizan las ramas de los árboles, los pétalos de las rosas, y otros muchos casos, los cuales al seguir dicho orden pueden aprovechar la totalidad de los recursos que poseen, como lo es la luz solar, la maduración de frutos, el crecimiento de nuevos brotes, una buena distribución de semillas entre diversos beneficios mas que se hacen evidentes en su ciclo de vida.

En el arte y la arquitectura optaron por aplicar el concepto expuesto por Fibonacci en construcciones de gran importancia, en el arte se tienen creaciones como el hombre de Vitrubio y la Gioconda o Monna Lisa por mencionar solo dos, ya en la arquitectura se puede destacar el Partenón y el Coliseo Romano. Estas obras no solo son de gran importancia en base a su historia, si no que obtiene un título de belleza, armonía, simetría y perfección que hoy día se admira, de igual forma la serie Fibonacci tiene aplicaciones que actualmente se pueden apreciar y aunque estas se dan principalmente en ordenadores y finanzas, siguen siendo de gran importancia para el desarrollo de una empresa, una compañía y la propia nación.

2.3.1 La comprensión de fenómenos en aprendizajes significativos

Es importante reconocer la aplicabilidad de las matemáticas en el ámbito fenomenológico, y su mayor fortaleza desde la resolución de problemas, esta le ha permitido al hombre solucionar circunstancias donde la prioridad es trascender y transformar el conocimiento para facilitar un aprendizaje a otras poblaciones y mejorar sus condiciones de vida.

Desde la propuesta investigativa, se resalta lo expuesto por Ausubel citado por Valenzuela (1963), donde se menciona:

“El conocimiento verdadero solo puede nacer cuando los nuevos contenidos tienen un significado a la luz de los conocimientos que ya se tienen. Por eso el conocimiento nuevo encaja en el conocimiento viejo, pero este último, a la vez, se ve re configurado por el primero. (p.#1)

Este pensamiento permite una interpretación basada en experiencias, la transformación de las mismas en conocimientos y una modelación o reestructuración de ideas anteriormente interiorizados; esto como detonante para la generalidad de los docente, buscando la transformación de lo tradicional dando como resultado intervenciones que permitan al estudiante aventurarse y aplicar lo que se desea compartir como conocimiento en entornos de carácter real en el cual su premisa es responder a una pregunta o suplir una necesidad.

En búsqueda de afianzar el significado de aprendizaje significativo, se referencia la teoría del aprendizaje significativo (Ausubel, 1983) en donde se habla de este como una relación de la nueva información con conocimientos anteriores o previos, lo cual permite que el estudiante incorpore esta información a su estructura cognitiva y así tenga un acceso más eficaz, rápido y fundamentado al momento de responder o utilizar el mismo a su favor.

También se requiere crear estrategias en la cual se potencien habilidades y se generen saberes basados desde las experiencias, lo cual conduce a caminos donde las situaciones y las

vivencias determinan el aprendizaje. Es en este punto donde Bruner (1961) hace referencia al aprendizaje por descubrimiento y sustenta unas bases para que el estudiante sea el constructor de su propio conocimiento a través de lo observado y realizado.

Con ello, este pedagogo estadounidense motiva a quienes están presentes en las aulas educativas a configurar el conocimiento y brindarlo de una manera diferente; asume con firmeza el hecho de que un estudiante aprende mucho mejor cuando tiene que descubrir la forma de solucionar o entender los contenidos educativos con los cuales se encuentra.

En el presente estudio se busca relacionar los contenidos matemáticos con la realidad de los estudiantes, es por esto, que se usa la estrategia didáctica el diseño y aplicación de las hojas de trabajo, ya que debido a su diseño lleva al estudiante de manera progresiva a una situación puntual, en la que deberá indagar, argumentar y exponer puntos de vista concretos, y a medida que los lectores avanzan en sus contenidos de diferentes actividades las cuales permiten descubrir la finalidad de un espacio de reflexión sobre los procesos de interpretación y ejecución.

Bruner resalta que el papel del docente no es el de explicar los contenidos de principio a fin, sino a proporcionar a los estudiantes los recursos y materiales necesarios para que ellos mismos sean quienes adquieran y modelen sus conocimientos rompiendo con esto varios paradigmas tradicionales y estimular positivamente a los estudiantes, invitarlos a generar sus conocimientos mientras que los lleva a tomar riesgos y sacarlos de la zona de confort, forjando así seres humanos capaces, con adaptación y seguros al tomar riesgos; esto es parte de lo que según (Expertos, 2015), menciona Bruner. “Los estudiantes deben aprender a través de un descubrimiento guiado motivado por la curiosidad.”

2.3.2 Aplicaciones que convergen con el contexto

Para las aplicaciones que posee este proyecto investigativo en el contexto, se puede resaltar la función exponencial, en la cual vemos una formula como esta: $F(x) = n^{x+1}$, en donde se puede apreciar un exponente como valor de incógnita y un numero (n) que puede estar en los naturales; es con esta expresión que se trabaja la temática, dando una base sencilla como lo es el numero 2 y un exponente que a medida que la operación de crecimiento avanza, se le suma una unidad, logrando así una representación creciente y aplicable a un entorno donde hay un crecimiento constante. Del mismo modo, la en la expresión se puede tomar como valor variable el numero (n) y dejarse como exponente el dos, afirmando que la cantidad anterior de individuos se duplica cada cierto periodo de tiempo.

Usando estas situaciones como ejemplo, se puede llevar al estudiante a un análisis interesante de los procesos de crecimiento o decrecimiento, asumiendo este como un factor de ayuda y de relación con las temáticas estándar de la enseñanza en matemáticas, con esto se pueden enlazar de forma dinámica las temáticas pertenecientes al currículo con los procesos naturales de crecimiento en poblaciones que están mas ligadas a lo natural, trabajando en conjunto dos temáticas diferentes pero relacionadas en aspectos específicos.

Es en este punto donde se hace posible hablar de lo planteado por (Pallchisaca Suquilanda & Zhimnay Valverde, 2019b) en donde buscan generar una relación entre las matemáticas y la ciencia para hacer un aprendizaje significativo, donde recurren a varias formas y aclaran que se pueden incorporar más de dos materias en un ambiente específico; se sabe bien que para generar un saber bien fundamentado y lógico se hace necesario ver la necesidad o la utilidad que tiene este en ambiente de los estudiantes, además la función exponencial no solo se puede apreciar en los aumentos constantes de poblaciones, sino que es fácil encontrarla en diferentes lugares como la medicina al momento de analizar la propagación de virus, del mismo

modo en el uso de los servicios de internet o la popularidad que adquirió un producto o estilo llevándolo a convertirse en moda.

Es así, como los estudiantes pueden ver diferentes aplicaciones y utilidades de la función exponencial, permitiéndose aprenderla y utilizarla según el enfoque o proyecto de vida que cada uno tenga, apreciando la matemática como un factor necesario para interpretar y comprender su contexto, dándole solución a incógnitas frecuentes.

2.3.3 La relación de función exponencial y serie Fibonacci

Es de resaltar la relación e importancia de similitud presente entre la función exponencial y la serie Fibonacci, en donde, basados en los procesos realizados y los aportes de los estudiantes, se puede definir que su mayor afinidad está inmersa en su orden numérico que representa un aumento o una disminución gradual, la cual se basa en ciertos pasos de carácter simple, en donde ambas, aunque de maneras diferentes, se centran en la descripción de un cambio contante en sus valores, permitiendo ver un crecimiento o un decrecimiento en el estudio planteado; del mismo modo se resalta que ambas tiene una aplicabilidad al entorno en aspectos como la reproducción y crecimiento de poblaciones en animales u organismos.

Todo lo anterior sin dejar de lado que ambas estrategias tienen aplicabilidades en procesos informáticos, de tendencia en el favoritismo de productos, en procesos de construcción de estructuras y procedimientos basados en el campo de la medicina; también es importante mencionar la gran diversidad de aplicaciones que tuvo, tiene y puede tener la sucesión de Fibonacci, en donde la función exponencial con procesos versátiles y flexibles puede ayudar y aplicar para dar apoyo y respuesta a inquietudes frecuentes en un entorno específico. De esta manera se definen similitudes de forma y de orden, en donde ambas representan un

distanciamiento constante y mayor del punto de inicio y define un proceso cíclico que hace posible el ver los avances o los retrocesos según lo planteado.

2.4 La didáctica como ciencia que permite la enseñanza

Basados en los procesos visibles dentro de los planteles educativos, se hace evidente que la enseñanza se vivencia si cuenta con el medio; sin embargo, cada docente o individuo tiene sus propios medios de distribución del conocimiento, lo cual permite obtener características únicas y basadas en su entendimiento; a este proceso se le puede definir desde un ámbito personal como la originalidad o características del docente; no obstante, es de resaltar una parte de los procesos educativos en donde se usan ciertas estrategias o fundamentos para una educación activa y eficiente. Se habla de los procesos relacionados con la didáctica.

En la didáctica se resaltan fundamentos teóricos de educación y formación, en esta se trabajan diversas estrategias de enseñanza, herramientas y teorías para facilitar el aprendizaje en los jóvenes; del mismo modo, se trabajan procesos en donde ciertos puntos específicos pueden ayudar al mejoramiento de los procesos de comprensión; por ejemplo, la parte de los presaberes como lo menciona Ausubel en la citación que le genero (Valenzuela, 1963), describiendo los saberes anteriores o previos como loa base de un saber fundamentado y bien estructurado, donde se permite un avance en torno a lo conocido, no empezar sin fundamentos lógicos.

De igual modo, mencionando a Duval citado por Oviedo et al., (2011), en la cual se hace mención sobre las diferentes representaciones semióticas un estudiante realiza para comprender la relación entre los objetos matemáticos a partir de la conversión entre los registros o en su defecto, entender la transformación del objeto matemático; del mismo modo, asegura que la diversidad de representaciones en base a un mismo tema puede dar claridad y ayudar al

estudiante a comprender mejor el tema, siendo considerado una posible estrategia didáctica de aprendizaje, en esta se menciona que:

El aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión (Página # 13)

En este apartado se ve reflejada la diversidad presente al momento de aprender matemáticas, se tratan diferentes puntos donde se genera un análisis específico, se razona, se entiende y se interioriza lo estudiado y explicado, además se usan diferentes formas para ampliar el entendimiento y por ende se implementan estrategias de conocimiento que son parte de los procesos didácticos atinentes a la rama mayor de la enseñanza.

D'Amore(2006), menciona desde la resolución de problemas, donde se implementan diferentes situaciones a los estudiantes con la finalidad de que aprendan a pensar lógicamente, a interpretar sucesos y a observar lógicamente desde diversos puntos y con diversos procesos de análisis para poder brindar una solución lógica y estructurada a un problema o fenómeno presente en el ambiente y que puede ser una situación que le afecte según su propio contexto.

Es por esto, que se implementan diversas estrategias de observación, análisis e interpretación, ya que es muy probable que los problemas matemáticos aplicados en un entorno tengan una solución basada en lógica o planteamientos sencillos, pero para eso se deben usar diferentes tipos de observación y representación semiótica de la mano con un proceso de saberes

antes de ejecutar un plan y una resolución de problemas acertada con la finalidad de que el plan de ejecución sea realmente útil y funcional.

Todo de aprendizaje amerita un ejercicio mental avanzado lo cual nos lleva a que este sí se ejercita en el momento de enlazar todo de una forma lógica, teniendo en cuenta la utilidad aquella en donde responde de manera certera al propósito de vincular lo natural con la matemática, esto es necesario que lo vivencien los estudiantes en las aulas, siempre y cuando el maestro lleve propuestas que propicien estos espacios para el desarrollo de competencias matemáticas.

También, al enfocarse en otras investigaciones desarrolladas por los estudiantes, según (Berardi & Corica, 2021b) es posible encontrar proyectos estudiantiles relacionados con las matemáticas y estos a su vez pueden tener conexión con lo natural, que es una parte esencial de la mediación pedagógica de este estudio; lo más interesante de este proyecto es que integraron a dos docentes de diferentes áreas, donde ambas son realmente interesantes y tienen sus puntos donde conectan, por ejemplo, la situación que estamos estudiando. El trabajo cooperativo entre profesores con un mismo enfoque es un logro, ya que los estudiantes verán con frecuencia el tema a investigar y se empezaran a preguntar sobre la relación, no solo del tema, si no de las materias que aun tan diferentes comparten algunos conceptos. Una idea interesante del concepto es que:

Se critica la fragmentación del conocimiento en materias, asignaturas o áreas, porque aprender aisladamente significa que el alumno no ve o siente la utilidad o pertinencia de lo que se enseña para ningún asunto que le interesa en el presente, y por tanto no se adhiere inteligentemente a la situación actual. (CITARLO, CON AÑO Y PÁGINA)

Es importante ser conscientes como maestros que la interdisciplinariedad es una herramienta útil en los estudios estructurados, por eso sería una posibilidad verla reflejada entre dos materias, en este caso sería más entre matemáticas y química, que de alguna forma se relacionan en este punto de investigación, el pensamiento espacial y de ubicación se puede ver reflejado en el orden de los electrones y protones en un compuesto o en las distribuciones químicas.

De esta manera, se ve un avance constante entre conclusiones, opiniones y campos de convergencia, continuando con (Adalberto et al., s. f.) el cual se prefirió trabajar en el campo de la agricultura, usando la sucesión y permitiendo que se aprecie la importancia del orden de los objetos en un espacio determinado, alcanzando con ello precisión y permitiendo un trabajo centrado en el desarrollo del pensamiento espacial, así mismo habla del cambio frecuente de las matemáticas, el ser humano avanza, ella también y las formas de verlas se hace siempre diferente, ya no solo se usan los cálculos en papel o las fórmulas reglamentarias, ahora hay muchas formas diferentes de ver un mismo tema y de analizarlo.

Se hace necesario, para dar claridad a lo anterior el definir lo que se trabajará como pensamiento espacial y para ello nos remitimos al (MEN, 1998) en donde define este pensamiento en sus estándares de competencias como un conjunto de tareas cognitivas por medio de las cuales se conforman y manipulan las diferentes representaciones mentales de los objetos ubicados en el espacio, las diferentes relaciones que existen entre estos, de qué forma se transforman o cambian sus características y sus diversas representaciones materiales.

En este punto, se busca que estudiantes y lectores se cuestionen si realmente el mundo esta fragmentado en una cantidad de materias en donde van cada una por su lado, o si todo puede ser relacionado.

Al citar a (Ferrando & Segura, 2010b) los cuales se centraron un poco más en las plantas, la filotaxis de estas y la importancia que tiene para estas el orden de sus componentes, básicamente este es el propósito de la investigación, mostrar como una rama de la botánica se relaciona con las matemáticas, dando ejemplos claros, que pueden dar pistas a los estudiantes, en que lugares observar y en donde enfocar su análisis para un correcto desarrollo del pensamiento espacial y entendimiento de la temática.

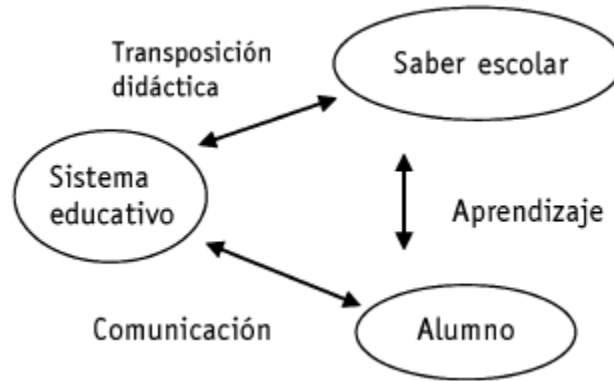
(Rivera & Ricardo López, s. f.) hablan de geometría fractal y sucesión de Fibonacci, donde se analiza este fenómeno de forma detallada y nuevamente se da la oportunidad de potenciar el pensamiento espacial, abriendo paso a nuevas opciones, que a pesar de ser lejanas, llevan una relación con el propósito de analizar desde un parentesco generando sus conclusiones respecto a otras temáticas cercanas y a su vez distintas del original, sin embargo se necesitara de esta para que el análisis se relacione y las ideas anteriores y posteriores se logren enlazar recordando todo y logrando un conocimiento sólido.

También es importante mencionar a Córdoba Muñoz, (2015) el cual habla de algunas aplicaciones didácticas que tiene la sucesión en los alumnos de secundaria; empieza por contar la historia de este número, como fue que surgió y por qué su orden es justamente el actual, siempre enfocados en esto, muestra a medida que avanza una serie de estrategias para modelar, y relacionar las matemáticas y este campo de ciencia buscando que el alumno se divierta y descubra por sí solo cómo es posible la relación planteada, se percibe el enfoque y la oportunidad de potenciar el pensamiento espacial haciendo entendible todo el proceso que se ha mostrado y con el cual se quiere cautivar a quienes se den la oportunidad de conocer este proyecto. En la figura 1, se puede enunciar las características que profundizan los hechos didácticos en el

desarrollo del aprendizaje de los estudiantes, los cuales priorizan el saber escolar desde el sistema educativo, siendo el modelo Brousseau en la teoría de las situaciones didácticas.

Figura 1

Modelo de las situaciones didácticas.



Nota: Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas – Brousseau (2007)

(1998/2007), como se trata de una situación de trabajo en grupo hay dos elementos muy importantes que deben ser tenidos en cuenta: es muy importante que haya un control adecuado

3. Diseño Metodológico.

3.1 Enfoque de investigación

Cuando se hace referencia al enfoque de la investigación, se está hablando de la naturaleza que va a tomar el presente estudio, para esta investigación, se tendrá un enfoque cualitativo, y apuntando a lo que refiere Sampieri (2014) que se estudia una realidad subjetiva, donde se busca aportar conocimientos, generar conjeturas y a su vez, ser una investigación novedosa, donde se conjugan experiencias y practicas inspiradoras que permite a los estudiantes resolver situaciones del contexto; además, se facilita que a través de diferentes medios de recolectar información, se pueda contrastar puestas en escena como: entrevistas, documentos propios no estructurados, imágenes, audios, observaciones u otros recursos, con el fin de hacer un análisis donde la intención es apreciar si se pudo potenciar el pensamiento variacional en los jóvenes con la aplicación del proyecto.

Se pretende diseñar unas guías didácticas y así, ampliando conocimientos nuevos en los estudiantes y su visión referente a resolver situaciones que involucren el crecimiento de poblaciones, teniendo como referencia la función exponencial, pero observando una similitud con la serie Fibonacci.

De igual modo esta será muy útil ya que tiene sus puntos de observación definidos, sabe a dónde va y avanza con los instrumentos y la misma ejecución, para que finalmente, se puedan entender fenómenos naturales donde se involucren los crecimientos poblaciones en el campo.

3.2 Tipo de investigación

Se va a encaminar esta investigación de carácter cualitativo con un trayecto descriptivo, ya que esta busca explicar el porqué de los hechos, en este caso evidenciar los patrones de

crecimiento que se pueden observar en poblaciones, tomando como referencia la función exponencial y alguna relación que se dé con la sucesión de Fibonacci; esto sirve como mediación pedagógica para potenciar el pensamiento numérico-variacional, y así, encontrar un nuevo significado a la resolución de situaciones contextualizadas desde los procesos matemáticos y la aplicación de estos en el entorno.

3.3 Población y muestra

3.3.1 Población

La población en la cual se plantea el trabajo es netamente joven, van a ser estudiantes de la Escuela Normal Superior N.S Candelaria, la cual al estar situada en un ambiente natural facilita la exploración y comprobación de los estipulado en el proyecto; la idea es potenciar el desarrollo del pensamiento numérico - variacional por medio de la resolución de guías didácticas, observación de casos, análisis y ordenanza de los factores que componen las funciones exponenciales y la relación dada con la serie Fibonacci.

3.3.2 Muestra.

Se tienen a los estudiantes de grado 10°, donde participa todo el salón conformado por 28 jóvenes, 15 niñas y 13 niños, en edades que oscilan entre los 14 y 17 años, con gran interés en situaciones del campo, debido a que su tiempo libre esta direccionado a fortalecer y mejorar esta zona en la región para actividades de tipo turístico y agrícola.

Se toma la totalidad del grupo para el desarrollo de la presente investigación, debido a que en este grupo se desarrolla de la practica pedagógica e investigativa del autor, donde se tiene presente las necesidades y dificultades observadas desde el pensamiento numérico – variacional, para que ellos experimenten, visualicen y desarrollen la propuesta planteada, permitiendo mejores avances con este nuevo conocimiento,

3.3 Estructura metodológica

Teniendo en cuenta que el tipo de investigación es cualitativa, se busca la forma de hacer un proceso de indagación transversal ya que se quiere examinar el avance de los jóvenes en torno a su pensamiento numérico – variacional usando como mediación pedagógica guías de Hoja de trabajo para reconocer crecimiento de poblaciones y encontrar la relación con la función exponencial, teniendo como campo de experimentación el mismo entorno al que están acostumbrados.

Se pretende observar el avance en los jóvenes al potenciar el pensamiento variacional, como a medida que se avanza con esto se obtiene una concepción de orden diferente y se posibilita que ellos empiecen a ubicar conscientemente los objetos por un espacio o simplemente conocer sus posiciones respecto al punto de referencia.

Para dar claridad a la metodología implementada, se exponen los siguientes criterios:

Al tener en cuenta el objetivo específico 1: *Clasificar distintas secuencias numéricas, geométricas y representaciones gráficas para categorizarlas en función de crecimiento o decrecimiento*, se implementaron estrategias dentro del aula, para verificar diversas sucesiones, donde se podría encontrar patrones.

Se les presentó a los estudiantes una serie de datos, con ejercicios de secuencias y correspondencias empleando sucesiones abstractas (ver apéndice A). Para este caso, los estudiantes, empiezan a familiarizarse con secuencias básicas y de razonamiento, lo que implica generar habilidades para resolver a futuro situaciones problemas.

La actividad propuesta permite en el estudiante desarrollar pensamiento lógico, analítico y deducir consecuencias de determinada situación.

El análisis que se realiza en esta actividad se comprueba a través del registro de la siguiente tabla 1, la cual está diseñada desde tres componentes como identificar, analizar gráficamente y el desarrollo de habilidades de tipo lógico, la cual se consolidan los resultados para detallar en el análisis

Tabla 1. Resultados de identificación de patrones

Actividad de secuencia abstracta	El estudiante identifica en la secuencia el patrón		El estudiante obtiene el resultado analizando la representación gráfica		El estudiante tiene habilidades para identificar patrones	
	SI	NO	SI	NO	SI	NO
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

Nota: Construcción propia

Para el segundo objetivo específico, se pretende *diseñar una estrategia didáctica que fortalezca la comprensión de la función exponencial a través del crecimiento de poblaciones similares a las de la serie Fibonacci y aplicarla en estudiantes de grado 10º*, para ello se cuenta con la creación de tres guías didácticas, donde se trabaja en base a un contexto frecuente para los estudiantes, estas están distribuidas de forma secuencial en tres Hoja de trabajos o intervenciones directas; en la primer intervención se trabaja específicamente sobre la función exponencial aplicada al contexto de crecimiento poblacional, usando como ejemplo las familias bacterianas que suelen crecer rápidamente. En el segundo Hoja de trabajo se da a conocer la serie Fibonacci

y como esta está directamente relacionada con el crecimiento y distribución de las plantas con el fin de darle eficiencia a sus procesos naturales, de igual forma se centra en explicar la utilidad de esta en términos del crecimiento de poblaciones usando como ejemplo principal la reproducción de conejos y recreando textualmente la situación con la finalidad de analizar y reconocer en ello los números de Fibonacci. Y para la tercera intervención se realizó una cohesión de los temas anteriores en donde la función exponencial y la serie Fibonacci trabajaban juntas para dar solución a planteamientos diferentes de un mismo ejercicio sobre crecimiento poblacional; esto dejó en los estudiantes una clara similitud y a su vez una marcada diferencia, hay que saber en qué condiciones usar cada una y a su vez que las dos pueden ser realmente útiles a la hora de solucionar un problema. Los ejercicios de esta intervención se basaron en tablas de contenido y comparación junto con un ejercicio de construcción sencillo donde se planteaba dibujar un árbol con características pertenecientes a la función exponencial y la serie Fibonacci, todo en un mismo dibujo.

Las guías se pueden observar en el apéndice B, las cuales están diseñadas bajo la rúbrica didáctica implementada por el colegio.

Cada una de las guías trabaja 5 momentos específicos:

1. **Presaberes:** Estos consisten en preguntas o actividades básicas sobre el tema que se pretende abordar, es el primer acercamiento a la temática y le permite al estudiante tener un abrebocas sobre la temática y al docente le deja ver que tanto conocimiento tienen los estudiantes para así poder generar una estrategia adecuada en su enseñanza.
2. **Desarrollo del tema:** En este punto se le da al estudiante los referentes teóricos, formulas o estrategias necesarias para que pueda resolver ejercicios, de igual forma se

le hace un recuento histórico del tema, año de aplicación, utilidades antiguas y actuales y demás recursos que despierten interés y generen conocimiento.

3. **Afiancemos el conocimiento:** Para este ítem los estudiantes tienen a su disposición diversos ejercicios en los cuales pueden afianzar y poner en práctica lo aprendido en la teoría, son ejercicios que muestran un avance en complejidad, empiezan de un carácter básico para ver la aplicación de teoría en el desarrollo del contexto y luego se vuelven un tanto más complicado llevando al estudiante a recurrir a diversos conocimientos anteriores. Así se trabaja un tema nuevo relacionado con los anteriores reforzando y enlazando los saberes.
4. **Actividades explorativas:** En esta actividad se plantean nuevamente ejercicios, solo que ahora van basados en lo práctico y tangible, esto se refiere a situaciones reales o ligadas al contexto, un experimento, una situación institucional, situación social, o cualquier problemática que permita que el estudiante vea reflejado el aprendizaje en un contexto, mostrándole así su utilidad.
5. **Actividades evaluativas:** Como su nombre lo indica, son actividades en donde se pone a prueba los conocimientos adquiridos por el estudiante y a su vez la claridad de la guía, en estas regularmente se tiene una actividad compleja sobre el ejercicio, la producción propia del estudiante reflejada en un ejercicio de su autoría con solución y por ultimo un espacio de autoevaluación y coevaluación; si el trabajo es en grupo se realiza entre los participantes del grupo, o si es individual, se pide de favor al par más cercano ser quien dé su opinión del proceso.

El desarrollo de las guías está pensado para que los estudiantes identifiquen no solo patrones de secuencia sino el crecimiento de poblaciones que se puede dar en fenómenos naturales.

Las guías serán analizadas de manera individual, ya que, de acuerdo a su naturaleza, incide de manera diferente en la relación de patrones de secuencia, crecimiento de poblaciones y la relación que se da con la función exponencial, a su vez, encontrar aplicaciones a series, como la famosa serie Fibonacci, la cual presenta características de patrones de seriación y coherencia con crecimiento poblacional de elementos de las ciencias.

Cada una de las hojas de trabajo, se analizan de acuerdo a los momentos, es necesario indicar que los presaberes son las ideas previas que tienen los estudiantes y desde este punto el docente reconoce las habilidades, conocimientos o debilidades que tienen los estudiantes con respecto al tema que se va a introducir. El momento 2 no se evalúa debido a que es el desarrollo teórico y por ende, los ejemplos son esenciales para la explicación

La guía 1 se analiza teniendo en cuenta los momentos 3, 4 y 5, en la tabla 2 se publican los resultados para representar la información gráficamente, la cual permite hacer una verificación de lo aprendido con las actividades desarrolladas por cada uno de los 28 estudiantes de grado 10°

Tabla 2. Análisis resultados hoja de trabajo 1.

Guía de trabajo 1			
	EJERCICIOS	ANÁLISIS	
		Correcto	Incorrecto
Momento 3 Afianzamos el conocimiento	Ejercicio 1 Ejercicio 2 Ejercicio 3		
	EJERCICIOS	ANÁLISIS	
		Correcto	Incorrecto
Momento 4 Actividades explorativas	Ejercicio 1 Ejercicio 2		
	EJERCICIOS	ANÁLISIS	
		Correcto	Incorrecto
Momento 5 Actividades evaluativas	Ejercicio 1		

De la misma manera, la tabla 3 presenta la información que se diligencia con los ejercicios expuestos en cada uno de los momentos desarrollados durante la clase de la hoja de trabajo 2.

Tabla 3. Análisis de resultados de la hoja de trabajo 2.

Guía de trabajo 2			
	EJERCICIOS	ANÁLISIS	
		Correcto	Incorrecto
Momento 3 Afianzamos el conocimiento	Ejercicio 1 Ejercicio 2		
	EJERCICIOS	ANÁLISIS	
		Correcto	Incorrecto
Momento 4 Actividades explorativas	Ejercicio 1 Ejercicio 2 Ejercicio 3		
	EJERCICIOS	ANÁLISIS	
		Correcto	Incorrecto
Momento 5 Actividades evaluativas	Ejercicio 1		

De igual manera, en la tabla 4, se puede verificar los resultados en los momentos 3, 4 y 5 obtenido por los estudiantes de grado 10° la cual hace alusión a la semejanza la función exponencial y la serie Fibonacci.

Tabla 4. Análisis de resultados hoja de trabajo 3

Guía de trabajo 3			
	EJERCICIOS	ANÁLISIS	
		Correcto	Incorrecto
Momento 3 Afianzamos el conocimiento	Ejercicio 1 Ejercicio 2		
	EJERCICIOS	ANÁLISIS	
		Correcto	Incorrecto
Momento 4 Actividades explorativas	Ejercicio 1 Ejercicio 2		
	EJERCICIOS	ANÁLISIS	
		Correcto	Incorrecto
Momento 5 Actividades evaluativas -	Ejercicio 1 Ejercicio 2		

Para el tercer y último objetivo específico, se requiere *evaluar la estrategia implementada para reconocer desde la función exponencial el crecimiento de poblaciones en cualquier contexto*, esto permitirá afianzar conceptos que llevarán al estudiante a desarrollar actividades de tipo analítico, argumentativo, crítico y científico, por lo que es necesario reconocer desde lo planteado, situaciones que permitan condicionar desde crecimientos poblaciones la categorización que se da en fenómenos reales.

Para este objetivo, se pretende evaluar desde dos frentes, una triangulación que permita verificar si la teoría empleada desde las visualizaciones y las representaciones semióticas demuestran crecimiento de poblaciones a partir de las actividades realizadas en las guías

propuestas. Y desde otra mirada, se verificará con un cuestionario que permita que el estudiante valore el proyecto desde varias perspectivas de aprendizaje, de didácticas y de investigación en el aula.

Ante el cual se implementó la última de las guías, esta fue tomada como un resultado final del aprendizaje de los estudiantes teniendo en cuenta que posee actividades de análisis y ejecución de ambos temas trabajados, lo que la hace perfecta para clasificarse como uno de los resultados principales del proceso, de igual modo fue de utilidad para reconocer el impacto de las intervenciones en los estudiantes, ya que si estos no estaban interesados se vería reflejado en sus producciones individuales, grupales y su propio comportamiento en el aula de clases.

Es así, como todo el proceso de intervención y los ejercicios explicativos formaron parte del mismo proceso evaluativo, dejando la solución de los ejercicios como prueba fehaciente del interés, disposición y ampliación del conocimiento de los estudiantes.

3.5 Validez y pilotaje de los instrumentos

Las guías elaboradas para su implementación, tendrá validez por parte de pares externos y un pilotaje antes de aplicarlas con estudiantes de un curso contrario. En la tabla 2, se puede observar los ítems que serán validados y los aspectos de suficiencia, claridad, coherencia y relevancia que darán luces para mejorar y fortalecer las guías desde el aprendizaje que pueden lograr los estudiantes.

Tabla 5. Validación del pilotaje

ITEMS	SUFICIENCIA	CLARIDAD	COHERENCIA	RELEVANCIA
ACTIVIDAD INTRODUCTORIA Reconociendo patrones en secuencias				
HOJA DE TRABAJO 1 Reconociendo patrones de crecimiento Claridad teórica.				
Coherencia de actividades.				
HOJA DE TRABAJO 2 Descubriendo la sucesión de Fibonacci Claridad teórica				
Coherencia de actividades				
HOJA DE TRABAJO 3 Función exponencial y sucesión de Fibonacci, una forma de explicar el crecimiento poblacional Claridad teórica				
Coherencia de actividades				

3.6 Fases de investigación

Fase I: Rastreo bibliográfico.

En esta primer fase se genera un espacio de búsqueda intenso en el cual se recolecta información que sea de utilidad a la investigación, en primera medida se buscan documentos que tengan una relación directa con los propósitos o enfoques del proyecto, ya después de conseguir una fracción abundante del mar de información que se tiene, se empiezan a aplicar los filtros, estos son características fundamentales de funcionalidad respecto al proyecto planteado, la construcción teórica por medio de citas, se toman ideas, se aplican y se avanza en torno a la complejidad, es así como se construye y se culmina una primera fase del proyecto.

Fase II: Diseño metodológico.

En este aspecto de diseño, se extraen las ideas más importantes del proyecto de investigación planteado, se estudian, se resaltan y se profundizan generando así unas categorías de estudio específicas en las cuales trabajar y fortalecer; teniendo estas en mente se pasa a generar la estructura de ejecución, evaluación y análisis para con ello observar la utilidad, aplicabilidad y función de estos puntos, dando un sentido al proyecto, un camino a seguir, unas metas claras y un paso a paso para llegar a la finalidad de una forma acertada y concreta.

Fase III: Implementación y aplicación.

Para este punto de la investigación se busca generar las intervenciones necesarias, las cuales son el material de trabajo para implementar, evaluar y verificar la validez de la investigación, es de resaltar que este proyecto realice como intervención unas hojas de trabajo en base a actividades de desarrollo práctico, mental, de observación, análisis y reflexión con las cuales se vio lo aplicado en un contexto real. De la aplicación de cada instrumento se obtienen conclusiones y se retroalimenta en la próxima intervención, permitiendo a los estudiantes tener un mejor dominio, una explicación certera y una verdadera actividad de enseñanza e inclusión en el aula.

Fase IV: Verificación de información.

Para terminar se ejecuta la última fase, la de verificación, en esta se mide la veracidad de los planteamientos y la viabilidad que tuvo el proyecto, se analizan los resultados de todas las intervenciones y se sacan las conclusiones pertinentes y sinceras en donde se muestra que a partir del avance, se da sentido si lo aplicado, lo propuesto, lo defendido y lo estructurado tiene o no un sentido real y aplicable, es por eso que la investigación se reduce a los resultados siendo estos favorables y demuestra con ello si el proceso que se siguió y lo que se implemento tuvo éxito.

4. Resultados y discusión.

Para que este proyecto obtenga los resultados esperados, se van a implementar varios procesos de intervención en el aula, en donde no solo el ambiente natural y la observación serán factores importantes, sino que lo artístico va a jugar un papel relevante; se implementará una hoja de trabajo con secuencia didáctica como instrumento principal de la investigación, esta estará compuesta por un cuestionario inicial el cual se presenta unas ideas previas de los estudiantes, luego la explicación acertada de la sucesión de Fibonacci y cómo se puede implementar esta para potenciar el pensamiento variacional; por último se responde el mismo cuestionario del principio y se va a estudiar o comparar el nivel de apropiación antes y después de la solución de esta guía.

Junto con esta, se pretende impulsar el espíritu de observación, análisis y conclusión con un trabajo autónomo, en donde se busca motivar a realizar trabajo de campo (salida a zonas verdes), con el fin de recolectar fotografías sobre plantas que sigan el patrón de la sucesión, luego escogerán una y darán una explicación de como esta responde a la serie Fibonacci.

Finalmente se proporciona un espacio de socialización, donde se pondrá en común los conocimientos adquiridos.

4.1 Resultados actividad introductoria

Los estudiantes tuvieron a su disposición un taller introductorio (Ver apéndice A) el cual estaba conformado por 6 figuras con diferentes patrones de secuencia, cada uno con su forma propia de construcción y solución; el papel que cumple este taller es de acercamiento a la temática, brinda la oportunidad de entrar en el tema principal sin ir directo a este y les permite a los estudiantes una interacción con los procesos de secuencias de representaciones gráficas.

Las figuras aun siendo la actividad de acercamiento e introducción se tuvieron en cuenta con la finalidad de observar la afinidad y lógica de los estudiantes con estos temas, por ende, se genera una tabla en la cual se expresan los resultados obtenidos y se permite consolidar los resultados, obteniendo así un punto de partida con los estudiantes sobre el tema de secuencias, patrones y crecimiento. En la tabla 6, se pueden apreciar los resultados de la guía introductoria, en la cual se tienen tres informaciones que generan la coherencia y la relación entre diferenciar y encontrar patrones de series en el uso del razonamiento lógico – matemático.

En una primera categoría se pretende identificar la secuencia, de las 6 preguntas, la mayoría de los estudiantes lograron reconocer el patrón presente y que lo lleva al resultado correcto. En una segunda categoría se tiene una incidencia en el reconocimiento de patrones a través de la representación gráfica, lo que permite evidenciar lo mencionado por (Hitt, 1997), en su artículo de investigación, visualización matemática, en este menciona lo dicho por Zimmermann & Cunningham (1990), que reza lo siguiente:

Visualizar un diagrama significa simplemente formar una imagen mental del mismo, pero visualizar un problema significa entenderlo en términos de un diagrama o una imagen visual. La visualización matemática es el proceso de formación de imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento

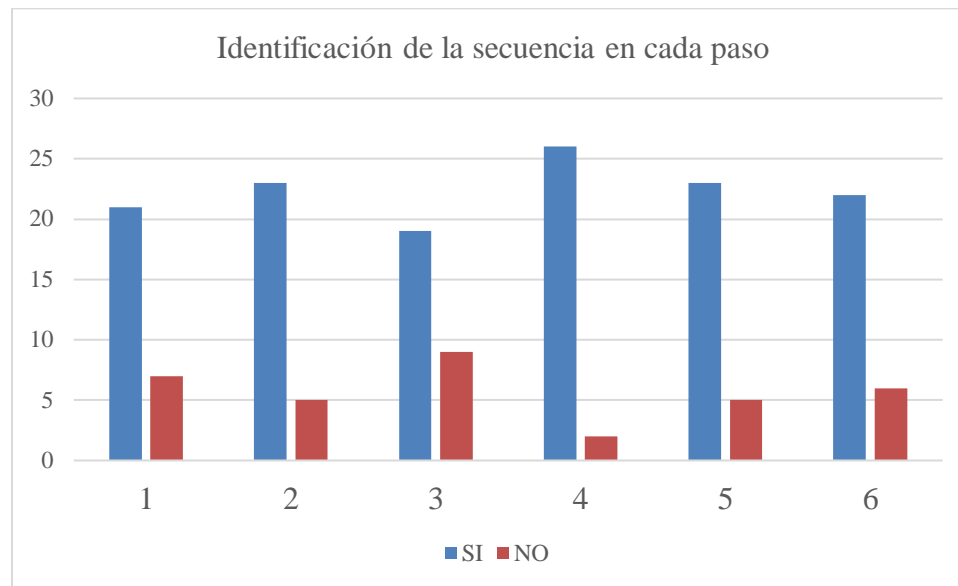
También se perciben habilidades que tienen los estudiantes presentes para identificar las características de representaciones visuales y gráficas, además que encuentran la relación entre movimiento de las figuras y la validación que los lleva al resultado final de manera correcta. La mayoría de los estudiantes cumplen con el reconocimiento de las tres categorías explicativas, las cuales pueden incorporar en actividades de la vida diaria.

Analizando cada uno de los ítems, se puede tener claridad frente a la respuesta arrojada por cada uno de los estudiantes, los que se contempla lo expuesto en cada uno de los ejercicios a desarrollar, como se muestra en la tabla 6

Tabla 6. Item de calificación actividad introductoria

Identifico la secuencia en cada paso		Comprende la representación gráfica		Tuvo habilidad para encontrar el patrón	
SI	NO	SI	NO	SI	NO

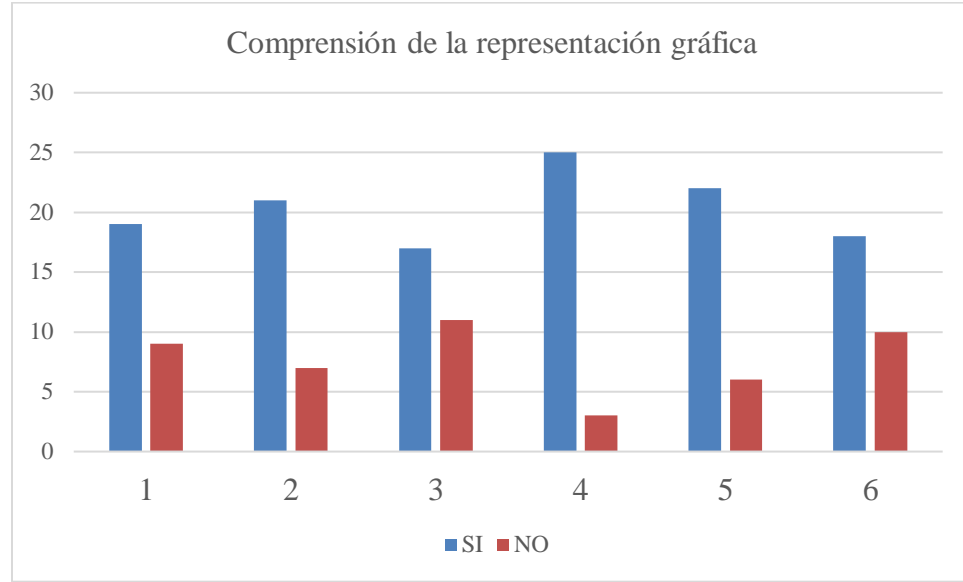
A continuación, se observan los resultados arrojados durante la aplicación de este primer instrumento, donde en la figura 2, la mayoría de los estudiantes logra identificar las secuencias, teniendo en cuenta giros, cambios entre los elementos de las figuras, rotaciones, traslaciones, aumento o disminución de figuras geométricas, entre otras. Los estudiantes que no lo lograron en el tiempo estipulado, les dio dificultad porque no consideran desarrollar desde el análisis visual tener en cuenta elementos y propiedades de la variación entre cada una de las figuras presentadas.

Figura 2. Identificación de la secuencia

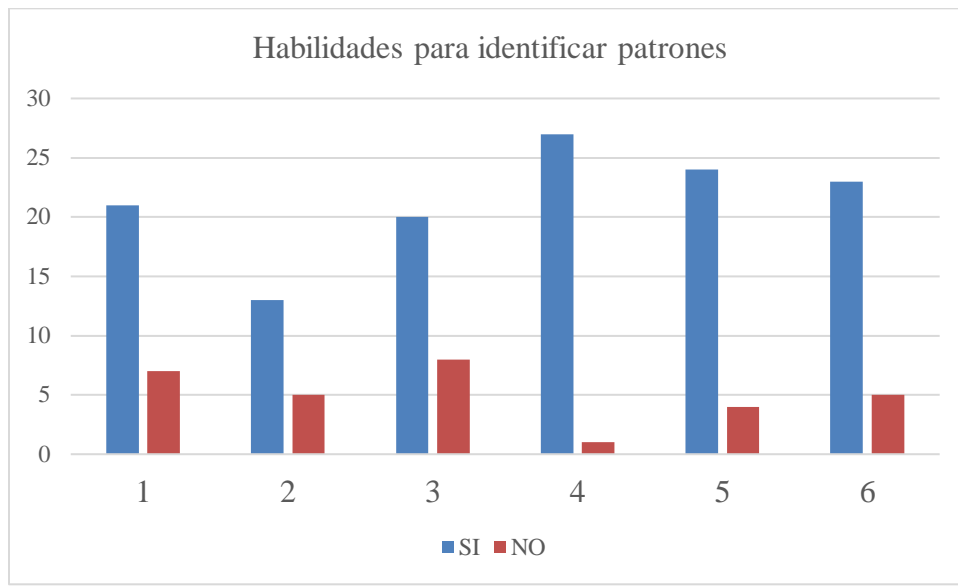
Para la figura 3, los estudiantes demostraron un nivel de apropiación favorable, sin embargo, en paralelo con los demás aspectos a evaluar se tiene una mayor dificultad, al momento de analizar y comprender el aspecto final de la secuencia tenían que generar un mayor esfuerzo, saliendo por completo del límite apreciado como coherente, es de esta manera en que los estudiantes y docente denomina relevante el fortalecer aspectos de comprensión que no se rijan únicamente en el campo numérico.

En base a esto se inserta en el estudio lo descrito en (Resumen_coloquio_2012.pdf, s. f.), donde adhieren la siguiente idea propia de Duval: “La comprensión en matemáticas moviliza siempre la implícita o explícitamente al menos dos registros; dicho de otra manera, la comprensión en matemáticas requiere la coordinación y el funcionamiento en sinergia de varios registros”. Es de esta manera como en base a la implantación de varios registros se puede considerar una mejora en la comprensión de los estudiantes.

Figura 3. Comprensión de la representación gráfica



También es importante destacar, la habilidad que tienen los estudiantes para encontrar patrones en secuencias numéricas, gráficas y de razonamiento. Es por esto que se contemplan que es necesario trabajar más este tipo de ejercicios con los estudiantes, ya que no se tenía la visualización de todo un conjunto con sus elementos, sino que la revisión en muchos ejercicios fue analizada por separado, teniendo referentes poco inusuales para encontrar el verdadero patrón en la secuencia, aunque en la figura 4, se puede interpretar que la mayoría de los estudiantes declaro tener ciertas habilidades, pero manifestaron que se debía profundizar más en la temática y además, tener mayor revisión de este tipo de ejercicios.

Figura 4. Habilidad para encontrar patrones

4.2 Resultados de las hojas de trabajo

A los estudiantes se les aplicaron 3 hojas de trabajo las cuales a su vez estaban divididas en 5 momentos, los cuales han sido determinantes en el planteamiento de la rúbrica didáctica planteada. En el proceso de investigación que se realizó se tuvieron en cuenta principalmente los últimos tres puntos de cada guía, ya que estos están basados en solución de problemas, reflexión, comprensión y formulación; en cambio, las dos primeras secciones son actividades de saber previo y abordaje teórico. Es así como cada hoja de trabajo posee un propósito específico y obtienen resultados que resultan favorables a la investigación.

En este primer apartado se habla sobre la primera hoja de trabajo, esta está directamente relacionada con la función exponencial, la cual se empieza a hacer presente desde el primer momento, en este que trabaja los saberes previos en base a preguntas, indaga de forma discreta en los conocimientos de los estudiantes, escudriñando en sus memorias y reflejando en respuestas concretas lo que ellos saben y recuerdan sobre esta función, en el segundo punto se

trabaja todo lo que describe y explica esta función, de donde surgió, por quien salió a la luz, en que se suele utilizar, la fórmula de la misma, y como solucionar los problemas que de ella se pueden derivar; hasta este punto los estudiantes están recordando todo lo que compone el termino de función exponencial y tuvieron ejemplos claros de cómo solucionar ejercicios con estas, acción a la cual respondieron de una forma bastante fácil, tienen conocimientos frescos sobre el tema y la complejidad de esta hoja de trabajo representa un reto, pero no un obstáculo insuperable.

Continuando con el proceso los estudiantes empiezan a diligenciar los puntos restantes, en los cuales se desarrollan ejercicios prácticos, es en este punto donde se pone a prueba el conocimiento y la comprensión que tiene el estudiante; el apartado tres le presenta a los jóvenes un primer ejercicio en el cual deben calcular el crecimiento poblacional de una familia X de bacterias, para ello se les facilita una definición y una formula base para este ejercicio. Es de resaltar que los estudiantes presentaron un poco de dificultad al momento de solucionar esta incógnita, aparentemente esta fórmula era nueva para ellos y tuvieron la complicación de que los datos se presentaban inmersos en el ejercicio acción a la cual no estaban acostumbrados, continúan con dos ejercicios los cuales fueron un poco más familiares o entendibles para ellos, tenían unas situaciones, los datos y con estos debían solucionar la ecuación y evidenciar la respuesta.

En el cuarto punto de la primer hoja de trabajo se implementó la primer actividad práctica, en esta los estudiantes estarían poniendo en paralelo dos acciones y a su vez dos frecuencias numéricas relacionadas con la función exponencial, este ejercicio fue divertido, practico y entendible para los jóvenes, se notaba en sus interacciones el interés y el asombro en base a dicho ejercicio, después de esto a la intervención solo le quedaban dos puntos más, un

ejercicio básico de función exponencial con cierta modificación para asemejarlo a la sucesión Fibonacci y el quinto y último punto de la hoja de trabajo, en este los estudiantes debían crear y solucionar un ejercicio por cuenta propia lo cual fue una experiencia nueva para ellos, la costumbre de ser quienes solucionan y no quienes construyen los obligo a salir de una zona de confort preestablecida; aun así el ejercicio fue bastante satisfactorio le permitió al estudiante ejecutar y establecer los parámetros para crear y solucionar una incógnita matemática.

Teniendo establecido lo anterior, se inicia la segunda intervención con la siguiente hoja de trabajo; en este segundo proceso y con el análisis realizado en base al primero, se implementó una estrategia más dada a lo experimental que a lo numérico, de igual forma el segundo tema de intervención es la sucesión de Fibonacci, tema nuevo para los estudiantes pero bastante interesante y bien acogido, los chicos no presentaron dificultad alguna para entender su secuencia de números o su proceso de distribución, al igual que lo ligaron fácilmente a los procesos naturales de las plantas.

Esta segunda hoja de trabajo empieza con los protocolarios de presaberes y descripción del concepto, lo cual los estudiantes absorbieron con gran facilidad puesto que desde la parte previa se interesaron y participaron sin miedo a caer en ningún error, y ya para la parte del concepto, historia y función de la sucesión fue realmente de su interés, la fascinación de ver un concepto matemático inmerso en las plantas que le suelen rodear hace que este nuevo conocimiento sea divertido e interesante. Pasando de esta manera a la parte de operaciones en el punto tres, tenemos como afianzamiento tres ejercicios, de estos el primero se vio superficialmente en la parte teórica, es el acercamiento a los números de Fibonacci a través del ejemplo de la reproducción de los conejos, el segundo ejercicio es mas de escritura e interiorización del concepto operativo y el tercero se acompañó con un espacio en el cual los

estudiantes podían dibujar la forma que creían tiene dicha sucesión; es sorprendente ver como los estudiantes trabajando un tema nuevo pueden entender tan fácilmente y a su vez ver la importancia que tiene el material real y de manipulación para agregar conceptos y conocimientos, aunque se trabajó el crecimiento poblacional en el ejemplo de conejos, los estudiantes estaban sorprendidos de ver la proporción numérica relacionada con componentes de entornos naturales sin intervención humana.

Como se comentó anteriormente para estas actividades los estudiantes dispusieron de diferentes materiales didácticos y de manipulación, los cuales tenían una función específica. Por ejemplo en el punto cuatro nos encontramos una primer actividad de recortar y comparar en donde los estudiantes descubrieron mediante la medida de unas tiras de lana que la sucesión de Fibonacci seguía un patrón exacto en donde sus proporciones daban perfectamente; del mismo modo disponían de un segundo ejercicio en el cual debían centrar su energía en la observación de algunas plantas y hallar en estas la forma que le habían asignado a la sucesión, dando como resultado algunas correcciones y una interpretación de la espiral como forma de los números de Fibonacci en orden; es importante resaltar también el tercer ejercicio de este apartado en el cual se relacionó esta serie de Fibonacci con el rectángulo áureo y se le permitió una relación directa entre estos con la espiral. Ya para finalizar con la segunda hoja de trabajo, en la quinta actividad se les permitió a los estudiantes un espacio de investigación e intervención en donde, de forma autónoma averiguaron sobre la serie de Fibonacci, sobre sus diversas aplicaciones y campos de intervención, para con ello generar un espacio de dialogo al final y enriquecer de esta manera el conocimiento general del grupo.

Es así como llegamos a la tercera hoja de trabajo, en la cual se generó el enlace entre Fibonacci y la función exponencial, para esta intervención se uso la misma estructura que en las

guías anteriores, se inició con los presaberes, en donde se preguntaron cosas vistas en las hojas anteriores y se tuvo una agradable sorpresa al ver que los estudiantes lograron recordar, aprender y expresar sobre lo que se les preguntaba en dicho punto. Luego en la parte de abordaje, se tomó información concreta de lo visto en las primeras guías y a su vez se amplió con datos y factores de similitud y relación, formando entre estas dos temáticas un lazo de similitud aun con sus diferentes procesos.

Simultáneamente se empieza a trabajar la parte operativa dando inicio con el tercer punto de la tercer hoja de trabajo, este estaba constituido por dos ejercicios en donde los estudiantes organizaban y comparaban información, usaban una tabla de contenidos en la cual se generaban operaciones, se hacían paralelos de comparación y se respondía a preguntas simples con bases fundamentadas en la temáticas trabajadas; los estudiantes en su mayoría mostraron una buena actitud y fácil entendimiento, solucionaron, compararon y respondieron con gran facilidad, aparte construyeron un paralelo de similitud interesante basado en el crecimiento o amplitud en sus distancias numéricas basados en sus series o números estimados.

En el cuarto apartado o momento de esta hoja de trabajo se desarrollaron dos ejercicios en los cuales el cálculo y el arte jugaron un papel importante en este proceso, el primer ejercicio se trató de la construcción de un árbol usando a Fibonacci para sus ramas y la función exponencial para la cantidad de hojas presentes en dicha construcción, es importante ver el interés de los estudiantes cuando en los temas rígidos como matemáticas se incluye un tema más libre como el arte, cada uno generó su construcción con los parámetros establecidos y a su vez con su propio sello de autoría; al continuar con la temática de este apartado y con el segundo ejercicio, se toma ahora una situación problema en la cual se ve un crecimiento poblacional de palomas mensajeras y al mismo tiempo un incremento del valor en base a la edad y experiencia

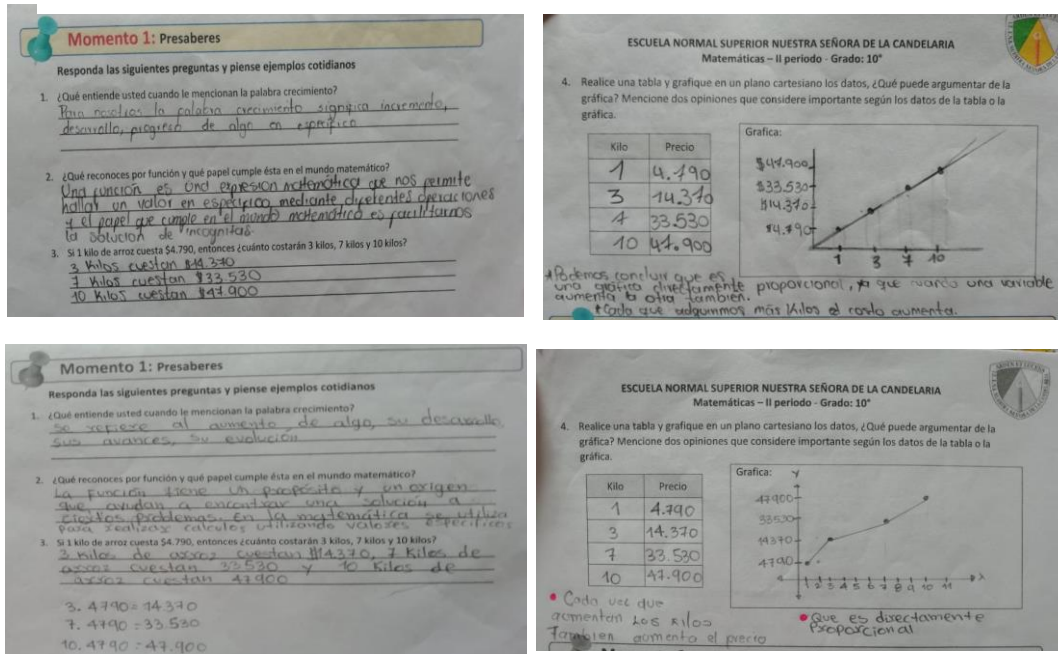
de las palomas, la construcción del ejercicio se basó en base a la posibilidad de implementar ambas temáticas, cosa la cual los estudiantes hicieron posible al usar Fibonacci para el crecimiento poblacional y la función exponencial para el valor de las palomas según su experiencia, y aunque les fue un poco complejo entender la situación, los estudiantes en su mayoría generaron una solución satisfactoria del ejercicio.

En el quinto y último momento de la tercer intervención se tiene una situación similar a la vista en el primer proceso, los estudiantes deberían ingeniar un ejercicio en el cual necesitarían usar la función exponencial y la sucesión de Fibonacci para encontrarle una solución adecuada y aunque este proceso se llevó algo más de tiempo, la mayoría de los resultados fueron favorables, los estudiantes demostraron con sus construcciones el entendimiento de la temática y la importancia de ver la diferencia y la similitud de estos dos temas en un ejercicio de poblaciones y construcciones.

4.2.1 Análisis de resultados de hoja de trabajo 1

En el momento 1, se desarrollaron presaberes, los estudiantes respondieron en base a aquello que ya tenían preestablecido, los aprendizajes netamente institucionales, por eso se decide trabajar en primera medida la función exponencial teniendo presente que en la figura 2, se presentan algunos resultados desarrollados por los estudiantes, donde el presaber demuestra que tienen conocimientos previos y que se les facilita la comprensión algebraica, gráfica y analítica de los apartados matemáticos expuestos en la función exponencial.

Figura 5. Registro fotográfico de respuestas al presaber

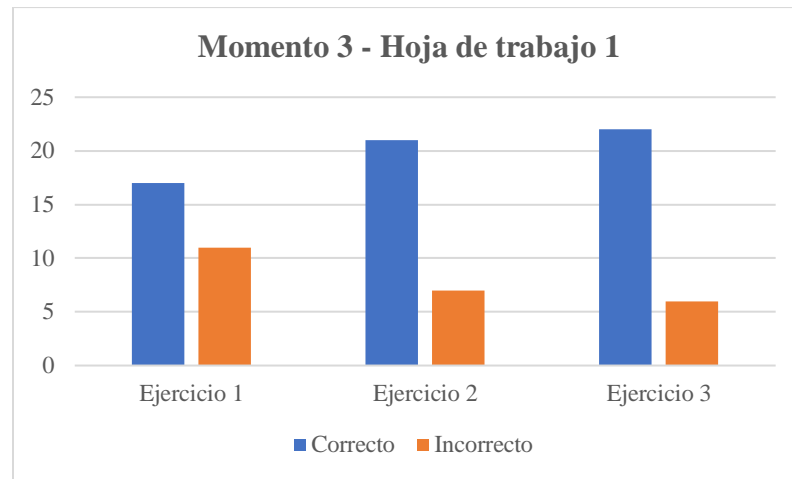


Es notorio en los resultados de los ejercicios dos y tres que el nivel de comprensión de los estudiantes fue bueno, sus respuestas están bien constituidas, es de esta manera como se abrió un espacio en las preguntas donde se pudo implementar parte de lo descrito en presaberes y abordaje, estos ejercicios tenían relación con los procesos exponenciales, además mostraban un crecimiento proporcional respecto al tiempo y cantidad, acción la cual se vio reflejada en la primera parte de presaberes.

Los resultados han sido satisfactorios para el desarrollo del momento 3, la realización de los ejercicios tiene una mayor favorabilidad, esto se ve reflejado en la figura 3, teniendo que para el ejercicio 1, 2 y 3 la mayoría de los estudiantes contestaron de manera acertada. En este ítem se preguntaba por el crecimiento de una población donde el estudiante debía solucionar situaciones de crecimiento en base a la información que se le entrego en el segundo momento, el primero tenía una característica y solución diferente pues para este se usó la fórmula general del

crecimiento poblacional, mientras que para los dos siguientes se usaron procesos de función exponencial.

Figura 6. Resultados de hoja de trabajo 1, momento 3

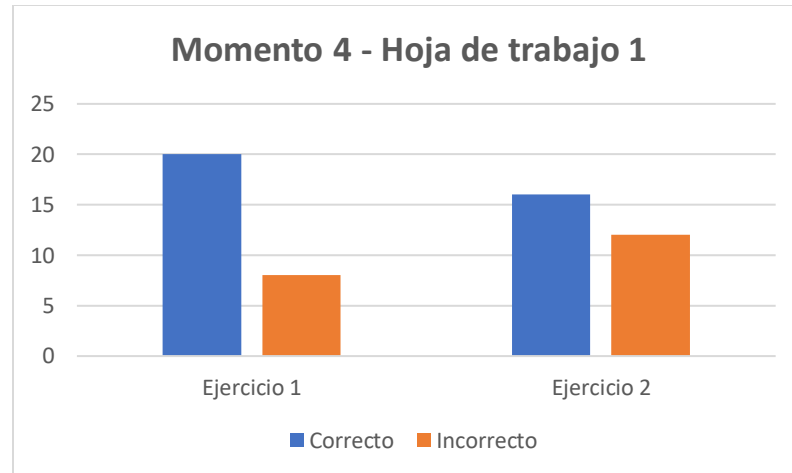


Continuando con el momento 4, en el cual se desarrollaron dos ejercicios interesantes, el primero de interacción, con el cual los estudiantes no tuvieron inconvenientes marcados, ya que los procesos donde pueden observar los cambios son de fácil asimilación y el segundo de ejecución numérica, en el cual los estudiantes tuvieron un poco más de dificultades, aunque es de resaltar que este ejercicio les podía resultar complicado ya que poseía intervención de la sucesión de Fibonacci, la cual aún no conocían.

En este punto la intervención de presaberes ya no es tan marcada, aun así sigue haciendo parte del proceso, debido a la exposición a una situación real y frecuente les permite un mejor manejo, al igual que la manipulación de factores y las consecuencias de estos en factores externos, como ejemplo se tiene la actividad de dobleces versus capas en donde cada doblez realizado duplica el número de capas de la siguiente manera: 0 doblez resulta en una capa, 1 doblez resulta en dos capas, 2 dobleces resulta en 4 capas, 3 dobleces en total nos da 8 capas y

así sucesivamente hasta donde se permita don el material de trabajo; por esto es conveniente generar una intervención compacta, precisa y lógica de principio a fin.

Espacio del título

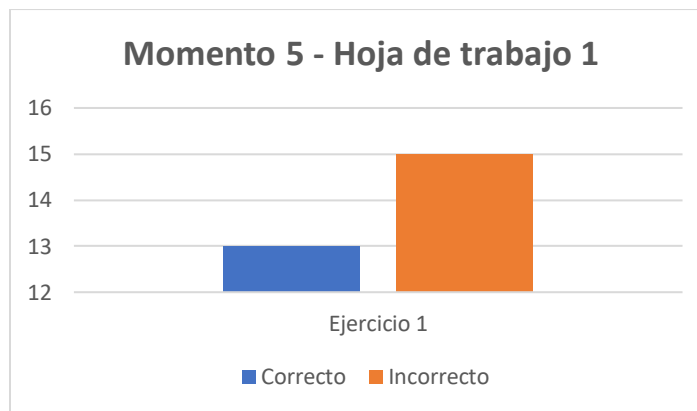


Se tiene un momento 5, en el cual solo se trabajó una actividad, esta se usa regularmente para medir los conocimientos, la profundidad del entendimiento y el saber natural del estudiante, en muchas ocasiones se cree que una sola actividad no es suficiente, pero en esta se busca sacara al estudiante de su espacio como espectador y convertirlo; finalmente, en protagonista de su aprendizaje; es así, como se le da la oportunidad al estudiante de generar con sus palabras, saberes y conceptos un único ejercicio de autoría propia en el cual deban darle una coherencia, una finalidad, una solución u una formulación en base al contenido trabajado.

Todo lo anterior suena lógico e interesante, hasta el momento en el cual se encuentra con la realidad estudiantil, muchos de los estudiantes, la mayoría para ser exactos no lograron con éxito formular un ejercicio completo, se quedaron solo con la parte de introducción o lograron hacer una formulación pero esta no encajaba con la necesidad, y un pequeño grupo de ellos ni

siquiera intento generar el ejercicio afirmando que esto era demasiado complicado; al observar esta dificultad de los estudiantes se decide que en el tiempo restante de la clase se implementaría un pequeño curso para trabajar la formulación de problemas. Al principio la participación estaba limitada; sin embargo, después varias construcciones los estudiantes empezaron por mérito propio a construir sus ejercicios centrados y lógicos, lo que demuestra que la figura 7, los resultados no fueron los esperados, por lo que se debe trabajar en otras estrategias para la implementación del concepto de crecimiento poblacional, teniendo en cuenta a la serie Fibonacci para la segunda hoja de trabajo.

Figura 7. Resultados momento 5, hoja de trabajo 1.

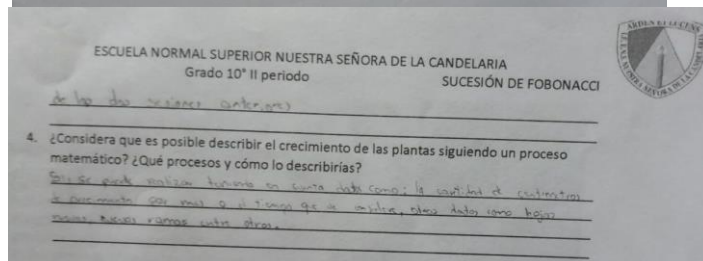
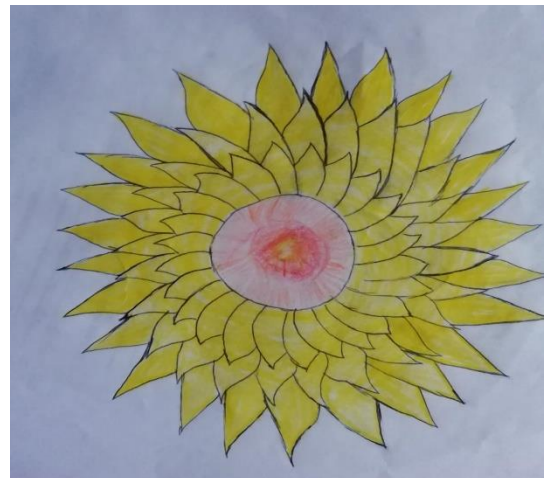
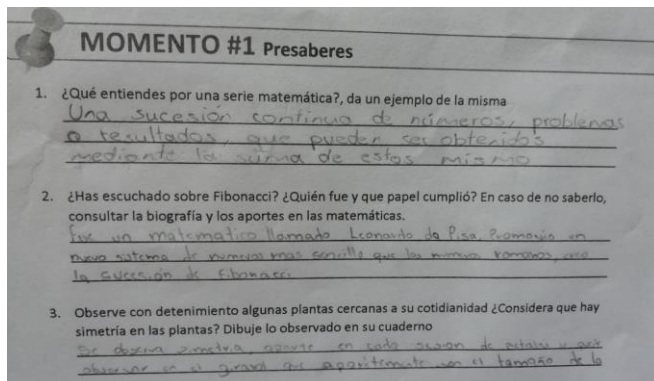
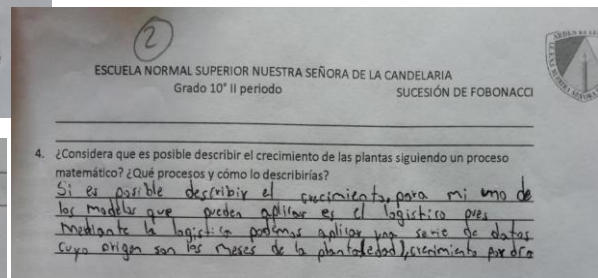
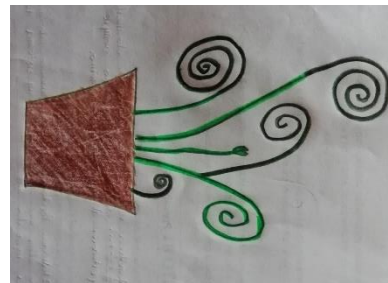
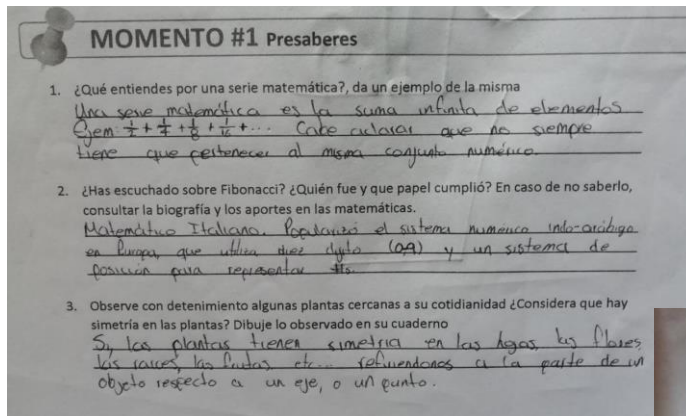


4.2.2 Análisis de resultados de hoja de trabajo 2

En el momento 1 de la segunda hoja de trabajo, de nuevo entran en juego los presaberes, puesto que en este punto se trabaja sobre la sucesión Fibonacci, siendo esta un campo inexplorado para los estudiantes; aun con esta pequeña dificultad que a su vez es una gran oportunidad, se implementaron unas preguntas concretas y simples donde los estudiantes aun sin tener un saber específico del tema se podían imaginar el camino que tomaría la intervención, además al tener la presencia de diversas plantas en el aula, se generó un espacio de intriga y

exploración. En la figura 8, se aprecian los procesos realizados en la actividad de saberes previos, las cuales son de utilidad y ayuda para los procesos que se llevan a cabo en el resto de la intervención, donde los estudiantes han dado respuestas concretas y se empieza a observar mejor afianzamiento para la comprensión del concepto a través de sus ideas previas.

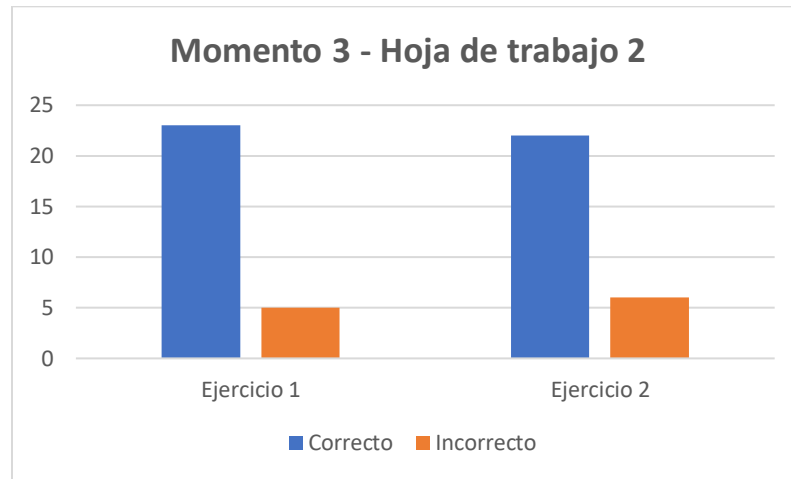
Figura 8. Registro fotográfico momento 1, hoja de trabajo 2



Los resultados obtenidos y la ampliación de teoría son considerados favorables para el desarrollo de esta segunda intervención, en especial para los puntos tres, cuatro y cinco, los

estudiantes generaron un análisis, una observación y un enlace entre la sucesión de Fibonacci y el desarrollo natural de las plantas, su crecimiento, su organización y en algunos aspectos de distribución y reproducción; por ejemplo, en el primer punto del tercer apartado nos encontramos con el ejercicio tradicional sobre la sucesión de Fibonacci, el cual trata de la reproducción de los conejos; los estudiantes de una forma natural entendieron lo que sucedía con la familia de conejos, los espacios prudentes entre el nacimiento y su reproducción al igual que quienes bajaban solos o ya con capacidad de generar otra familia, encontrando con esto el patrón de los números de Fibonacci de la mano de un ejemplo que los cautivo.

El segundo punto del tercer apartado se hace presente e importante, es en este en donde se le da una forma establecida a la sucesión de Fibonacci, primero se les generan unas cuantas preguntas a los estudiantes y, por último, se les pide que le den una forma estructurada a la sucesión, caso en el cual algunos se fueron directamente por escalones, por pirámides y otros por la denominada espiral; En la figura 9, se pueden evidenciar unos resultados más positivos con respecto a la comprensión del concepto de crecimiento de una población, la cual fue interesante ver a los estudiantes tan concentrados en ello, donde el estudiante reflexiona desde una forma de representación matemática el objeto propio de la relación diferente al concepto numérico, logrando así una visualización del espacio numérico diferente y más completa que la de muchos estudiantes promedio.

Figura 9. Resultados Momento 3, hoja de trabajo 2

Para el cuarto momento de la segunda intervención, se tienen actividades de interacción con el medio ambiente y su contexto propio, encuentros directos con los números áureos, representación de estos en las plantas y también la sucesión como punto de participación en el crecimiento de poblaciones.

En la primera actividad los estudiantes tenían a su disposición ciertos materiales con los cuales podían recrear los espacios de la sucesión representándolos en medidas casi exactas, en esa disposición y orden tenían unas tiras de lana, unos metros y unas tijeras, objetos con los cuales podían representar los números de Fibonacci en centímetros de lana y comprobar la teoría de que el último número o medida en este caso es dado en base a la suma de los anteriores. Fue de interés ver como los estudiantes lograron interpretar y asociar los números naturales con medidas tangibles y comprobar de este modo el orden de la sucesión dándole a la misma una explicación estructurada.

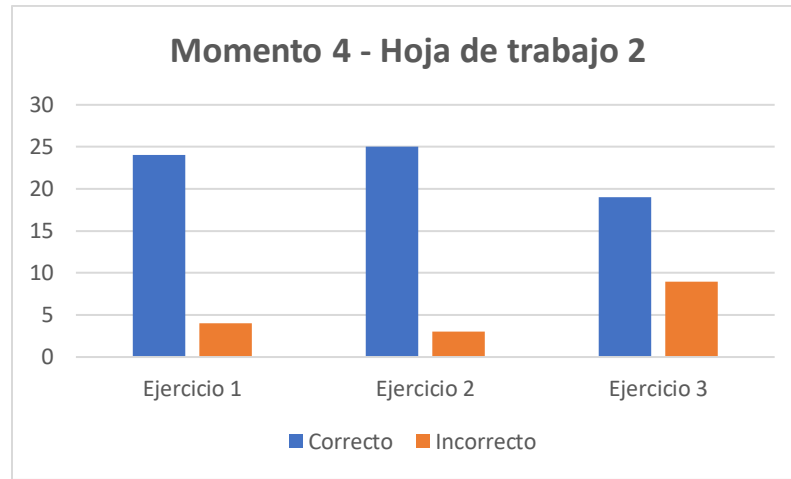
Al darle continuación al hilo temático que se lleva, se empieza entonces con la descripción del segundo ítem, en el cual los estudiantes tendrán a su disposición material vivo y tangible con el cual interactuar, se dispone para ellos una plantas específicas, en las cuales es sencillo ver el orden de Fibonacci representado mediante la espiral, para ellos se hace evidente

desde el principio que esta espiral esta presente el loe helechos, los girasoles, las suculentas, los cactus y las rosas, plantas que están presentes en el aula para la observación y el estudio; mediante una serie de preguntas a los estudiantes se les dirige sutilmente por el sendero de la observación minuciosa, en la cual encuentran cantidad de parentescos y relaciones entre Fibonacci y las plantas, este objetivo se cumple de una buena manera, y aunque todos descubrieron la relación, algunos aun creen que es simple casualidad.

Es así, como se hace el encuentro final del punto cuatro, con la actividad que relaciona la espiral, el rectángulo de oro y la sucesión Fibonacci, se explica el método de construcción y se le permite a los estudiantes disponer de sus habilidades artísticas para la construcción de una figura interesante y compleja que refleja en su interior un orden y armonía superior; para este punto se pudo notar algo de frustración en los estudiantes, aunque intentaban de varias maneras a muchos les fue complicado comprender la forma en que se construía el conjunto de figuras, se tiene una explicación adicional con el fin de que se comprendiera la temática expuesta, de este modo es como termina el cuarto punto de la segunda hoja de trabajo, con una parte de la población de estudio contenta por sus representaciones y otra con algo de frustración por la falta de entendimiento.

Y finalizando la intervención con el quinto punto, en la figura 10, se puede describir que no todos los estudiantes tuvieron la misma motivación, ya que algunos por seguir en su afán de completar el punto anterior se olvidaron de averiguar su propia función sobre Fibonacci y no generaron la participación adecuada; aún con dicho suceso, la mayor parte del grupo encontró que decir sobre esta sucesión y le dieron sentidos biológicos, musicales, artísticos, de arquitectura y hasta espaciales, dejando en el aula de clase un conocimiento estructurado y amplio de las aplicabilidades que tiene esta sucesión.

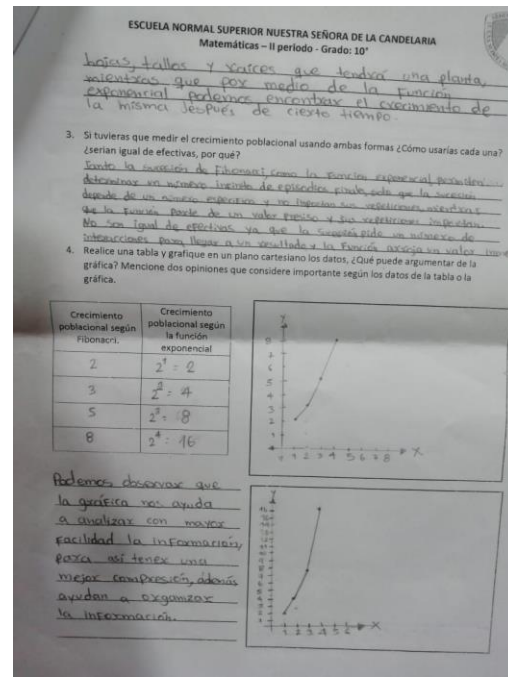
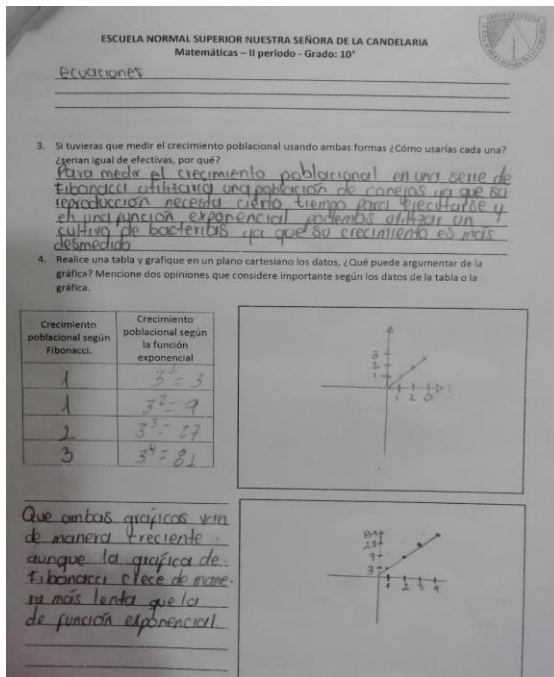
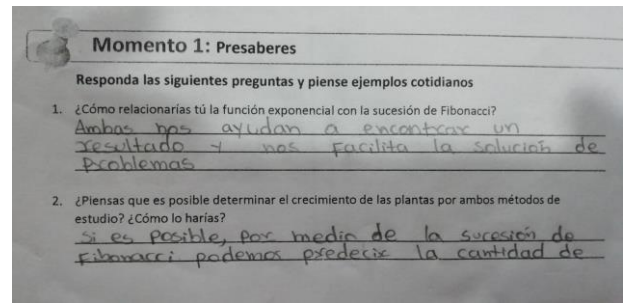
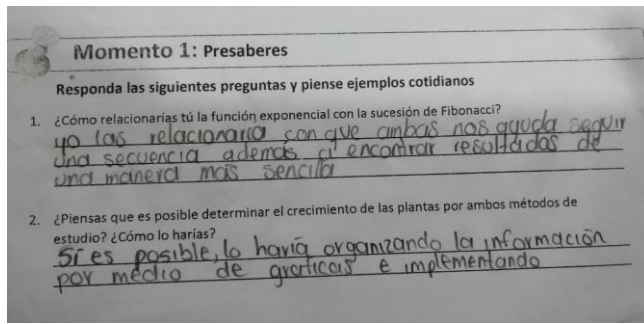
Figura 10. Resultados momento 4, hoja de trabajo 2



4.2.3 Análisis de resultados de hoja de trabajo 3

En la hoja de trabajo número 3, se tiene una situación interesante, debido a que en este punto se ponen a trabajar juntas las dos temáticas anteriormente abordadas y esta situación se ve reflejada desde los saberes previos, se presentaron preguntas y ejercicios sobre cada temática y una en específico que tenía como propósito fundamental el relacionar ambas por medio de similitudes. En figura 11, se tienen los resultados y algunas evidencias de los saberes previos en el momento 1, donde los estudiantes desarrollan con mayor funcionalidad e interés respuestas acertadas que los motiva a encontrar relaciones entre patrones de crecimiento.

Figura 11. Resultados de la actividad previa, hoja de trabajo 3



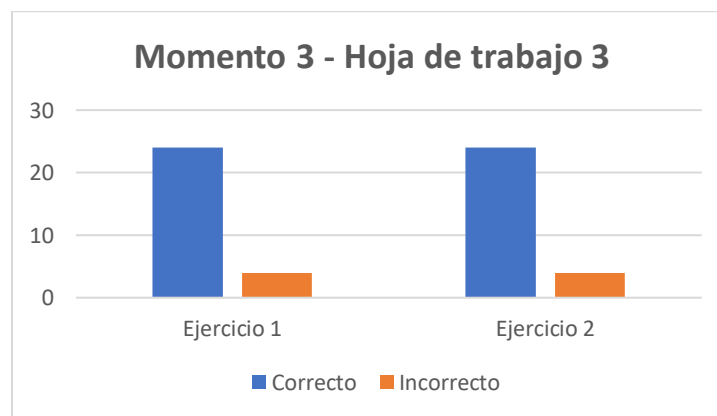
Dando inicio a la explicación del tercer punto de la tercera hoja de trabajo, se resalta que este posee dos ejercicios, en los cuales se trabaja en base a situaciones problemáticas, fichas de análisis de información y unas preguntas finales para profundizar en el ejercicio realizado; es de este modo, como se empieza a relacionar la sucesión de Fibonacci con la función exponencial.

Ahora bien, en el primer caso de este punto se pide a los jóvenes que llenen la tabla con los resultados de la numeración entre la sucesión de Fibonacci y la función exponencial de base 2, desde su exponente uno hasta el exponente 11, de allí surgen unos resultados y unas preguntas. Los estudiantes llegaron a la conclusión de que la función exponencial y la sucesión Fibonacci

tienen similitud en su forma creciente, ambas van creciendo siguiendo un patrón distinto, pero con la misma tendencia al infinito.

Ya en el segundo problema planteado, se expresa una situación sobre un cultivo de bacterias con dos bacterias diferentes en su reproducción, una que sigue la serie y la otra que sigue la función, el trabajo de los estudiantes es saber cuál sigue cada una y descubrir su crecimiento poblacional después de 9 meses de libertad, en este punto se genera un paralelo entre el crecimiento y se denomina uno más acelerado y el otro con más control, pero ambos relacionados en el suceso del crecimiento en poblaciones, del mismo modo los estudiantes se dispusieron a responder unas preguntas sobre lo observado, sacando conclusiones y respuestas sobre los procesos de crecimiento y la relación Fibonacci exponencial. En la figura 12, se obtienen los resultados de la identificación de la relación entre la función exponencial y la comparación que puede justificarse con la serie Fibonacci, teniendo resultados positivos por parte de los estudiantes, los cuales, interiorizan el crecimiento poblacional a partir de una sucesión exclusiva de un modelo de función que interviene a partir de unos elementos y propiedades matemáticas.

Figura 12. Resultados momento 3, hoja de trabajo 3

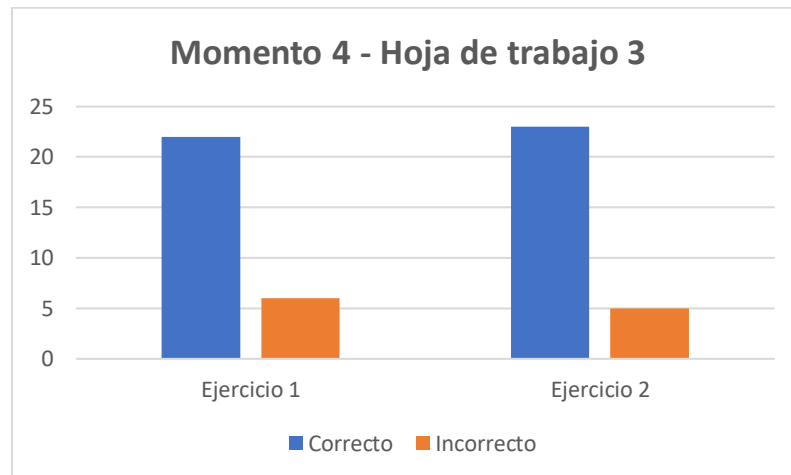


Dando por terminado el punto anterior, se continua con el cuarto componente de la intervención el cual está conformado por dos ejercicios, el primero de expresión artística y el segundo de un crecimiento poblacional ligado a una aumento exponencial de valor; en el primer ítem los estudiantes deben de crear un árbol siguiendo las dos temáticas, para las ramas y divisiones del árbol deben usar a Fibonacci y para si cobertura con hojas deben usan la función exponencial, cabe resaltar que este ejercicio solo avanzara hasta el sexto paso, si se hace más de eso sería complicado. Los estudiantes se manifestaron ante este ejercicio de una muy buena manera, ya que todos pretendían generar el árbol y darle un buen aspecto siguiendo los números de Fibonacci, donde algunos tuvieron dificultad fue al momento de cubrirlo con hojas; además, por las dimensiones no les era posible llenarlo de tal manera, aun así, se realizó un ejercicio en donde Fibonacci y exponencial se desarrollan de manera paralela.

Para el segundo y último ejercicio del cuarto punto, se tiene la situación problema de una pareja de palomas mensajeras, resulta que estas tienen un método de reproducción dado por Fibonacci, pero de igual forma tiene un valor agregado según la función exponencial; entre más antigua la paloma mayor es su experiencia, por ende su valor se duplica, es así como se les plantea a los estudiantes la siguiente situación, si las palomas tienen un total de 8 meses de reproducción libre y por cada mes que pasa el valor de la primer pareja se duplica, cuántas parejas habrán al finalizar el tiempo propuesto y que valor alcanzara la primer pareja; sin embargo, fue mucho más interesante ver a los estudiantes desenrollar el hilo que tejía la situación y solucionarla adecuadamente, con ayuda de una tabla organizaron los valores reproductivos de las palomas dado por Fibonacci de forma descendente y para finalizar fijaron su valor dado por la función exponencial de forma ascendente llegando de esta manera al resultado deseado, y sin finalizar aun, generaron un plano cartesiano de mes-cantidad de palomas y otro de experiencia-

valor de palomas, lo cual fue exacto y sorprendente. En la figura 13, se analizan los resultados positivos por parte de los estudiantes, tanto para el ejercicio 1 y 2, se tomaron en cuenta las ideas previas, conceptos claves y esenciales que los llevará a la reflexión de una temática que enfatiza en situaciones reales y cotidianas.

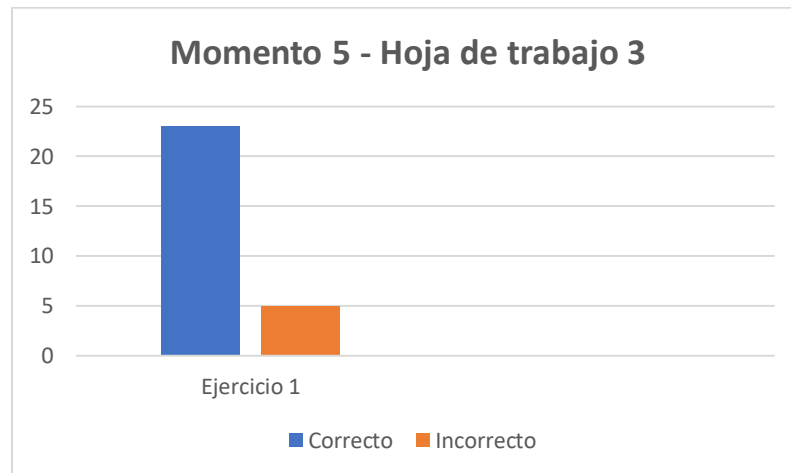
Figura 13. Resultados momento 4, hoja de trabajo 3



De este modo, se llega al punto cinco de la tercera intervención, parte en la cual se verá reflejado parte del esfuerzo puesto al principio en la hoja de trabajo número 1. En este apartado se pudo nuevamente a los estudiantes generar un ejercicio de autoría propia en donde relacionaran y combinaran la sucesión de Fibonacci con la función exponencial para generar una solución a una incógnita. Importante resaltar la confianza y motivación que llevan a los estudiantes a encontrarse con otra manera de reconocer objetos matemáticos y aprender un nuevo concepto, e incluso algunos se salieron del tema de función y sucesión y se orientaron hacia rumbos más avanzados, como la interpretación y argumentación de crecimiento y decrecimiento poblacionales en contextos ambientales, geospaciales, económicos, entre otros. Esta situación, aunque interesante, se salía de los parámetros establecidos en la intervención, razón por la cual se invalida, aunque sea aún más de lo esperado. Los estudiantes que no lograron el propósito, no estuvieron con disposición ni tampoco motivados a relacionar conceptos matemáticos cotidianos

con otras áreas del saber, lo que evidencia que a los estudiantes es necesario movilizarlos en otros campos del saber y entendimiento, para que comprendan la naturaleza propia de las matemáticas y encuentren en esta, la manera de dar soluciones a problemas reales y del propio contexto.

Figura 14. Resultados momento 5, hoja de trabajo 3



Se puede concluir que lo trabajado en estas intervenciones fue de gran interés para la mayoría de los estudiantes, aunque algunos empezaron con actitudes adversas, terminaron participando y preguntando sobre las diversas utilidades de la sucesión y como más podían utilizar una función en casos de la vida real, aseguran entender cómo pueden hallar un aumento poblacional si sigue cualquiera de estos dos métodos y agradecen la intervención, ahora ven su ambiente natural como un espacio adecuado para hacer matemáticas.

5. Conclusiones y recomendaciones.

Respuesta a la pregunta central

A favor de dar respuesta a la pregunta central de investigación, la cual menciona lo siguiente: ¿Cómo implementar una estrategia didáctica para la comprensión del crecimiento poblacional a través de la función exponencial y su relación con la serie de Fibonacci?

Se puede afirmar que, en la intervención y en la aplicación de diferentes hojas de trabajo centradas en los temas específicos, que a su vez, apuntan a una finalidad explícita del crecimiento poblacional, es una excelente opción y una oportunidad para inducir a los estudiantes a nuevos modelos de comprensión y reconocimiento de objetos matemáticos a través del desarrollo de una estrategia participativa, donde el estudiante se involucra con el aprendizaje y cooperan para reorganizar ideas, estimular nuevas formas de construir el concepto y facilitar la solución a problemas totalmente contextualizados; además, el uso e implemento de materiales en concreto, promueven no solo la creatividad, sino que lleva al estudiante a presentar modelos mentales propios que le generan una introspección de lo vivenciado a llevarlo a la realidad.

En la estrategia, la construcción, el diseño y la implementación de una serie de hojas de trabajo en las cuales se describan las temáticas y se enfoquen a la solución del problema, permite encaminar a los estudiantes para cumplir con un objetivo puntual, esta ruta que enmarca una rúbrica didáctica pensada desde el modelo pedagógico de la institución, promueven y fortalecen un trabajo cooperativo, solidario y comunicativo, el cual se simplifica de manera concreta en la aplicación de tres hojas de trabajo, encaminadas en la descripción de elementos y propiedades propias de la función exponencial, una segunda con la explicación y representación de la serie Fibonacci, y una tercer hoja de trabajo, en la que se involucran ambas temáticas con el fin de comparar, sintetizar y asociar el concepto de crecimiento de una población.

Este proceso ha sido funcional ya que los estudiantes tuvieron espacios específicos de aprendizaje en donde se enfocaron en una temática trascendental, con una interiorización de forma individual orientada en un énfasis con puntos donde exista relación una con otra; el análisis propio solucionando los ejercicios, afianza y verifica nuevas hipótesis donde la relación de los temas propuestos permita al estudiante experimentar libremente y vivenciar la relación

existente más no igual, admite aprenderlos, compáralos, asociarlos y a su vez, diferenciarlos respecto a sus características, elementos, propiedades y secuenciación, formando con ello un conocimiento con bases sólidas y un trabajo guiado en base a esta estrategia didáctica propuesta en este trabajo investigativo.

Respuesta a las preguntas auxiliares

Ya con los procesos de generalidad explícitos y entendidos, es posible hacer la descripción donde se dé respuesta a las preguntas auxiliares, con las cuales se trabajan diferentes factores, para dar inicio se aclara la duda de la primera pregunta que cuestiona lo siguiente:

¿Cómo entiende el estudiante la relación entre la función exponencial y la sucesión de Fibonacci?

Con lo cual se toma de explicación lo realizado en las hojas de trabajo 1 y 2, en estas se generó un trabajo descriptivo de cada elemento principal (#1 función exponencial - #2 sucesión Fibonacci), en este proceso, se contempla lo básico para entender y trabajar los temas, pero esto no se queda allí, se hace especial énfasis en los puntos donde se tiene similitud. trabajando problemas o situaciones en las cuales se apunte al objetivo general, en este caso el crecimiento poblacional.

De esta manera, en las primeras hojas de trabajo se vieron los temas que componen el proyecto de una manera individual, es así como en la tercera hoja de trabajo se genera un proceso de interacción y ejecución usando ambos métodos de análisis al crecimiento poblacional, se reconoce en base al proceso llevado a cabo que los estudiantes ya poseen criterios de ambos temas y con el énfasis realizado obtienen puntos de referencia y similitud entre ambos.

Se hace entonces el análisis de la segunda pregunta auxiliar, la cual en su contenido pregunta lo siguiente: ¿De qué manera generar una estrategia didáctica adecuada para hacerlas

funcionales con el entorno y la explicación de fenómenos?, la cual indica una relación propia y directa con el entorno inmediato en el cual están involucrados los alumnos, es con este propósito que se integra la sucesión de Fibonacci, la cual tiene una relación con el comportamiento de las plantas y posee como ejemplo el proceso reproductivo de los conejos, lo que la convierte en un elemento funcional y observable en los espacios naturales de los estudiantes.

Es de esta manera, como se genera la relación de función exponencial y serie de Fibonacci, en la cual se evidencia una relación con el entorno natural en base a el crecimiento de las plantas y algunas aplicaciones en procesos poblacionales, y con la función exponencial al ser una sucesión de números que denota un crecimiento; con esta resulta fácil hacer un paralelo entre lo matemático y el entorno natural del estudiante, demostrando diferentes comportamientos que adoptan las plantas con sus procesos de crecimiento y a su vez relacionando en base a ejemplos el crecimiento de poblaciones presentes en una cotidianidad.

Por ende, es importante generar los procesos didácticos de una manera sencilla y explicativa, organizando temas de una forma apropiada para la explicación y fundamentada en situaciones que se pueden apreciar en el entorno o en la cotidianidad de los estudiantes. Por último, se genera un espacio de reflexión, comparación, aplicación y demostración en donde se trabajen los temas de forma consistente y se puedan ver reflejados en los ejercicios una similitud entre procesos y una relación con el entorno.

De esta manera se llega a la tercera pregunta, en la cual se trata el siguiente tema: ¿Cómo las representaciones semióticas influyen en el aprendizaje de la función exponencial y la relaciona con la sucesión Fibonacci?, en la cual es importante destacar la transformación de datos, los estudiantes a medida que solucionan los ejercicios planteados en las hojas de trabajo tienen de igual forma que convertir o transformas los datos numéricos obtenidos en gráficas,

dibujos o representaciones que les facilite la comprensión de los temas; por ejemplo, en los trabajos de función exponencial usaron graficas relacionadas con el plano cartesiano, donde ponían en relación tiempo-cantidad de individuos, grafica que les muestra el crecimiento poblacional de una forma diferente y con datos exactos, logrando con ello que afiancen lo numérico mientras trabajan diferentes tipos de representación; situación similar en los procesos realizados con Fibonacci, en esta no solo se usaron graficas rectas, si no que se usan espirales, cuadrados y rectángulos en el proceso, mostrando a los estudiantes distancias graficas que se pueden ver reflejadas en el factor numérico de los números de dicha sucesión, a su vez se trabajaba sobre plantas y animales, situaciones en las cuales se marcaba la espiral y se generaban gráficos piramidales de aumento en poblaciones; a su vez en la última hoja de trabajo se dio la oportunidad de trabajar ambas representaciones acompañadas de dibujos en los cuales se seguía un orden dictado por las temáticas, todo esto de la mano con la creación de ejercicios y representaciones de las situaciones para facilitar un entendimiento, en general un cambio de registro o representación que aumenta la posibilidad de entendimiento.

Asimismo, se trabajó inicialmente un taller introductorio el cual permitía la visualización de secuencias en figuras, el aumento mediante el avance y la composición de otras representaciones en base a las anteriores, ejercicio el cual facilito la transformación de números a gráficos y la comprensión de los dibujos pactados.

Se puede entonces concluir que las estrategias didácticas implementadas en las intervenciones de aula, es preciso considerar no solamente una rúbrica didáctica que oriente al estudiante, sino que permita que él mismo construya conceptos matemáticos a partir de la interacción, participación y cooperación con las actividades que se proponen, a su vez, generar un momento motivacional, donde el estudiante pueda comprender la relación de este tipo de

conceptos con la realidad; esto beneficia directamente a los estudiantes y permite que las practicas de aula se fortalezcan, teniendo una mirada que incida en el aprendizaje continuo y activo por parte del maestro.

Recomendaciones

En la exposición de este trabajo investigativo, se recomienda que la academia sea impulsada por parte del docente, que exploren las situaciones cotidianas y del contexto y que permita que los estudiantes realicen actividades de reflexión, introspección y empoderamiento del saber matemático con habilidades que desarrolle el pensamiento crítico y analítico.

Se recomienda que los docentes tengan nuevas concepciones para cambios que implique reconstruir la ciencia y llevar al estudiante a reconocer nuevas ideas y fortalezca desde la resolución de problemas indagar sobre nuevas formas de visualizar y hacer matemáticas vivenciales desde el contexto.

Referencias Bibliográficas

- Adalberto, Y., Casadiego, S., Elena, S., Elorza, N., Andrés, P., & Salgado, R. (s. f.). *Unidad robotica y tecnológica de producción agricola con el uso de energia solar View project Ecosystem services in colombia View project*.
<https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34266.98242>
- Berardi, E. Á., & Corica, A. R. (2021a). *ABP en la escuela secundaria: Análisis de la gestión de un proyecto sobre el crecimiento de plantas y sus vínculos con la matemática*.
- Berardi, E. Á., & Corica, A. R. (2021b). *INVESTIGACIÓN ABP en la escuela secundaria: Análisis de la gestión de un proyecto sobre el crecimiento de plantas y sus vínculos con la matemática*. 107, 7-22.
- Córdoba Muñoz, Carlos. (2015). *La sucesión de Fibonacci y su aplicación didáctica en las matemáticas de la educación secundaria*.
- Cordoba Muñoz, D. C. (2014). *LA SUCESIÓN DE FIBONACCI Y SU APLICACIÓN DIDÁCTICA EN LAS MATEMÁTICAS DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA*.
- Cuero Cuero, S. M. (2021). *Una secuencia de aprendizaje para la comprensión de algunos elementos de la función exponencial a través de la articulación de diferentes registros de representación*.
DBA.pdf. (s. f.).
- Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. (2006).
Ministerio de Educacion Nacional.

Expertos, E. (2015). *El aprendizaje por descubrimiento de Bruner / VIU Ecuador*.

<https://www.universidadviu.com/ec/actualidad/nuestros-expertos/el-aprendizaje-por-descubrimiento-de-bruner>

Ferrando, I., & Segura, C. (2010a). *La Sucesión de Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza*. <http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/3111/3204>

Ferrando, I., & Segura, C. (2010b). La sucesión de Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza. *Modelling in Science Education and Learning*, 3(5), 45.

<https://doi.org/10.4995/msel.2010.3111>

Fibonacci, Leonardo da Pisa. (s. f.). Recuperado 16 de abril de 2023, de

<https://paginas.matem.unam.mx/cprieto/biografias-de-matematicos-f-j/200-fibonacci-leonardo-da-pisa>

Hitt, F. (1997). *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum*.

Olaya, H. M. P. (2012). *Propuesta de una unidad didáctica para la enseñanza del concepto de función exponencial mediante la implementación de algunas aplicaciones*.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2011). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*, 13, 29-36.

<https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112>

Pallchisaca Suquilanda, S. A., & Zhimnay Valverde, E. O. (2019a). *ESTRATEGIA EDUCATIVA PARA FOMENTAR LA INTERDISCIPLINARIEDAD ENTRE LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICA Y CIENCIAS NATURALES MEDIANTE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI*.

Pallchisaca Suquilanda, S. A., & Zhimnay Valverde, E. O. (2019b). *Estrategia educativa para fomentar la interdisciplinariedad entre las asignaturas de matemática y ciencias naturales mediante la sucesión de FIBONACCI.*

Resumen_coloquio_2012.pdf. (s. f.). Recuperado 19 de mayo de 2023, de https://repositorio.pucp.edu.pe/index/bitstream/handle/123456789/110937/Resumen_coloquio_2012.pdf?sequence=1#page=31

Rivera, E., & Ricardo López, H. (s. f.). Evidencia de propiedades fractales en la sucesión de Fibonacci usando wavelets. *Scientia et Technica Año XVII*, 52.

Tec Escalante, D. J. (2016). *Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las funciones exponenciales mediante la modelación del crecimiento poblacional.*

Valenzuela, Alejandra. (1963). *David Ausubel.* <https://isabeltaylor7.wixsite.com/website-2/post/eres-introvertido-esta-es-la-raz%C3%B3n-por-la-cual-debes-hablar-en-clase>

Adalberto, Y., Casadiego, S., Elena, S., Elorza, N., Andrés, P., & Salgado, R. (s. f.). *Unidad robotica y tecnológica de producción agrícola con el uso de energía solar View project Ecosystem services in colombia View project.*
<https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34266.98242>

Berardi, E. Á., & Corica, A. R. (2021a). *ABP en la escuela secundaria: Análisis de la gestión de un proyecto sobre el crecimiento de plantas y sus vínculos con la matemática.*

Berardi, E. Á., & Corica, A. R. (2021b). *INVESTIGACIÓN ABP en la escuela secundaria: Análisis de la gestión de un proyecto sobre el crecimiento de plantas y sus vínculos con la matemática.* 107, 7-22.

Córdoba Muñoz, Carlos. (2015). *La sucesión de Fibonacci y su aplicación didáctica en las matemáticas de la educación secundaria.*

Cordoba Muñoz, D. C. (2014). *LA SUCESIÓN DE FIBONACCI Y SU APLICACIÓN DIDÁCTICA EN LAS MATEMÁTICAS DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA.*

Cuero Cuero, S. M. (2021). *Una secuencia de aprendizaje para la comprensión de algunos elementos de la función exponencial a través de la articulación de diferentes registros de representación.*

DBA.pdf. (s. f.).

Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. (2006).
Ministerio de Educacion Nacional.

Expertos, E. (2015). *El aprendizaje por descubrimiento de Bruner | VIU Ecuador.*

<https://www.universidadviu.com/ec/actualidad/nuestros-expertos/el-aprendizaje-por-descubrimiento-de-bruner>

Ferrando, I., & Segura, C. (2010a). *La Sucesión de Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza.* <http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/3111/3204>

Ferrando, I., & Segura, C. (2010b). La sucesión de Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza. *Modelling in Science Education and Learning*, 3(5), 45.
<https://doi.org/10.4995/msel.2010.3111>

Fibonacci, Leonardo da Pisa. (s. f.). Recuperado 16 de abril de 2023, de

<https://paginas.matem.unam.mx/cprieto/biografias-de-matematicos-f-j/200-fibonacci-leonardo-da-pisa>

Hitt, F. (1997). *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum.*

Olaya, H. M. P. (2012). *Propuesta de una unidad didáctica para la enseñanza del concepto de función exponencial mediante la implementación de algunas aplicaciones.*

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2011). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*, 13, 29-36.

<https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112>

Pallchisaca Suquilanda, S. A., & Zhimnay Valverde, E. O. (2019a). *ESTRATEGIA EDUCATIVA PARA FOMENTAR LA INTERDISCIPLINARIEDAD ENTRE LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICA Y CIENCIAS NATURALES MEDIANTE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI.*

Pallchisaca Suquilanda, S. A., & Zhimnay Valverde, E. O. (2019b). *Estrategia educativa para fomentar la interdisciplinariedad entre las asignaturas de matemática y ciencias naturales mediante la sucesión de FIBONACCI.*

Resumen_coloquio_2012.pdf. (s. f.). Recuperado 19 de mayo de 2023, de

https://repositorio.pucp.edu.pe/index/bitstream/handle/123456789/110937/Resumen_coloquio_2012.pdf?sequence=1#page=31

Rivera, E., & Ricardo López, H. (s. f.). Evidencia de propiedades fractales en la sucesión de Fibonacci usando wavelets. *Scientia et Technica Año XVII*, 52.

Tec Escalante, D. J. (2016). *Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las funciones exponenciales mediante la modelación del crecimiento poblacional.*

Valenzuela, Alejandra. (1963). *David Ausubel*. <https://isabeltaylor7.wixsite.com/website-2/post/eres-introvertido-esta-es-la-raz%C3%B3n-por-la-cual-debes-hablar-en-clase>

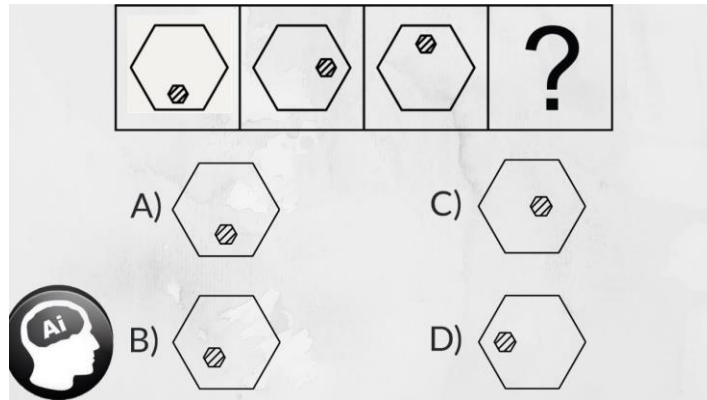
Apéndices

Apéndice A. Reconociendo patrones en secuencias

Reconociendo patrones en secuencias

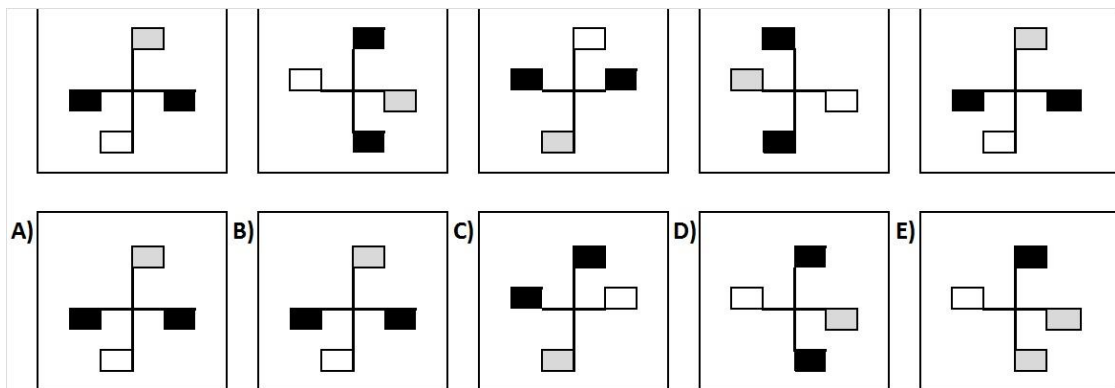
1. Según lo marcado en la imagen, define el siguiente movimiento, trazo o línea que debe respetar la imagen para generar el patrón de constancia.

A:



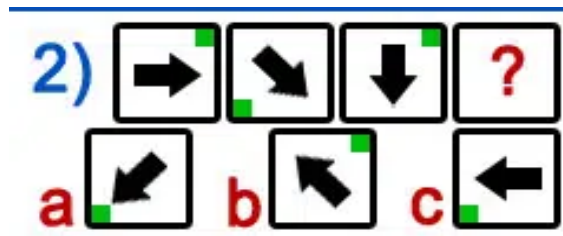
Identifico la secuencia en cada paso		Comprende la representación gráfica		Tuvo habilidad para encontrar el patrón	
SI	NO	SI	NO	SI	NO

B:



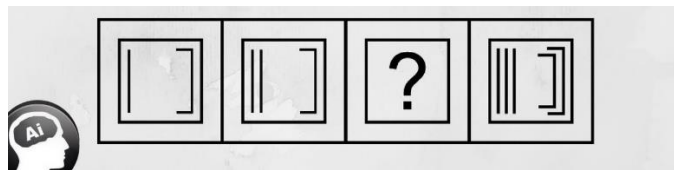
Identifico la secuencia en cada paso		Comprende la representación gráfica		Tuvo habilidad para encontrar el patrón	
SI	NO	SI	NO	SI	NO

C:



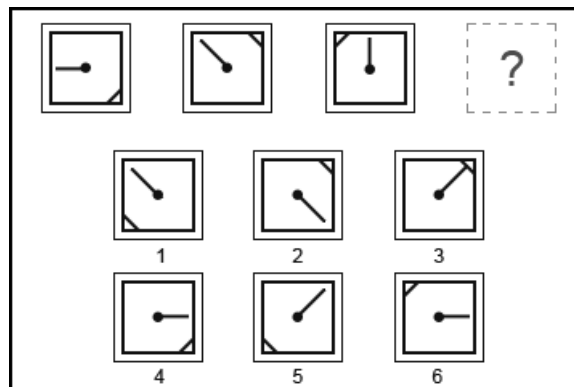
Identifico la secuencia en cada paso		Comprende la representación gráfica		Tuvo habilidad para encontrar el patrón	
SI	NO	SI	NO	SI	NO

D:



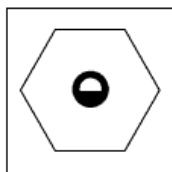
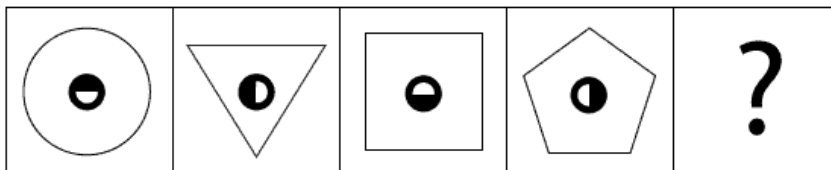
Identifico la secuencia en cada paso		Comprende la representación gráfica		Tuvo habilidad para encontrar el patrón	
SI	NO	SI	NO	SI	NO

E:

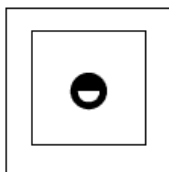


Identifico la secuencia en cada paso		Comprende la representación gráfica		Tuvo habilidad para encontrar el patrón	
SI	NO	SI	NO	SI	NO

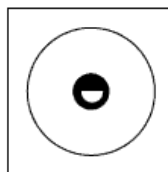
F:



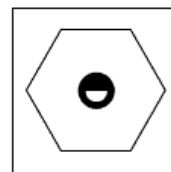
A



B



C



D

Identifico la secuencia en cada paso		Comprende la representación gráfica		Tuvo habilidad para encontrar el patrón	
SI	NO	SI	NO	SI	NO

Apéndice B. Hojas de trabajo

Estudiante: _____

Docente: Juan Manuel Ocampo Ocampo

Hoja de trabajo N°1 Reconociendo patrones de crecimiento

“No se puede desatar un nudo sin saber cómo está hecho”
Aristóteles

Objetivo: afianzar el concepto función exponencial en los estudiantes de grado 10° a través de actividades, definiciones y exploraciones del medio con la finalidad de generar en ellos un conocimiento sólido y fácil de relacionar con las temáticas que se van a abordar a futuro.

Competencia (Estándar)

- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
- Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.

Aprendizaje (DBA)

DBA 4: Comprende el significado de la razón de cambio promedio de una función en un intervalo (a partir de gráficas, tablas o expresiones) y la calcula.

DBA 10: Compara y comprende la diferencia entre la variación exponencial y lineal.



Momento 1: Presaberes

Responda las siguientes preguntas y piense ejemplos cotidianos

1. ¿Qué entiende usted cuando le mencionan la palabra crecimiento?

2. ¿Qué reconoces por función y qué papel cumple ésta en el mundo matemático?

3. Si 1 kilo de arroz cuesta \$4.790, entonces ¿cuánto costarán 3 kilos, 7 kilos y 10 kilos?

4. Realice una tabla y grafique en un plano cartesiano los datos, ¿Qué puede argumentar de la gráfica? Mencione dos opiniones que considere importante según los datos de la tabla o la gráfica.

Kilo	Precio

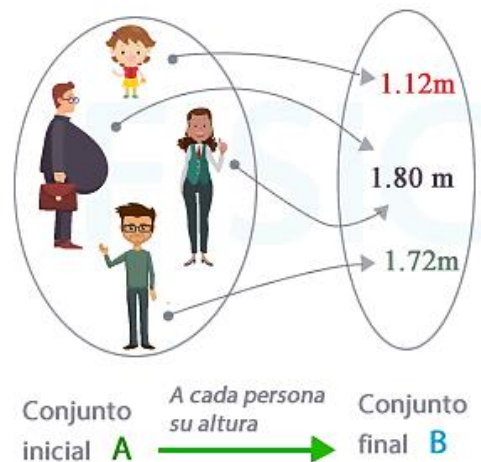
Grafica:

Momento 2: Desarrollo del tema

Qué es una función:

Una función matemática se define como la relación que existe entre una magnitud y otra, cuando el valor de una de estas depende directamente del valor de la otra.

Por ejemplo: la cantidad de vehículos en funcionamiento depende directamente de cuantas personas saben manejar y tienen posibilidad de adquirir un vehículo, o también se puede relacionar la estatura de cada persona que hay en un salón de clases.



Aprendamos sobre la función exponencial:

La función exponencial: Es aquella que a cada valor real x le asigna la potencia a^x con $a > 0$ y $a \neq 1$

Esta función se expresa $f(x) = a^x$

Caso en el que el número a se denomina **base** y la x es el **exponente**.

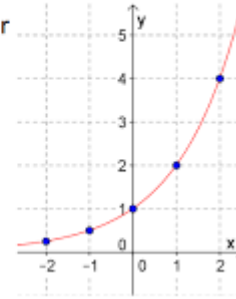
Las funciones exponenciales nos sirven para modelar situaciones de la vida real como el incremento de bacterias, la desintegración radioactiva, el enfriamiento de un objeto y más.

Ejemplo. Graficar $f(x) = 2^x$

Resolución

Vamos empezar a tabular

x	$f(x) = 2^x$
-2	$2^{-2} = 0,25$
-1	$2^{-1} = 0,5$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$



Representa gráficamente la siguiente función exponencial: $f(x) = 2^{x+1}$

Al darle solución a una función exponencial, lo primero es generar una tabla de valores en **X** para definir e identificar la gráfica.

x
0
1
2
-1
-2

Después de esto indicamos la fórmula y le vamos dando solución respecto a los valores que elegimos.

$$x = 0 \longrightarrow f(0) = 2^0 + 1 = 2$$

$$x = 1 \longrightarrow f(1) = 2^1 + 1 = 3$$

$$x = 2 \longrightarrow f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

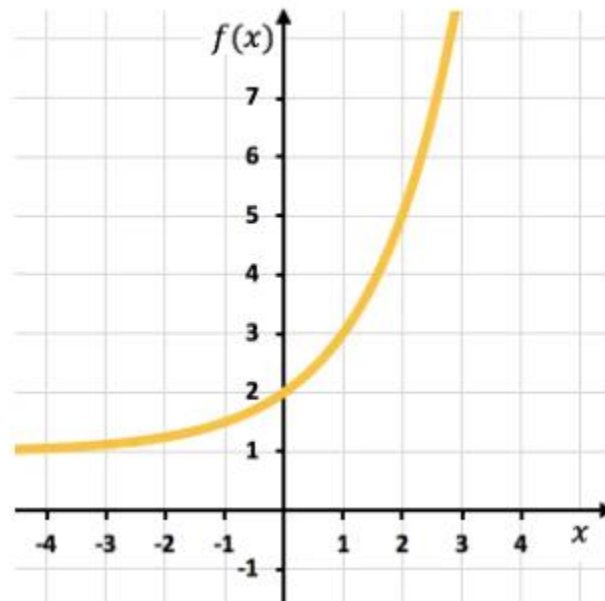
$$x = -1 \longrightarrow f(-1) = 2^{-1} + 1 = 1,5$$

$$x = -2 \longrightarrow f(-2) = 2^{-2} + 1 = 1,25$$

Como resultado tendremos la siguiente tabla de resultados:

x	$f(x)$
0	2
1	3
2	5
-1	1,5
-2	1,25

Ya con esta podemos generar la gráfica representativa de la solución a la función exponencial.



Con esto damos solución a un ejercicio simple de reemplazo con una función exponencial.

Momento 3: Afiancemos el conocimiento

Lea con atención y resuelva los siguientes ejercicios aplicados a la función exponencial

Ejercicio #1:

La población de cierta región puede ser modelada con la fórmula $A=10000(e^{0.005t})$, en donde A representa a la población y t representa el tiempo en años. Encuentra la población al final de 10 años.

Es de tener en cuenta que el número $e= 2,71828$

Solución:

Ejercicio #2:

En un cultivo tenemos un total de **150 bacterias** inicialmente y tras el paso de cada hora, esta cantidad de bacterias se duplica; necesitamos hallar la función que modele en número de bacterias después de **T** horas y la cantidad de bacterias después de **20 horas**.

Solución:**Ejercicio #3:**

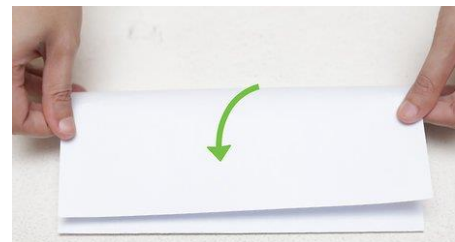
tenemos una pequeña planta de suculenta la cual cada mes adquiere dos hojas para su crecimiento y supervivencia, esta planta al momento de la observación tiene un total de 10 hojas, determinar la edad de la planta, la función que especifique su crecimiento y al cabo de un año cuantas hojas tiene la planta.

Solución:**Momento 4: Actividades explorativas**

Las siguientes actividades se leen y se sigue la instrucción paso a paso para dar solución a lo planteado

#1: capas versus dobleces

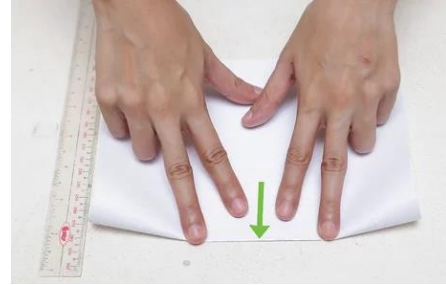
1: Vamos a tomar una hoja de papel y la doblaremos por la mitad, de igual modo vamos a construir una tabla de valores en donde podremos anotar el número de dobleces y el número de capas que se forman por doblez.



2: Repetimos y registramos estos datos 6 veces y lo anotaremos todo en la tabla de valores.

3: A continuación, construiremos una gráfica en la cual tendremos la cantidad de dobleces como la variable

independiente (X) y las capas obtenidas al doblar la hoja como la variable dependiente (Y).




3: Ahora graficaremos la tabla en Excel, con el propósito de corregir o conformar nuestra grafica.

4: En este punto se debe determinar la ecuación y con ella encontrar a cuantas capas equivalen 10 dobleces.

#2: A una granja que está ubicada a las afuera de la ciudad llevaron una pareja de conejos recién nacidos, para que estos animalitos puedan reproducirse por primera vez necesitan madurar un mes, luego de esto pueden tener una pareja de conejos mes a mes, de igual forma los recién nacidos necesitan un mes de maduración antes de procrear.

Encuentra el valor del crecimiento de la población de conejos después de 6 meses de libre reproducción, representa una fórmula que lo indique y verifica con esta tu hipótesis del comportamiento de los conejos.

 **Momento 5: Actividades evaluativas**

Evaluación y autoevaluación

El proceso evaluativo busca reconocer que tan bien se desempeñó el estudiante, conocer con que conocimientos sale luego de esta práctica de Hoja de trabajo y reconocer el propio esfuerzo de cada uno de los compañeros; por estos motivos la evaluación se va a generar de una forma particular, cada estudiante debe dar sus ideas para plantear un único ejercicio sobre la función exponencial junto a su solución, el ejercicio tiene que surgir de una necesidad lógica y real, debe contener en si mismo un problema, un orden numérico y un proceso de solución el cual todos deben manejar.

El propósito de este es hacer una evaluación a grupos en donde se intercambien ejercicios y se les de soluciones coherentes, luego cada grupo asignará la nota al grupo que le entrego su ejercicio.

Ejercicio:

Planteamiento de la solución:

Autoevaluación y coevaluación

En el mismo grupo se darán las notas, todos deben asignar a sus compañeros la nota de coevaluación dependiendo su rendimiento y participación, de igual forma deben darse su propia nota como proceso de autoevaluación.

Nombre del estudiante	Coevaluación	autoevaluación

GRADO: 10°

Estudiantes:

DOCENTE: Juan
Manuel Ocampo Ocampo

Hoja de trabajo N°2

Descubriendo la sucesión de Fibonacci

Objetivo: Dar a conocer la sucesión matemática conocida como Serie Fibonacci, para modelar situaciones concretas y reales del entorno social, ambiental y artístico.

Competencia (Estándar)

- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

Aprendizaje (DBA)

DBA 4: Comprende el significado de la razón de cambio promedio de una función en un intervalo (a partir de gráficas, tablas o expresiones) y la calcula.

DBA10: Compara y comprende la diferencia entre la variación exponencial y lineal.



MOMENTO #1 Presaberes

5. ¿Qué entiendes por una serie matemática?, da un ejemplo de la misma

6. ¿Has escuchado sobre Fibonacci? ¿Quién fue y que papel cumplió? En caso de no saberlo, consultar la biografía y los aportes en las matemáticas.

7. Observe con detenimiento algunas plantas cercanas a su cotidianidad ¿Considera que hay simetría en las plantas? Dibuje lo observado en su cuaderno

8. ¿Considera que es posible describir el crecimiento de las plantas siguiendo un proceso matemático? ¿Qué procesos y cómo lo describirías?

**Momento 2: Desarrollo del tema****Quien fue Fibonacci o Leonardo da Pisa:**

Basados en (*Fibonacci, Leonardo da Pisa, s. f.*), podemos describir a este hombre de la siguiente manera: }

Nacido en Pisa (actualmente Italia), en el año 1170, fue el hijo de Gillelmo y perteneciente a la familia Bonacci; gran parte de su vida fue tratado como un hombre que se dedicaba a cosas sin valor práctico, lo cual cambió con su regreso a Pisa en 1200, allí escribió textos importantes en la historia de las matemáticas, los cuales tenían su sello de autoría propia.

En este caso vamos a centrarnos en los denominados números de Fibonacci, los cuales podemos describir de la siguiente manera:



Es una sucesión que parte desde los números uno y uno en donde las siguientes cantidades se generan mediante la suma de los dos números anteriores en la lista; por ejemplo, a tercera entrada será $1+1$, que da como resultado el número 2, así empieza la lista infinita de números naturales:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_0 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 2 + 3 = 5$$

los elementos van quedando:

0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

Esta fue descubierta, en el siglo XIII y se generó gracias a los viajes que hacía junto a su padre, que era comerciante. El curioso origen de la sucesión está en la observación que hizo el mencionado matemático de cómo se propagan las parejas de conejos a partir de una pareja de cachorros.

Posteriormente, se ha comprobado que numerosos fenómenos de la naturaleza están relacionados con esta sucesión. Aparece en la estructura espiral del caparazón de algunos moluscos y en la disposición de las hojas de algunas plantas. Asimismo, se aplica también a cuestiones relacionadas con computación y teoría de juegos.



Como podemos notar en la sucesión de Fibonacci se denota un orden de crecimiento secuencial y basado en una regla básica de adición, la cual es fácilmente relacionable con el concepto de función exponencial, la cual se basa en multiplicar los números por si mismos una cantidad (x) de veces, ambas forman y gradúan un crecimiento o expansión de su rango numérico mostrando un proceso de crecimiento.

Momento 3: Afiancemos el conocimiento

Ejercicio #1:

Analice la observación que hizo Fibonacci y descubra cómo se formó esta secuencia numérica utilizando la idea base sobre la reproducción de los conejos. Para ello resuelva el siguiente planteamiento.

A una granja que está ubicada a las afuera de la ciudad llevaron una pareja de conejos recién nacidos; para que estos animalitos puedan reproducirse por primera vez necesitan madurar un mes. Teniendo esto en cuenta resolvemos lo siguiente.

¿Cuántas parejas de conejos tendremos en seis meses, si comenzamos con una pareja que produce cada mes otra pareja que procrea a su vez a los dos meses de vida?

Plantee su respuesta:

Primer mes:

Segundo mes:

Tercer mes:

Cuarto mes:

Quinto mes:

Sexto mes:

Ejercicio #2

Para este proceso se solucionan los siguientes interrogantes y ejercicios:

1. Calcule los primeros 15 números de la sucesión de Fibonacci.

2. ¿La suma de todos los números de Fibonacci daría un resultado finito o infinito? ¿Por qué?

3. ¿Esta sucesión tiene una forma creciente, decreciente? ¿Por qué?

4. Si tuviera que darle una forma o representación a la sucesión de Fibonacci ¿Qué forma le daría y por qué?

Forma de la sucesión



Momento 4: Actividades explorativas

Ejercicio #1:

Para este segundo ejercicio de exploración con la sucesión de Fibonacci, se tendrá a disposición un rollo de lana, unas tijeras y un metro.



Pasos a seguir:

1. Se toma la lana y siguiendo la sucesión de Fibonacci se hacen los cortes empleando el metro, teniendo en cuenta los valores de la serie (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...) en cm. Se repite el ejercicio hasta generar 6 cortes.
2. El paso siguiente es verificar la veracidad de la sucesión, se toman cortes en orden y se genera la suma de estos. Se conoce que la suma de los dos anteriores debe ser igual al valor del tercero. ¿Se da la conjetura numérica y métricamente? Responda.
3. Se anotan estos resultados y observaciones en el espacio indicado a continuación:

Observaciones:

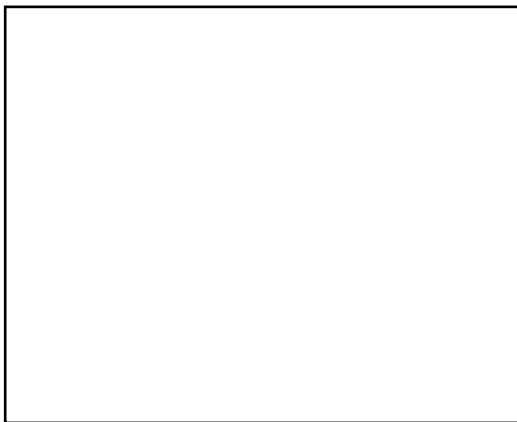
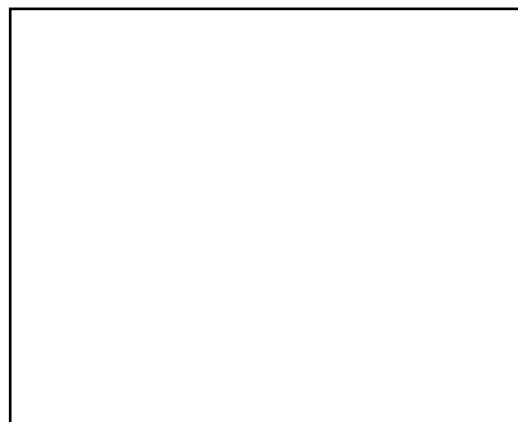
Ejercicio #2:

Se tendrán diferentes plantas a disposición de los estudiantes, su papel ahora consiste en observar solo una de estas y describir lo siguiente:

1. La planta sigue de alguna manera la forma de la sucesión de Fibonacci. Describir y dibujar la forma en que lo hace.
2. Realice un conteo de la cantidad de hojas, semillas, pétalos o ramas de las plantas y verifique si coincide con la sucesión de Fibonacci y argumentar la relación existente.
3. Construir un dibujo en donde muestre la forma de la planta y su manera de relacionarse con esta sucesión.

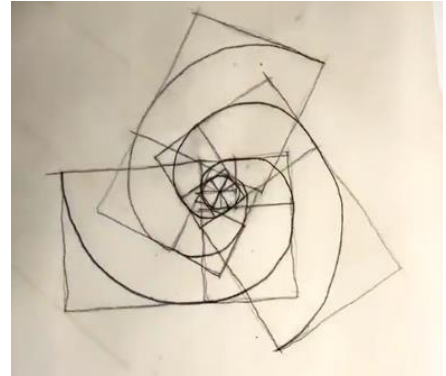
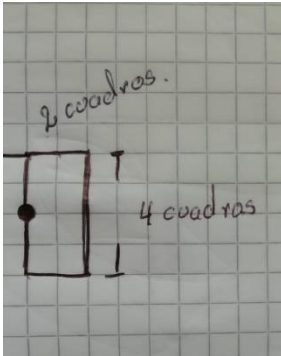
Solución:**1:**

2:

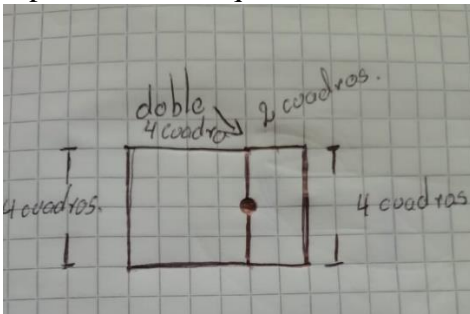
3:*Ilustración 2 Planta**Ilustración 1 Relación con Fibonacci*

Realizaremos el diagrama siguiendo los pasos:

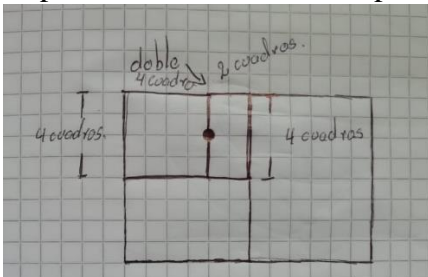
1. En una hoja en blanco van a ubicar un punto central, este será la base de todo el proceso.
2. En base a este dibujaremos un rectángulo de la siguiente manera:



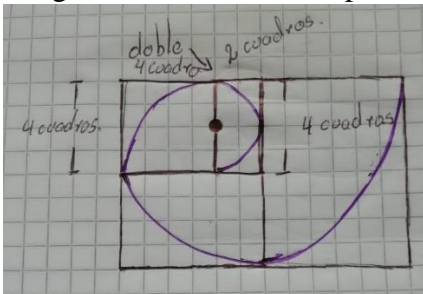
3. En el siguiente paso deberán dibujar en sentido de espiral hacia la izquierda un cuadrado, este usando las medidas del rectángulo anterior.



4. El proceso anterior se va a repetir dos veces más hasta alcanzar esta forma.



5. Luego de tenerlo así se empezará a dibujar la espiral.



6. Realizarán este diagrama tres veces más de forma que queden entrelazados. De esta manera obtendrán la espiral de Fibonacci.

Momento 5: Actividades evaluativas**Evaluación**

En este momento los estudiantes tendrán a su disposición 10 minutos para generar una investigación libre, el propósito de esta es ver la relación que tiene la sucesión de Fibonacci con otros elementos del entorno que no sean las plantas, luego describirán ese nuevo aspecto, como se relaciona este con la sucesión, en donde se ve involucrada esta, que tan exacta es al momento de aplicarse y si ven esta útil en los diferentes aspectos trabajados.

Por último, compartirán la información recolectada con sus compañeros de salón a manera de dialogo y generarán un conocimiento compartido.

Autoevaluación y coevaluación

En el mismo grupo se darán las notas, todos deben asignar a sus compañeros la nota de coevaluación dependiendo su rendimiento y participación, de igual forma deben darse su propia nota como proceso de autoevaluación.

Nombre del estudiante	Coevaluación	autoevaluación

Referencias:

<https://paginas.matem.unam.mx/cprieto/biografias-de-matematicos-f-j/200-fibonacci-leonardo-da-pisa>

Nombre de los estudiantes
-
-
-
-
-

Docente:
Juan Manuel Ocampo Ocampo

Hoja de trabajo N°3
Función exponencial y sucesión de Fibonacci una forma de explicar el crecimiento poblacional.

“No se puede desatar un nudo sin saber cómo está hecho”
Aristóteles

Objetivo: evidenciar con a la comunidad educativa la relación existente entre los temas trabajados con anterioridad (sucesión de Fibonacci y función exponencial), realizando un paralelo entre estos para explicar los procesos del crecimiento poblacional, las similitudes existentes y la utilidad de las mismas.

Competencia (Estándar)

- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
- Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.

Aprendizaje (DBA)

DBA 4: Comprende el significado de la razón de cambio promedio de una función en un intervalo (a partir de gráficas, tablas o expresiones) y la calcula.

DBA 10: Compara y comprende la diferencia entre la variación exponencial y lineal.



Momento 1: Presaberes

Responda las siguientes preguntas y piense ejemplos cotidianos

9. ¿Cómo relacionarías tú la función exponencial con la sucesión de Fibonacci?

10. ¿Piensas que es posible determinar el crecimiento de las plantas por ambos métodos de estudio? ¿Cómo lo harías?

11. Si tuvieras que medir el crecimiento poblacional usando ambas formas ¿Cómo usarías cada una? ¿serían igual de efectivas, por qué?

12. Realice una tabla y grafique en un plano cartesiano los datos, ¿Qué puede argumentar de la gráfica? Mencione dos opiniones que considere importante según los datos de la tabla o la gráfica.

Crecimiento poblacional según Fibonacci.	Crecimiento poblacional según la función exponencial

Momento 2: Desarrollo del tema

Repasando qué es una función:

Una función matemática se define como la relación que existe entre una magnitud y otra, cuando el valor de una de estas depende directamente del valor de la otra.

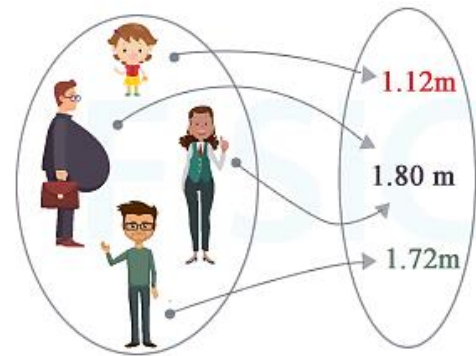
Por ejemplo: la cantidad de vehículos en funcionamiento depende directamente de cuantas personas saben manejar y tienen posibilidad de adquirir un vehículo, o también se puede relacionar la estatura de cada persona que hay en un salón de clases.

$$f(x) = 2^x + 1$$

Ahora recordemos la sucesión Fibonacci:

Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci; la cual consiste en una numeración en forma descendente (de arriba hacia abajo). La fórmula es muy sencilla de aplicar. Se representa como $F(n+1)$, se suma en una sucesión de números que comienza con 0 y 1 los dos números anteriores para hallar el segundo hasta el infinito. Es decir:

- 0+1=1.
- 1+1=2.
- 1+2=3.
- 2+3=5.



$3+5=8$.

Ahora se hará una descripción de relación entre Fibonacci y la función exponencial:

Es importante resaltar el innegable hecho de que ambas son secuencias de números que crecen a medida que se operan, y aunque ambos tienen un crecimiento diferente, el que siempre avancen es una de las características que se tienen en común.

De igual modo podemos tomar sus operaciones como similares, la multiplicación es una suma abreviada de términos, claro está que la potenciación obtiene características propias de su naturaleza, pero no se aleja totalmente de la parte multiplicativa.

Ahora bien, si tomamos como ejemplo la sucesión de Fibonacci en su forma natural, y a su vez operamos el número dos en exponente N variable podemos obtener **que** ($2^N = 2 \times N \times N \times N \dots \times N$.)

Tomemos como ejemplo el dos a la N que se podría representar de la siguiente manera: $(2^2) = 4$, del mismo modo $(2^3) = 8$, $(2^4) = 16$ y así podemos avanzar infinitamente atendiendo a lo que se necesite conocer o calcular.

Pasa casi igual con Fibonacci que su razón se basa más en la suma de valores diversos pero internos y anteriores en su secuencia numérica y de ambas podemos decir que: en su proceso de avance apuntan a un resultado infinito.

Momento 3: Afiancemos el conocimiento



Lea con atención y resuelva los siguientes ejercicios aplicados a la función exponencial

Ejercicio #1:

En este primer ejercicio los estudiantes formarán una tabla de valores donde incluirán ambos temas trabajados (sucesión Fibonacci y función exponencial) generando resultados propios de cada tema, pero a su vez relacionados en su proceso natural de crecimiento.

Los datos se incluirán en tabla de la siguiente manera: para la sucesión de Fibonacci empezaran secuencia de 1+1 y en la función exponencial empezaran desde 2^1 , hasta 2^{11}

Sucesión Fibonacci	Función exponencial	Resultados función exponencial
1	2^1	2
	2^3	
5		

		128

¿Qué pueden concluir de las secuencias numéricas que se trabajaron anteriormente?

¿Cómo relacionarían los procesos de ambas secuencias numéricas?

¿Las diferencias numéricas en este caso son muy grandes o muy pequeñas? ¿si en ves de ser una función exponencial de base dos, fuera de base tres, que diferencia tendrían?

Ejercicio #2:

En un cultivo tienen dos parejas de insectos los cuales poseen una reproducción diferente entre ellos, puesto que la primera pareja está en capacidad de reproducirse y obtener otra pareja desde su primer mes de vida, mientras que la segunda pareja solo puede empezar su reproducción después de madurar un primer mes.

Si el propietario de la finca pretende calcular cuantos individuos tiene de cada especie después de 9 meses y como fue el crecimiento poblacional de estos desde el mes que llegaron, ¿Qué operación, función o secuencia debería usar?

Para darle solución a este planteamiento, harán uso de la siguiente tabla, luego se dará solución a un par de preguntas que hay en la parte inferior de la tabla.

Pareja de insectos #1	Pareja de insectos #2

¿Qué población crece con más rapidez?

¿Qué método usaste para describir el crecimiento poblacional de la primera pareja de insectos?
¿por qué?

Complementado la pregunta anterior, ¿Qué método usaste para la segunda pareja? ¿Por qué?

¿Podrías usar ambos métodos en la misma familia? ¿Ambos métodos describen el crecimiento poblacional de forma acertada?

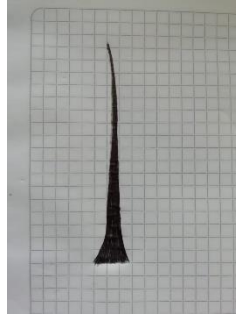


Momento 4: Actividades explorativas

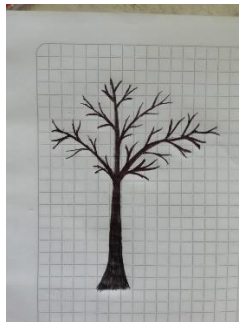
Primera actividad: expresiones artísticas

Los estudiantes van a recrear un dibujo de una planta super curiosa, esta tiene una forma peculiar y para poder recrearla es necesario seguir los siguientes pasos:

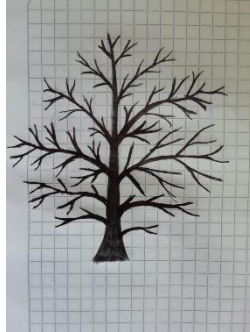
- 1) Se dibujará el tronco y la línea de la rama central, obteniendo una especie de triangulo alargado. De la siguiente manera:



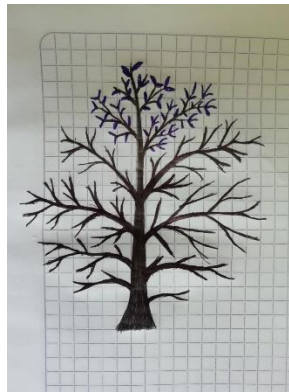
- 2) Después de concluir el primer paso se empieza a llenar el tronco con ramas, para este seguiremos la sucesión de Fibonacci, en la primera rama después del punto central, no tendrá divisiones, haciendo alusión a la forma (1-1), la segunda si tendrá dos divisiones las cuales hacen alusión a (1-1-2), de esta manera hasta llegar a una extensión de 21 divisiones en cada rama.



- 3) Al llegara este que es el límite, la siguiente rama será una replica de la anterior, sin embargo, a partir de esta de reanuda el proceso, pero de forma descendente, o sea que la cantidad de divisiones va a disminuir siguiendo la serie Fibonacci y teniendo como principio el tronco. De la siguiente manera:



- 4) Para finalizar el dibujo se va a cubrir el árbol con hojas, estas se van a distribuir de forma exponencial en las ramas, la primera tendrá dos y estas irán aumentando a medida que las ramas tengan más divisiones, del mismo modo que las ramas dejan de adquirir divisiones, las hojas de aumentar su cantidad y pasa a disminuir siguiendo su propia secuencia exponencial.



- 5) El resultado final es un ejemplo de crecimiento poblacional en dos sentidos, ramas y hojas, sin embargo, con fines pedagógicos el grupo que soluciona nos compartirá sus opiniones al dar respuesta a las siguientes preguntas:

¿Sí es coherente el proceso realizado con la construcción del árbol?

¿Estás de acuerdo con la implementación de los dos métodos de crecimiento para la construcción del árbol?

#2: A un pueblo que está ubicada a las afuera de la ciudad llevaron una pareja paloma mensajeras, estas son muy útiles a las personas de esta localidad ya que no cuentan con servicio de correo y mensajería, por ende, entre más antigua o experimentada sea la paloma mayor será su valor de compra, al ser las primeras les dan un periodo de tres meses para que cumplan una misión reproductiva antes de salir a hacer sus quehaceres como mensajeras.

En estos tres meses las parejas de palomas aumentaron den una a 5 en total, si por las dos ultimas parejas en nacer dan dos monedas, ¿Cuánto darán por la primera pareja de palomas teniendo en cuenta que cada mes que pasa estas duplican su valor?

Ahora bien, el propietario de las palomas quiere saber cuántas parejas va a tener para el mes 8 y de igual forma quiere calcular el valor de la pareja más antigua, para ello decidido generar una tabla de valores que considera útil para llevar el proceso de reproducción y el valor de sus palomas a medida que adquieren experiencia, el deber del grupo de trabajo es darle solución a la pregunta del hombre usando lo aprendido durante los Hoja de trabajos.

Numero de palomas partiendo desde la más antigua	Valor de las palomas dependiendo su experiencia
--	---

1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

¿Cómo calcularon el número de palomas que tendría el señor al finalizar los 8 meses?

Teniendo en cuenta que el valor de la paloma aumenta según su experiencia, ¿De qué manera calculaste el valor de la primera pareja que llegó al pueblo?

Si tuvieras como condición usar los procesos de crecimiento para calcular ambos valores numéricos, ¿Cómo los utilizarías? Genera tu propio diagrama de crecimiento y explica cómo funciona este, puede ser uno en función tiempo-valor y otro en función mes-cantidad de parejas.

--	--



Momento 5: Actividades evaluativas

Evaluación y autoevaluación

El proceso evaluativo busca reconocer que tan bien se desempeñó el estudiante, conocer con que conocimientos sale luego de esta práctica de Hoja de trabajo y reconocer el propio esfuerzo de cada uno de los compañeros; por estos motivos la evaluación se va a generar de una forma

particular, cada estudiante debe dar sus ideas para plantear un único ejercicio que involucre una dinámica entre función exponencial y sucesión de Fibonacci, junto a su solución. Se debe plantear en base a lo trabajado, construyéndose de una forma lógica y real, debe contener en sí mismo un problema, un orden numérico y un proceso de solución el cual todos deben manejar.

Ejercicio:

--	--

Planteamiento de la solución:



Universidad[®]
Católica
de Manizales

VIGILADA MINEDUCACIÓN

*Obra de Iglesia
de la Congregación*



Hermanas de la Caridad
Dominicas de La Presentación
de la Santísima Virgen

Universidad Católica de Manizales
Carrera 23 # 60-63 Av. Santander / Manizales - Colombia
PBX (6) 3 93 30 50 - www.ucm.edu.co