



## LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

### LA INTEGRACIÓN DEL LENGUAJE ALGEBRAICO Y LAS REPRESENTACIONES VISUALES PARA EL APRENDIZAJE DEL VOLUMEN EN PRISMAS Y PIRÁMIDES EN ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO

TATIANA JARAMILLO CARVAJAL



Universidad<sup>®</sup>  
Católica  
de Manizales

VIGILADA Mineducación

Obra de Iglesia  
de la Congregación



Hermanas de la Caridad  
Dominicas de La Presentación  
de la Santísima Virgen

La integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales para el aprendizaje  
del volumen en prismas y pirámides en estudiantes de grado octavo

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciado en  
Matemáticas y Física

**Autora:**

Tatiana Jaramillo Carvajal

**Asesora:**

Mg. Paula Andrea Osorio Gutiérrez

Universidad Católica De Manizales

Facultad De Educación

Licenciatura En Matemáticas Y Física

Manizales

2023

## Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento a Dios por ser mi guía y mi fortaleza a lo largo de este viaje académico. Su gracia y su misericordia han sido mi sustento en los momentos de duda y dificultad. Agradezco por las bendiciones que he recibido, por la sabiduría que me ha sido otorgada y por el entendimiento que he alcanzado a través de este proceso. Que todas las glorias sean para Él, quien es la fuente de todo conocimiento y entendimiento.

Agradezco a mi asesora, Paula Andrea Osorio, por su orientación, paciencia y apoyo constante durante este proceso; sus consejos expertos y su dedicación fueron fundamentales para llevar a cabo este trabajo.

Quiero dedicar este proyecto a mi querida madre, por su amor incondicional, apoyo y sacrificios innumerables que han sido la fuerza motriz detrás de mi proceso académico. Su aliento y orientación han sido mi luz en momentos de oscuridad y mi inspiración en momentos de desafío. Gracias, mamá, por creer en mí más de lo que yo misma lo hice, por estar siempre ahí con palabras de aliento y por ser mi roca en los momentos difíciles.

Agradezco sinceramente a mis amigos y familiares por la comprensión y apoyo incondicional durante este período. Su apoyo emocional fue fundamental para mantenerme motivada y enfocada en mis objetivos.

Por último, pero no menos importante, a la Institución Educativa Escuela Normal Superior y a los estudiantes objeto de la muestra de estudio, quienes hicieron del proyecto un ambiente idóneo para intercambiar experiencias significativas.

A todos ustedes, ¡muchas gracias!

## Resumen

El presente proyecto investigativo ha sido desarrollado a partir de una propuesta didáctica, en la que se pretende integrar el lenguaje algebraico y las representaciones visuales para el aprendizaje del volumen en estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior del municipio de Aranzazu Caldas. Se propone una estrategia pedagógica con un enfoque didáctico con el fin de abordar y mejorar los procesos de aprendizaje que presentan los estudiantes en el pensamiento métrico espacial y en la resolución de problemas.

El estudio se realiza por medio de una revisión bibliográfica, donde se habla de la importancia de implementar las representaciones visuales como mediador de aprendizaje del lenguaje algebraico, y a su vez una estructura de marco teórico que ilustra como se basa el aprendizaje algebraico y geométrico, y el como se debe innovar para crear verdaderos cambios educativos incluso en las pruebas externas. Esta propuesta esta diseñada bajo una metodología de tipo cualitativo y enfoque descriptivo, ya que cuenta con herramientas que permiten recolectar información sobre las experiencias significativas que debe tener en cuenta el docente al momento de transmitir el conocimiento a los estudiantes.

Los resultados arrojados fueron satisfactorios, ya que se logra evidenciar los avances que obtienen los estudiantes en la comprensión del volumen de prismas y pirámides por medio de la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales, destacando la importancia de que el estudiante manipule material en concreto para la construcción de su conocimiento, y que pueda resolver ejercicios relacionados al contexto por medio de la comprobación algebraica generando así un aprendizaje activo que beneficia a toda la comunidad educativa y su entorno social.

En conclusión, se puede afirmar que el lenguaje algebraico no debe enseñarse de manera aislada con el pensamiento métrico espacial, y se destaca la necesidad de que los docentes deben transformar su práctica educativa para enfrentar los desafíos del mundo moderno, permitiendo que los estudiantes sean protagonistas activos de su aprendizaje, y que el uso de la tecnología sea aprovechado de manera didáctica dentro del aula de clase.

**Palabras clave:** Lenguaje algebraico – representaciones visuales – aprendizaje de volumen en prismas y pirámides – aprendizaje activo.

## **Abstract**

The present research project has been developed from a didactic proposal, in which it is intended to integrate algebraic language and visual representations for learning volume in eighth-grade students of the Higher Normal School Educational Institution of the municipality of Aranzazu Caldas. A pedagogical strategy is proposed with a didactic approach to address and improve the learning processes that students present in spatial metric thinking and problem-solving.

The study is carried out through a bibliographic review, which discusses the importance of implementing visual representations as a mediator of algebraic language learning, and at the same time a theoretical framework structure that illustrates how algebraic and geometric learning is based, and how to innovate to create true educational changes even in external tests. This proposal is designed under a qualitative methodology and descriptive approach since it has tools that allow collecting information about the significant experiences that the teacher must take into account when transmitting knowledge to students.

The results obtained were satisfactory since it is possible to demonstrate the progress that students obtain in understanding the volume of prisms and pyramids through the integration of algebraic language and visual representations, highlighting the importance of the student manipulating specific material. for the construction of their knowledge, and that they can solve exercises related to the context through algebraic verification, thus generating active learning that benefits the entire educational community and its social environment.

In conclusion, it can be stated that algebraic language should not be taught in isolation with spatial metric thinking, and the need for teachers to transform their educational practice to

face the challenges of the modern world is highlighted, allowing students to be protagonists. assets of their learning, and that the use of technology is used in a didactic manner within the classroom.

**Keywords:** Algebraic language – visual representations – volume learning in prisms and pyramids – active learning.

## TABLA DE CONTENIDO

1.	Planteamiento del problema .....	14
1.1	Formulación del problema .....	14
1.2	Justificación .....	18
1.3	Objetivos .....	19
1.4	Descripción del escenario .....	20
1.4.1	Pregunta de investigación .....	23
2.	Marco referencial.....	24
2.1	Antecedentes .....	24
2.1.1	Antecedentes internacionales.....	24
2.1.2	Antecedentes nacionales .....	27
2.1.3	Antecedentes regionales .....	31
2.2	Marco legal .....	33
2.2.1	Constitución política de Colombia: .....	33
2.2.2	Ley general de educación: .....	33
2.2.3	Lineamientos curriculares:.....	34
2.2.4	Estándares Básicos de Competencia (EBC): .....	35
2.2.5	Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA): .....	35
2.3	Marco teórico.....	36
2.3.1	Aprendizaje matemático en estudiantes de grado octavo: .....	36



2.3.2	Representaciones visuales en el aprendizaje del pensamiento métrico espacial:	41
2.3.3	Lenguaje algebraico en la comprensión del volumen en prismas y pirámides:	44
3.	Diseño metodológico.....	46
3.1	Enfoque de investigación:.....	46
3.2	Población y muestra.....	47
3.3	Validación de instrumentos .....	47
3.4	Componente ético .....	49
3.5	Estructura metodológica: .....	50
3.6	Fases de la investigación.....	56
4.	Análisis de resultados .....	57
4.1	Análisis de prueba diagnostica.....	57
4.2	Análisis de las hojas de trabajo.....	61
4.2.1	Análisis hoja de trabajo 1.....	62
4.2.2	Análisis hoja de trabajo 2.....	64
4.2.3	Análisis hoja de trabajo 3.....	66
4.2.4	Análisis hoja de trabajo 4.....	67
4.3	Cuestionario final.....	68
4.4	Triangulación entre la teoría y lo que se evidenció con los estudiantes .....	74

5.	Conclusiones.....	77
5.1	Respuesta a la pregunta central.....	77
6.	Recomendaciones .....	78
7.	Referencias .....	79
	Apéndices .....	90

## Lista de figuras

<b>Figura 1.</b> Resultados pregunta # 1 .....	68
<b>Figura 2.</b> Resultados pregunta # 2 .....	69
<b>Figura 3.</b> Resultados pregunta # 3 .....	70
<b>Figura 4.</b> Resultados pregunta # 4 .....	71
<b>Figura 5.</b> Resultados preguntas # 5 y # 6.....	72
<b>Figura 6.</b> Resultados preguntas # 7 y # 8.....	72

## Lista de tablas

<b>Tabla 1.</b> Validación de instrumentos .....	48
<b>Tabla 2.</b> Análisis sociodemográfico .....	51
<b>Tabla 3.</b> Análisis diagnóstico.....	51
<b>Tabla 4.</b> Análisis hoja de trabajo # 1 .....	53
<b>Tabla 5.</b> Análisis hoja de trabajo # 2 .....	54
<b>Tabla 6.</b> Resultados estudio socioeconómico .....	58
<b>Tabla 7.</b> Resultados diagnósticos.....	59
<b>Tabla 8.</b> Resultados análisis hoja de trabajo # 1 .....	62
<b>Tabla 9.</b> Resultados hoja de trabajo # 2 .....	65
<b>Tabla 10.</b> Triangulación.....	74

## Introducción

Las matemáticas se han caracterizado por presentar diversos cambios en los procesos de enseñanza – aprendizaje del concepto de volumen en prismas y pirámides, integrando las representaciones visuales y el lenguaje algebraico, en este orden de ideas la presente propuesta busca desarrollar una estrategia didáctica que permita la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales para la comprensión de volumen en prismas y pirámides en estudiantes de grado octavo, examinando los avances que tienen los estudiantes al respecto y poder contribuir en un cambio significativo sobre la enseñanza del pensamiento métrico – espacial, el lenguaje algebraico y la resolución de problemas aplicadas al contexto.

El primer capítulo, está direccionado al proceso inicial de llevar al lector, a comprender el proyecto desde la descripción del problema y el contexto donde se llevará a cabo la investigación; así mismo, se presenta el planteamiento del problema, en donde se exponen cuatro preguntas orientadoras que permiten la formulación de la pregunta general. Luego de tener claro cuál es el problema y la pregunta a resolver, se plantean el objetivo general y los específicos, que servirán para guiar cada una de las actividades a desarrollar y; por último, se presenta la justificación, con el fin de dar a conocer por que es viable realizar este proceso investigativo. En el segundo capítulo, se establecen los referentes teóricos que soportan el trabajo a desarrollar, desde una mirada pedagógica, didáctica e investigativa; para ello, se inicia con un recorrido histórico por las diferentes investigaciones realizadas a nivel regional, nacional e internacional con referencia a la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales; seguidamente se dan a conocer las leyes, decretos y demás legislaciones educativas que permiten orientar la enseñanza en Colombia,

para finalizar hablando del desarrollo histórico y teórico del aprendizaje de volumen en prismas y pirámide por medio de la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales.

En un tercer capítulo se establece la metodología a trabajar, acompañada de las fases y los diferentes instrumentos que se aplicaran durante el desarrollo de la estrategia; allí también se encontraran las variables dependientes e independientes que se tendrán en cuenta al momento de realizar el análisis de los datos recolectados durante la investigación. Dicho análisis será descrito en el cuarto capítulo, el cual estará soportado por diferentes tablas y figuras, que permitirán una mayor comprensión por parte del lector.

Ya en el último apartado se denotan las conclusiones y recomendaciones a las cuales lleva la formulación, aplicación y análisis de este trabajo investigativo, con el fin de dar un cierre basado en fundamentos pedagógicos, didácticos y disciplinarios, como aporte al trabajo dentro del aula de clases, y sustento para próximas investigaciones.

## 1. Planteamiento del problema

### 1.1 Formulación del problema

Al analizar los resultados de las pruebas Evaluar para Avanzar del grado 8°, se evidencian desempeños bajos en el pensamiento métrico espacial, en donde al hacer indagación con los estudiantes, se puede determinar que existe dificultad para hacer la relación entre el concepto geométrico y su representación visual, no comprendiendo el lenguaje propio de las matemáticas con la construcción del objeto y la realidad que lo rodea. De acuerdo con Moriena & Scaglia (2003a) “los alumnos tienen dificultad para reconocer una figura geométrica cuando la representación gráfica que se presenta no es la estereotipada” (p. 6).

Es por esto, que se ve la necesidad de emplear estrategias que permitan un descubrimiento más profundo de lo anteriormente mencionado, como lo afirma Tomalá (2023a) la geometría plantea un mayor desafío al momento de presentar resultados de aprendizaje de calidad, ya que su naturaleza teórica y abstracta exige habilidades de razonamiento avanzadas, como la utilización de ayudas didácticas tangibles para comprender los conceptos geométricos de manera más sencilla.

Con base en esto, se llevará a cabo una investigación cualitativa, para contribuir a mejorar los desempeños académicos en pruebas estandarizadas. Como lo expresa Shulman (2005) los contenidos del PEI tiene unas características estipuladas, simplificando la creatividad del docente, sin embargo, se exigen clases prácticas con el fin de fomentar no solamente la motivación para desarrollar procesos de mayor complejidad en las matemáticas, sino, la manera de que el estudiante explore a través de recursos didácticos la

integración del lenguaje algebraico y la relación que se da con su propia representación usando material concreto.

El ser humano a través de la historia ha emprendido diferentes estudios científicos y con rigurosidad procedimental para ir más allá de sus capacidades, entender de forma más cercana la realidad que lo rodea y promover su desarrollo y el de sus comunidades. Es por esto, que se busca que los estudiantes de la Escuela Normal Superior de Aranzazu, logren a partir de esta propuesta llevar a la realidad conocimientos innatos de la geometría que serán de gran utilidad para comprender el contexto y también la aplicabilidad a la que se vea permeado.

Uno de los aprendizajes fundamentales de las ciencias, recae sobre las matemáticas que se convierte en una de las demandas y necesidades fundamentales en cada periodo histórico de la humanidad. Su estudio favorece el alcance de habilidades y competencias propias de un pensamiento dinámico, flexible, con la capacidad de entender los fenómenos que acontecen a su alrededor, aunque muchas veces no se perciba de forma directa, la matemática está implícita en cada actividad que se realiza a diario, desde un principio tan básico como lo son las operaciones básicas que es útil en la cotidianidad de las personas; además, de escenarios más profesionales como lo son la ingeniería, medicina, química, etc. y es el complemento de otras ciencias que permiten explorar y profundizar en todo lo desconocido que rodea al hombre.

En este orden de ideas, se espera resaltar y destacar habilidades de tipo geométrico en los estudiantes, la comprensión del lenguaje propio de las matemáticas, implica un entendimiento de la geometría que requiere de aprendizajes experienciales, vivenciales y que partan de escenarios prácticos donde se puedan comprender e interpretar desde lo



general a lo particular las condiciones y cualidades que posee un mundo complejo, con muchos matices, contrastes y desafíos, teniendo en cuenta las características particulares del contexto en el que se desenvuelve el sujeto.

En este sentido, es ahí donde entra en juego el contexto educativo, el cual debe brindar al educando herramientas básicas que le permiten entender el mundo que lo rodea desde los fenómenos matemáticos que acontecen a su alrededor y para eso se requiere que se trabajen conceptos como la geometría bidimensional y tridimensional desde sus diferentes elementos, propiedades y características de ejemplos reales, específicos y que haga uso de materiales e instrumentos con los cuales se cuenta en el medio y las nuevas tecnologías de la información y la comunicación que brindan herramientas y recursos para profundizar y no solo trabajar los temas desde el tablero y el cuaderno de forma tradicional, sino implementar nuevos recursos y escenarios que posibiliten procesos de enseñanza y aprendizaje más concretos y acertados. Aún en las aulas de clase persisten los modelos tradicionales de enseñanza donde se le brinda al educando talleres, problemas y actividades que carecen de profundidad y practicidad.

Sin duda la geometría y el lenguaje algebraico en el cual se pretende profundizar en la presente propuesta de investigación, representa un campo fundamental en las matemáticas, ya que es el principio de comprensión de lo que acontece en el entorno como las construcciones comunes, tales como los templos, edificios, pirámides históricas alrededor del mundo; pero el tema aún, se sigue abordando de una manera superficial sin profundizar, dejando así, vacíos conceptuales que repercuten en su desempeño ya sea en la pruebas internas o externas e igualmente en niveles académicos universitarios, donde

muchos de los estudiantes rechazan carreras que tienen un alto contenido matemático, evidenciando déficits en el aprendizaje.

Resulta claro que, en los diferentes contextos de la vida educativa, se encuentran estudiantes que dan a conocer sus inconformidades ya que no entienden diversos conceptos cuando se habla de geometría o expresiones algebraicas y es precisamente esta situación que se debe tener en cuenta al momento de ingresar a un aula de clases para impartir conocimientos y generar en el estudiante el gusto por dicha asignatura.

Es así como en la Institución Educativa Escuela Normal Superior Sagrado Corazón, se hallan estudiantes que no muestran interés en las clases de matemáticas donde se trabaja este tipo de conceptos, en la que llegan a una situación la cual se ve la enseñanza de la asignatura como algo tedioso, que no le haya practicidad y terminan por poner ciertas barreras al momento de aprender, y a justificar su desinterés con preguntas como ¿para qué me sirve eso en la vida? Todas estas situaciones de rechazo hacen que el tema enseñado sea olvidado de forma instantánea por la poca preocupación de retenerlo en su mente, y luego, al enfrentarse a una vida universitaria, laboral e incluso familiar, se dan cuenta de lo necesario que era cierto tema y que en su momento no aprendió.

Es por esto que, se requiere desarrollar una propuesta didáctica donde el estudiante construya con rigor conceptos como expresiones algebraicas de volumen en prismas, pirámides y sus implicaciones en el mundo tangible, vivencial, en el entorno que converge a su alrededor en escenarios que faciliten el dialogo, la participación activa, incluso la forma en la que los desarrolla, y poder destacar en ellos sus grandes habilidades e intereses y que el espacio educativo sea más agradable.

## 1.2 Justificación

Los escenarios educativos al impartir conceptos de la matemática que tienen un lenguaje propio como expresiones algebraicas y sus implicaciones en diferentes contextos aún se encuentran marcados por los escenarios tradicionales de enseñanza, los profesores imparten los temas con talleres extensos, carentes de contexto, practicidad, se busca que se interpreten figuras y se dan unas opciones de respuesta pero hay vacíos realmente en la manera en la cual se llega al tema, se da por hecho que el educando ya tiene una idea del significado cuando ni siquiera se tiene una noción básica de los conceptos, hace falta ver más las matemáticas desde la vida cotidiana, desde la manera en cómo esta se encuentra implícita en los elementos que convergen en el entorno, como un principio básico para entender y comprender el medio que habita y como se dan fenómenos tan contextuales y relevantes en el diario acontecer.

En el contexto local donde se desarrolla la propuesta se ha visto también una tendencia a abordar de forma tradicional este tipo de conceptos, por lo cual hace falta desarrollar propuestas investigativas en las cuales se explore nuevas y variadas formas de llegar al conocimiento con herramientas y experiencias de aprendizaje más interactivas y dinámicas como por ejemplo con el uso de las TIC las cuales representan un gran beneficio ya que permite desarrollar habilidades del pensamiento más acordes a las necesidades y expectativas actuales y se torna un proceso mucho más llamativo e interactivo para el educando en formación, puesto que existen herramientas gráficas o simuladores que enriquecen la experiencia.

Dentro de este marco, se necesita brindar prácticas basadas en procesos de enseñanza y aprendizaje que se salgan de lo usualmente abordado más que imponer

conceptos y procedimientos y tratar de abordar una temática con diferentes estrategias que involucren a sus educandos en una práctica más experiencial, vivencial con ejemplos de la cotidianidad y a su vez con el uso de nuevos recursos, para que se sientan motivados a descubrir y comprender por sí mismos el conocimiento, formando así, seres críticos y reflexivos de los aprendizajes alcanzados, desarrollado procesos meta-cognitivos, críticos y reflexivos que en conjunto se convierten en herramientas esenciales para su proyecto de vida.

Por lo tanto, la tarea del educador sea transformar el pensamiento del educando que sea capaz de crear y producir intelectualmente de forma independiente y a su vez retroalimente su aprendizaje con sus compañeros y docente; con lo anteriormente descrito, se puede entender que la investigación se dará desde una perspectiva didáctica que permita a los estudiantes mejorar no solamente los desempeños, sino desde nuevos conocimientos, aplicarlo a la realidad desde cualquier sector cotidiano y productivo. También los docentes de la Escuela Normal Superior Sagrado Corazón, se pueden apoyar en este tipo de proyectos para contribuir al desarrollo de procesos aplicados de acuerdo a lo enseñado en la clase de matemáticas. De igual manera, los investigadores en educación pueden tener a través de los resultados y análisis una información que les permita mejorar la práctica de aula y llevar al estudiante a comprender las matemáticas desde su lenguaje algebraico y su representación, visto como un objeto matemático.

### **1.3 Objetivos**

#### **Objetivo general:**

Desarrollar una estrategia didáctica que permita la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales para la comprensión de volumen en prismas y pirámides en estudiantes de grado octavo.

### **Objetivos específicos:**

Identificar el lenguaje algebraico y las representaciones visuales que tienen los estudiantes en elementos básicos y propiedades de la geometría plana.

Implementar unas hojas de trabajo que facilite la comprensión del concepto de volumen de poliedros, integrando el lenguaje algebraico y las representaciones visuales aplicadas a contextos reales.

Analizar los resultados de la estrategia didáctica implementada con los estudiantes del grado octavo para fortalecer el concepto del volumen de poliedros.

### **1.4 Descripción del escenario**

La Institución Educativa perteneciente al sector oficial, de calendario A, ubicada en la zona urbana del municipio de Aranzazu, Caldas; cuenta con jornadas de estudio mañana completa para modalidad jardín, preescolar, básica primaria, básica secundaria, media, y formación complementaria; y la jornada fin de semana para el programa de educación de adultos.

Cuenta con dos sedes, la principal ubicada en la carrera 6ª # 5 – 08, y la sede de básica primaria en la calle 4ª # 5 – 09. A continuación, se presenta la misión, visión,

filosofía, slogan, valores y modelo pedagógico que describen la identidad institucional de acuerdo a lo estipulado en el Proyecto Educativo Institucional (PEI) de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Sagrado Corazón (2022) adoptando los reglamentos base de la educación en Colombia.

## **VISIÓN**

La Institución Educativa Escuela Normal Superior Sagrado Corazón del municipio de Aranzazu, Caldas, en el año 2027 será reconocida por asegurar procesos formativos, evaluativos, investigativos y de extensión comunitaria que impacten a la infancia y la juventud del departamento de Caldas.

## **MISIÓN**

La Institución Educativa Escuela Normal Superior Sagrado Corazón presta el servicio educativo en los niveles de Preescolar, Básica y Media. Asimismo, desarrolla un Programa de Formación de Adultos y está autorizada para ofertar un Programa de Formación Complementaria que prepara maestros para desempeñarse en los niveles de Preescolar y Básica Primaria; partiendo de procesos formativos, evaluativos, investigativos y de extensión comunitaria que aportan al desarrollo humano, social, educativo, ético y cultural de la comunidad aranzacita, caldense y colombiana. Incorpora los valores de la responsabilidad, el respeto, la solidaridad, la participación y la convivencia como pilares que sustentan el proyecto formativo de la infancia y la juventud que atiende.

## **FILOSOFÍA**

La Institución Educativa Escuela Normal Superior Sagrado Corazón del Municipio de Aranzazu, asume la formación humana desde el carisma de San Vicente de Paúl y Santa Luisa de Marillac, centrada en el servicio al necesitado.

### **SLOGAN**

Formar para Transformar

### **VALORES INSTITUCIONALES**

Responsabilidad, convivencia, solidaridad, participación, liderazgo.

### **MODELO PEDAGÓGICO**

Social – cognitivo

Las aulas de la institución cuentan con parlante interno y con televisor para uso pedagógico; además, de contar con laboratorios debidamente dotados con el material que requiere para el desarrollo de las distintas prácticas en el área de ciencias.

La básica secundaria también cuenta con diversos espacios que permiten no solo el sano esparcimiento y recreación del tiempo libre; sino, que se consolidan ambientes académicos que les permite fortalecer procesos de aprendizaje, a partir de la experiencia. Se mencionan alguno de ellos: Laboratorio de matemáticas, laboratorio de español, laboratorio de inglés, laboratorio de biología, laboratorio expresión artística, 3 salas de sistemas, salón de proyecciones, emisora escolar, cancha deportiva, gimnasio.

### ***1.4.1 Pregunta de investigación***

¿Cómo la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales facilita la comprensión de volumen en prismas y pirámides en estudiantes de grado octavo?

De la anterior pregunta, se desglosan las siguientes preguntas auxiliares:

¿Cómo las distintas herramientas didácticas permiten dar una comprensión cotidiana de los prismas y las pirámides en estudiantes de grado octavo?

¿De qué manera los estudiantes del grado octavo perciben la concepción de prismas y pirámides y cómo regular estas percepciones en el marco de lo cotidiano?

¿Cómo evaluar de forma significativa el rendimiento académico de los estudiantes de grado octavo desde el lenguaje algebraico en el contexto en que se desarrolla?

¿Qué diferencia hay en la comprensión del lenguaje algebraico y las representaciones visuales desde los diferentes niveles de competencias matemáticas?



## 2. Marco referencial

### 2.1 Antecedentes

Durante el rastreo bibliográfico, se analizan trabajos de investigación culminados con el fin de analizar lo que recientemente se ha desarrollado en el campo la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales para mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje del volumen de cuerpos geométricos. Una vez considerada la relación entre ellas, se podrá encontrar en la lectura lo que se ha realizado a nivel internacional, nacional y regional.

#### 2.1.1 Antecedentes internacionales

Quispe (2020) en su tesis titulada “Uso de GeoGebra en el aprendizaje de cuerpos geométricos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria”, realizada en Perú, expresa la importancia del uso del GeoGebra como herramienta pedagógica para el aprendizaje de cuerpos geométricos teniendo como hipótesis la influencia del software en el aprendizaje de los estudiantes del tercer grado de secundaria de la Institución Educativa Daniel Alcides Carrión.

Esta tesis plantea una metodología de tipo aplicada siguiendo el diseño pre experimental, donde se obtiene que el software es una herramienta de gran influencia en el aprendizaje de los cuerpos geométricos, ya que los estudiantes manifiestan a través de las pruebas realizadas un nivel de confianza con el GeoGebra del 95%.

La intervención se llevó a cabo a través de cuatro pre test y cuatro post test, los cuales son enseñados a través de la metodología de razonamiento de Van Hiele, distribuidas en seis secciones donde se busca evaluar las cuatro capacidades del área de matemáticas, obteniendo como resultado una mejora en el rendimiento académico de los estudiantes en la

resolución de cuerpos geométricos y concluyendo en la importancia del uso de representaciones visuales en 3D para que los estudiantes realicen conjeturas propias.

Por otra parte, en la investigación realizada por Mondragón et al. (2022) hablan de la importancia del estudio de identidades algebraicas y factorización integrado con materiales manipulables y el uso del GeoGebra, investigación llevada a cabo de manera virtual lo cual hacía aún más grande el reto del uso de material concreto. La metodología usada es la ingeniería didáctica, la cual consta de cuatro fases: análisis preliminar, análisis a priori, puesta en escena y análisis a posteriori.

En cada una de las fases desarrolladas se fue encontrando y abordando la investigación, como primer lugar se halla la problemática en diferentes dimensiones las cuales serán abordadas en la etapa a posteriori; en el análisis a priori se desarrollaron las secuencias didácticas basados en las identidades geométricas y la factorización tomadas desde una perspectiva geométrica a través del uso del GeoGebra como aplicación de reproducción de figuras geométricas en 3D.

En la fase de experimentación se llevaron a cabo las actividades didácticas del cual fueron escogidos los datos para el análisis final, esta intervención fue realizada en estudiantes de la educación media superior de la Universidad Autónoma de Guerrero, y en el análisis a posteriori se analizan los datos según la metodología usada, teniendo como conclusión la importancia del trabajo remoto de los estudiantes, para identificar sus fragilidades y fortalezas donde se pueda intervenir de manera inmediata, además de la importancia de la representación visual que tiene el estudiante en el desarrollo algebraico de las identidades geométricas y a factorización.

Desde la perspectiva de Maier & Ferreyra (2014) donde hablan de su experiencia en la intervención con estudiantes de segundo año de la Escuela Secundaria de Santa Rosa, en Argentina, llamada “Introducción al lenguaje algebraico con uso de hipertextos” evidencian una problemática en la enseñanza tradicional del lenguaje algebraico; para esto diseñan un hipertexto con el propósito de captar el interés del estudiante y permitir que el alumno avance académicamente sin la necesidad que el profesor este siempre transmitiendo el conocimiento.

Los hipertextos, son una herramienta que permite romper con las tradiciones educativas, ya que el estudiante, es quien decide cómo desarrollar las actividades allí planteadas, además que le da un acceso de información no solo a través de textos, también se le ofrecen videos, imágenes, sonidos, etc., potenciado la toma de decisiones, mediante el medio que requiere para obtener la información necesaria y poder resolver los ejercicios planteados.

La creación del hipertexto tiene como objeto la iniciación del lenguaje algebraico, donde los estudiantes pueden crear, pensar, elaborar métodos y fórmulas para resolver las expresiones algebraicas allí planteadas. Desde esta metodología se crea una guía de trabajo para integrar los hipertextos a la práctica pedagógica con el objetivo de que los estudiantes puedan integrarse no solo a la comprensión del lenguaje algebraico en ecuaciones lineales, sino, que también pueda ser capaz de solucionar ejercicios por medios de diferentes herramientas presentadas por las TICS.

En conclusión, se evidencia un mejor aprovechamiento del tiempo dentro de las aulas, mejoras en la atención del estudiante y además de una enseñanza guiada a través de

la tecnología, y brindarle al estudiante todas las herramientas posibles para llegar a una misma solución logrando la comprensión eficaz del componente matemático.

En términos generales, se puede ver una gran apreciación por elementos de tipo tecnológico que emplean los maestros para el desarrollo de la enseñanza de volúmenes, esto permite al estudiante comprender los procesos que se presentan en la geometría tridimensional, sin embargo, es importante contemplar los objetos tangibles para que se puedan interpretar e identificar los elementos que hacen del objeto relevante.

### **2.1.2 Antecedentes nacionales**

En la búsqueda del rastreo bibliográfico, es importante resaltar que se han encontrado unas investigaciones que están enmarcadas en el aprendizaje del pensamiento métrico espacial, en la cual se fundamentan en teorías didácticas para fortalecer esos conocimientos, y llevar al estudiante a potenciar las competencias matemáticas con el fin de dar solución a situaciones de contexto.

Es importante mencionar lo realizado por Mancera (2022), una tesis de maestría titulada “Una estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Escuela Sol Naciente”, realizada en Colombia, la cual plantea que, a lo largo del tiempo, el desempeño de los estudiantes en las Pruebas Saber 11 y Saber 9, del colegio “Escuela Sol Naciente”, específicamente los resultados asociados al pensamiento espacial y sistemas geométricos, no han sido satisfactorios. Por tal razón se seleccionaron algunos de estos contenidos para plantear una estrategia didáctica que fortalezca el pensamiento espacial de los estudiantes de grado octavo.

La estrategia planteada en esta tesis se basa en dar a los estudiantes, técnicas y herramientas de representación de los objetos tridimensionales, en vez de presentar fórmulas y ejercicios de aplicación como se hace de forma tradicional, también dando mayor importancia a los contenidos de la geometría espacial que usualmente vienen relegados hacia el final del año.

La metodología utilizada para la estrategia didáctica es constructivista, puesto que el estudiante a través de actividades de diseño, trazado, construcciones geométricas, aplicaciones lúdicas, planteamiento y resolución de problemas en grupo.

En sus resultados se puede destacar la revisión bibliográfica sobre el desarrollo de la geometría y el pensamiento espacial. Para realizar la intervención inicialmente se aplicó una prueba diagnóstica para medir las habilidades espaciales de los estudiantes, posteriormente se aplicaron ocho sesiones de clase entre talleres, ejercicios y clases teórico-prácticas, para fortalecer las habilidades espaciales que fueron seleccionadas para la estrategia. Por último, se aplicó una prueba final para determinar el progreso en dichas habilidades.

Por lo tanto, se puede concluir que es necesaria una intervención constante, donde las estrategias empleadas permitan a los estudiantes resolver distintos problemas de la vida cotidiana, visualizando y teniendo claras unas bases teóricas aplicadas al contexto, también en esta tesis se plantea la necesidad de orientar los contenidos desde un principio con ayudas visuales, pues en ciertas ocasiones se centran demasiado en los procesos en los cuales se resuelven diversas ecuaciones y siempre se deja de último la parte visual o inclusive no se da.

T. Serna et al. (2021) señalan en su investigación denominada: “Propuesta para la enseñanza de las expresiones algebraicas en educación secundaria mediante la asociación del lenguaje cotidiano y el lenguaje algebraico integrando la tecnología digital Scratch”, que la enseñanza del álgebra ha sido descontextualizada, ocasionando que el estudiante lo considere un aprendizaje de gran dificultad y pierda el interés por aprenderlo. Es por esto que realizan una convocatoria de participación libre en los estudiantes de un colegio público ubicado al oriente de Antioquia, para involucrarlos desde sus experiencias en la interpretación de significados de expresiones algebraicas partiendo desde el lenguaje cotidiano.

Esta investigación tiene una metodología cualitativa con un enfoque interpretativo y naturalista, a través del uso de estudios de caso, con el fin de contextualizar específicamente el proyecto, y estos se integran con la observación del entorno como complemento para la comprensión del lenguaje algebraico con el cotidiano. Además del uso de la aplicación Scratch como entorno de programación para crear historias y animaciones visuales que pueden ser desarrolladas en el contexto investigativo, captando el interés de los estudiantes a través de la asociación del lenguaje algebraico y el lenguaje cotidiano.

En conclusión, esta intervención muestra la importancia de integrar el lenguaje algebraico, el lenguaje cotidiano y las TICS, favoreciendo a los estudiantes en la comprensión matemática deseada y el uso eficiente de la tecnología en la resolución de problemas de su propio entorno, donde el papel principal es la representación visual y algebraica en el estudiante como mediador del aprendizaje.

Además, el aporte investigativo por parte de Montoya (2021) titulado: A propósito de las representaciones algebraicas: una relación entre situaciones cotidianas y el lenguaje algebraico formal mediante un análisis histórico epistemológico, una propuesta que nace a partir del poco interés de los estudiantes hacia las matemáticas específicamente al introducirlos al lenguaje algebraico, teniendo en cuenta una línea investigativa de estudios históricos y epistemológicos, con el fin de analizar científicamente por qué los estudiantes mentalmente son capaces de resolver todo tipo de algoritmos matemáticos y darle solución a una situación problema de su cotidianidad, pero que cuando se les presenta un lenguaje algebraico se bloquean, obteniendo así, un estudio de caso instrumental para poder comprender el contexto de los estudiantes.

A partir de ahí, se realiza un bosquejo del cómo nace el lenguaje algebraico y el cómo ha sido enseñado con el paso generacional, planteando una estrategia de participación activa de los estudiantes, donde se evidencia que las discusiones acopladas al contexto social del estudiante permiten que, puedan comprender, manipular, desarrollar y enriquecer la información obtenida; y a su vez, destaca que la representación vinculada al problema, es más eficiente cuando se presenta en el mundo tangible del estudiante, porque desde allí, ya se le está mostrando un problema que le converge.

En conclusión, se evidencia una vital transformación educativa, específicamente desde el enfoque que le da el docente, quien es el encargado de hacer la transición del lenguaje natural al algebraico, invitándole a que reflexione sobre como imparte los contenidos, destacando que el estudiante ya no puede ser una vasija de depósito de contenido, sino que, sea un papel activo durante el proceso de enseñanza, y destaca la importancia del uso de la geometría en la estructuración del lenguaje algebraico.

### **2.1.3 Antecedentes regionales**

En el rastreo bibliográfico regional se encuentra a Vasco (2023) con su trabajo de grado titulado “El álgebra geométrica como herramienta didáctica para la enseñanza de la factorización de trinomios” una propuesta didáctica donde se busca tener un aprendizaje activo en el concepto de geometría bidimensional a través de la factorización en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Liceo Mixto Sinaí de Manizales; la intervención pedagógica tiene un enfoque cualitativo, de tipo descriptiva, la cual permite a los estudiante la relación con material en concreto y la observación de gráficos como camino para que el estudiante llegue al conocimiento a traes de sus propias conclusiones, ya que hay una mejor trasformación del lenguaje natural la lenguaje algebraico.

La factorización como lenguaje algebraico, permite que los estudiantes puedan hallar áreas, y perímetros en cuerpos geométricos, desarrollando e integrando las competencias y pensamientos matemáticos, a través de un libro de secuencias didácticas teniendo como medio principal el uso del material en concreto para la solución de factores, logrando que los estudiantes tuvieran un aprendizaje más autónomo y consiente.

Por otra parte, la investigación realizada por Parra (2020) titulada: Método gráfico para la enseñanza de las fracciones mediado con GeoGebra y la teoría de los registros de representación; desarrollada en la Institución Técnica Agropecuaria el Guayabo de Fresno Tolima, donde describe que las fracciones aún siguen siendo un tema complejo tanto de enseñar como de aprender, y que pese a las diversas estrategias pedagógicas de enseñanza, los docentes aun no adoptan otra representación visual más que la numérica.

La metodología investigativa es cualitativa de diseño tipo de caso, donde pretendía analizar el resultado después de llevar a los estudiantes a una interacción de representación



visual a través del uso del GeoGebra como mediador didáctico de aprendizaje; intervención realizada por medio de un pre-test, un pos-test y una guía de trabajo dividida en cuatro sesiones diseñada con el software mencionado; los resultados obtenidos durante la aplicación de los instrumentos, fueron positivos en los estudiantes, ya que el uso tecnológico y la posibilidad de observar gráficamente lo que se trabajaba permitía que el estudiante comprendiera con mayor asertividad donde estaba su error, e hiciera los ajustes necesarios en su trabajo numérico.

## **2.2 Marco legal**

Es esta investigación se tiene en cuenta las leyes y los referentes curriculares, establecidos a nivel nacional para facilitar los procesos de aprendizajes de los educandos en Colombia, con el fin de fortalecer y garantizar un sistema educativo incluyente, de calidad y acorde a las demandas actuales de la evolución educativa a nivel mundial. La educación de calidad es un factor fundamental para el desarrollo social, político y cultural del país, requiriendo unión entre el estado, MINEDUCACIÓN, instituciones educativas, docentes, padres de familia y demás actores relevantes de la transformación del sistema educativo.

### ***2.2.1 Constitución política de Colombia:***

La república de Colombia reconoce la educación como un derecho fundamental para el desarrollo integral de la persona, es por esto que la Constitución Política de Colombia de 1991 habla de la educación como deber social a toda persona sin condición alguna. El estado está obligado a garantizar acceso, permanencia, calidad y equidad en la misma, contribuyendo al desarrollo individual para fortalecer los procesos de una sociedad democrática, inclusiva y participativa; (const., art. 67) es por esto que en la institución Educativa Escuela Normal Superior Sagrado Corazón del municipio de Aranzazu parte de este derecho fundamental para brindar educación, en especial a los estudiantes del grado 8° con quienes se realiza la presente propuesta.

### ***2.2.2 Ley general de educación:***

La institución educativa toma en cuenta los parámetros establecidos en la Ley General de educación (LEY 115 de 1994), la cual constituye la formación formal, informal, y no formal y donde cada institución es libre en ofertar el programa académico deseado, por esto en la Escuela Normal Superior, se cuenta con una educación formal brindando los

servicios educativos a toda la población aranzacita, en los niveles de jardín, preescolar, básica primaria, básica media, bachiller, formación complementaria y educación para adultos, en las modalidades de mañana completa y sabatino. La presente Ley tiene como objeto establecer las directrices para el acceso, calidad, equidad, permanencia y eficiencia de la educación, fomentando así la formación integral de los estudiantes como seres humanos autónomos, críticos, reflexivos y participativos con capacidades de contribuir al desarrollo de la sociedad; siendo deber del estado suplir todas las necesidades de cada institución para brindar accesibilidad, permanencia y calidad a todos los estudiantes en los diferentes niveles educativos.

### ***2.2.3 Lineamientos curriculares:***

Los lineamientos curriculares de matemáticas están distribuidos en los diferentes pensamientos con la finalidad de establecer los criterios, contenidos, metodología y procesos evaluativos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos; teniendo como objetivos el desarrollo de habilidades matemáticas, pensamiento lógico, razonamiento, resolución de problemas y aplicación de los conocimientos matemáticos en contextos cotidianos enfocados en el desarrollo integral de los estudiantes. Estos abarcan temas para el desarrollo de habilidades matemáticas, incluyendo números, operaciones, álgebra, geometría, estadística y probabilidad transversalizado con otras áreas del conocimiento, y siendo evaluados de manera continúa teniendo en base al aprendizaje de los estudiantes, no solo teniendo en cuenta los resultados sino los procesos, razonamiento y su aplicabilidad al entorno en que se encuentra.

#### **2.2.4 Estándares Básicos de Competencia (EBC):**

Estos están fundamentados en la Ley General de Educación (Ley 115), teniendo como propósito establecer los logros esperados en el área de matemáticas durante los grados académicos de la educación inicial hasta la media (MEN, 2006). La propuesta toma los estándares del colectivo de 8° a 9° desde los pensamientos variacional y algebraico “Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas” (p. 87) y pensamiento geométrico “Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas” (p.86) con el fin de apoyar a los estudiantes por medio de las representaciones visuales la comprensión y aplicación del lenguaje algebraico en la solución de problemas sobre el volumen de prisma y pirámide, permitiendo alcanzar el objetivos de dichos estándares

#### **2.2.5 Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA):**

Los DBA se fundamenta en la Constitución política de Colombia y en la Ley General de Educación y son considerados una actualización especificada de los estándares básicos de competencia, donde se aclara el logro esperado por los estudiantes durante cada año escolar, estableciendo rutas de enseñanza para generar en las instituciones educativas flexibilidad curricular de acuerdo a su PEI, por esto se trata de dar cumplimiento al DBA N° 8 “Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.” (p. 63) (MEN, 2016) buscando que los estudiantes integren el lenguaje algebraico y las representaciones visuales comprendiendo el concepto del volumen y

llevándolo a situaciones más contextualizadas con el fin de poder darle una aplicabilidad más asertiva.

## **2.3 Marco teórico**

### ***2.3.1 Aprendizaje matemático en estudiantes de grado octavo:***

La propuesta está enfocada en la mejora del proceso de aprendizaje del volumen en prismas y pirámides en estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Sagrado Corazón. El proyecto busca que se pueda desarrollar este contenido temático a través de la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales; Hitt (1998a) menciona que el fracaso en estudiantes se debe a la carencia de articulación entre las representaciones provocando que el alumno "camine a ciegas" en el sistema algebraico, desarrollando únicamente algoritmos sin idea clara del objetivo al que se hace referencia.

Desde una perspectiva más general, este enfoque se basa en el indicio de que para aprender conceptos matemáticos hay que hacer uso del lenguaje algebraico y su representación geométrica siendo lo visual la manera de poder comprender relaciones, propiedades y elementos con el fin de asimilar la información recibida. Godino et al. (2017a) consideran que “la noción de configuración ontosemiótica (de prácticas, objetos y procesos) responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas” (p. 94) para que el estudiante logre desarrollar la habilidad espacial desde el concepto hasta su imaginación, y así tenga, un mayor interés por el uso del lenguaje algebraico para descubrir, describir, justificar y demostrar de manera más clara cómo funciona el concepto de volumen en las figuras tridimensionales.

Por otra parte, es necesario que el estudiante al trabajar con material en concreto se le facilite el aprendizaje visual de poliedros y su relación con el volumen, permitiendo que, al llegar al uso de expresiones algebraicas, ya tenga una imagen de cómo actúa esta representación y como precisa la medición de este, y así, se pueda relacionar la integración algebraica con el objeto de aprendizaje que se desea; el docente según Godino et al. (2017b) debe tener un conocimiento propio de la temática y de transformaciones que se puedan aplicar en el aula durante el proceso de enseñanza y aprendizaje con ayuda de factores psicológicos, sociológicos, pedagógicos, tecnológicos, etc. con el fin de proporcionar bases sólidas para la comprensión de conceptos matemáticos mucho más complejos a los que se enfrentara en otros niveles educativos o en su contexto social.

El aprendizaje matemático está en el ser humano a través de los sentidos y en la exploración de todo lo que le rodea llevando a que quieran transformar su realidad para poder comprender el entorno en el que se desenvuelve y crear nuevos beneficios, y afirmando lo expuesto por Vargas & Gamboa (2013a), el modelo de Van Hiele (1957) apoya al docente en la planificación de la enseñanza geométrica teniendo en cuenta todos los pensamientos y describiendo los cuatro niveles y las cinco fases de aprendizaje geométrico las cuales se mencionan a continuación:

### **NIVELES MODELO VAN HIELE**

**Nivel 0 – Descriptivo:** En este nivel, los estudiantes pueden describir las propiedades de las figuras geométricas, pero la comprensión se basa en la apariencia visual.

**Nivel 1 – Reconocimiento visual:** Los estudiantes pueden reconocer formas y figuras geométricas, pero limita la comprensión a una descripción visual básica.

**Nivel 2 – Análisis:** Los estudiantes comprenden las relaciones entre las propiedades geométricas; compara las diferentes formas, identifica patrones y utiliza la lógica deductiva para llegar a las conclusiones.

**Nivel 3 – Clasificación:** Los estudiantes clasifican figuras geométricas en relación de las propiedades, entendiendo las características y las agrupa de acuerdo a estas.

**Nivel 4 – Deducción formal:** Es el nivel más alto, donde los estudiantes comprenden el concepto geométrico de forma abstracta y razona sobre las propiedades para realizar demostraciones y conceptos a situaciones nuevas.

La teoría de Van Hiele establece que los estudiantes pasan por estos niveles de desarrollo en forma secuencial, construyendo el nuevo desde el anterior; sin embargo, se pueden estancar si no reciben una orientación y estímulo adecuado. Además, establece unas fases que se relacionan con los niveles, pero estas se centran en la forma que los estudiantes se relacionan con el material y el cómo avanza en la comprensión.

### **FASES MODELO VAN HIELE**

**Fase 1 – Indagación:** Detecta los diferentes conceptos que tiene el estudiante respecto a la geometría, su finalidad no es que el estudiante resuelva las actividades propuestas.

**Fase 2 – Orientación dirigida:** El docente guía las actividades introduciendo los nuevos conceptos e ilustrando las situaciones.

**Fase 3 – Explicitación:** Los estudiantes son conscientes de las relaciones y las expresan con lenguaje algebraico, resolviendo por diferentes procesos, pero llegando a una misma respuesta.

**Fase 4 – Orientación libre:** Los estudiantes aplican los conocimientos y el lenguaje algebraico por medio situaciones de su entorno.

**Fase 5 – Integración:** El estudiante consolida los resultados y aplica lo aprendido.

La comprensión de estas fases permite a los docentes diseñar las actividades de manera que se ajusten al nivel de desarrollo de los estudiantes y mejorar la comprensión geométrica. Prat (2015) expresa que “en los niveles de Van Hiele hay unas principales características que permiten reconocer cada uno de esos niveles de razonamiento matemático a partir de la actividad de los estudiantes.” (p. 19)

Empleando las palabras de Vargas & Gamboa (2013b) este modelo de Van Hiele, tiene una gran importancia en el desarrollo del lenguaje tanto algebraico como su representación visual, donde se tiene la oportunidad de comunicar las ideas de volumen en objetos geométricos, comprendiendo la integración que se da en cada nivel de acuerdo a las cinco fases, en la que, se analizan y se corrigen los errores y se llega a un buen tratamiento del significado de los objetos matemáticos estudiados.

El docente al brindar oportunidades para que los estudiantes desarrollen sus pensamientos matemáticos, está creando un espacio donde se puede afrontar y corregir con mayor precisión y claridad el uso del lenguaje matemático, fortaleciendo la comprensión conceptual y el dominio de las estructuras matemáticas según los aprendizajes esperados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). En el cual se busca ir progresando en los niveles de comprensión del modelo de Van Hiele.

Como afirma Popayán (2016) el aprendizaje es un proceso muy complejo, sin embargo, la capacidad del ser humano de razonar sus sentidos y darle un lenguaje no solo



matemático sino también geométrico, permite que se pueda expresar su relación con el mundo real que le acompaña; por esto, el docente desde su quehacer debe propiciar que el aula más que un espacio de enseñanza, sea visto como un ambiente donde se pueden cometer errores y que a partir de estos se construya un concepto matemático deseado, y donde el docente sea el mediador para ello.

El aprendizaje no es el único puente para adquirir conocimiento, pues también se debe tener en cuenta la forma como el docente imparte la enseñanza y la forma como hace uso de las diversas estrategias didácticas, pedagógicas y socioemocionales, con el fin de estimular un grado por parte del estudiante hacia el área. Baggini (2008) expresa que “los motivos para aprender residen en la curiosidad, la competencia” (p. 10), es por esto que el docente debe actuar para crear su metodología de enseñanza, aprovechando al máximo las inteligencias y capacidades de sus estudiantes.

En conclusión, en el aprendizaje de los estudiantes hay muchos factores relevantes los cuales deben ser tenidos en cuenta al momento de enseñar matemáticas, para evitar rechazos en el área y atrasar los procesos educativos, se deben generar espacios donde sean tenidos en cuenta, cuáles son las capacidades, los intereses, las emociones, y los niveles educativos acordes a su edad y grado pues como lo manifiesta Sadovsky (2005) “es urgente que las escuelas piensen en los fundamentos del trabajo de enseñar matemáticas hoy, de que encuentran un sentido más propio y una convicción profunda que valga la pena defender.” (p. 11)

### ***2.3.2 Representaciones visuales en el aprendizaje del pensamiento métrico espacial:***

El uso de representaciones visuales en los procesos de enseñanza y aprendizaje geométrico son significativos para mejorar en los estudiantes la comprensión del uso del espacio, al manipular material en concreto el estudiante esta relacionando el contexto que le rodea con todo lo que se le está orientando. Etayo (2009) define las representaciones visuales como una simplificación de la realidad tridimensional percibida visualmente, traducida en un formato que permite la interpretación y análisis. En el aprendizaje del pensamiento métrico espacial, es importante que el estudiante esté en manipulación constante de figuras geométricas e incluir elementos tridimensionales, proporcionando en ellos una experiencia táctil que lo lleva más allá de algo visual.

Hitt (1998b) afirma que, “se le ha dado una importancia mayor a la generación de imágenes mentales adecuadas para el aprendizaje de la matemática” (p. 25), pero lo que el estudiante se imagina no está acorde a la realidad, generando que el estudiante no sea capaz de abstraer información, identificar patrones y/o relacionar conceptos geométricos representados solamente algebraicamente; desde esta perspectiva, se consideran las representaciones visuales como un paso crucial en la forma que se presenta y recibe el conocimiento, podría entonces adoptarse la idea de “espiral curricular” propuesta por Bruner (1960), donde se presentan los conceptos matemáticos geométricos de manera didáctica, tangible y progresiva, y a medida que los mismos estudiantes avancen en el aprendizaje, lo que es más complejo, no lo perciban de esta manera.

La enseñanza durante la infancia se fundamenta en los sentidos, y ningún contenido se considera difícil para un niño Carrillo (2017b); esto nos indica que, los estudiantes

estando en su infancia, tengan un transito desde la exploración de todo lo que sienten y de todo lo que ven, comunicando de manera rápida y eficaz, pero surge el cuestionamiento del ¿por qué cuando un estudiante crece y se enfrenta al lenguaje algebraico relacionado con la geometría, no se le enseña desde los sentidos? Es esto un factor determinante que se puede llegar a convertir en un error didáctico por parte de los docentes, pues muchas veces pretenden que el estudiante comprenda todas las temáticas desde un simple lenguaje natural; pues como lo consideran Moriena & Scaglia (2003b) “La geometría que enseñamos consiste en objetos teóricos, pero pone en juego también representaciones gráficas. Se establece entonces una distinción entre figura (referente teórico, objeto de una teoría) y dibujo (representación gráfica de una figura)”. (p. 6)

Es así como distinción entre figura y dibujo se convierte en una herramienta crucial para la comprensión de dicha integración matemática (Hitt 1998); el pensamiento geométrico espacial se basa en conceptos abstractos y la relación entre entidades geométricas. Sin embargo, la comprensión de figuras tridimensionales va más allá de manipular símbolos y ecuaciones, pues como lo expresa Carrillo (2017) “los maestros deberían variar sus actividades docentes de acuerdo con el estadio de desarrollo de los estudiantes” (p. 49) todo esto, basándose en las palabras de Bruner (1965) quien insiste en que la educación es un espacio para desarrollar el pensamiento cognoscitivo, implicando una aplicación práctica de los conceptos aprendidos.

En el aprendizaje geométrico espacial, las representaciones visuales activan al estudiante permitiendo procesar información de manera más intuitiva y efectiva, complementándose con la explicación verbal algebraica; tal como lo manifiestan Flores et al. (2015)

Dado que las personas recibimos la información a través de los sentidos, especialmente el auditivo y el visual, los medios utilizados con mayor frecuencia para elaborar, transmitir y recibir conocimiento matemático son los enunciados verbales y las representaciones gráficas o simbólicas de conceptos y de propiedades. Aunque las formas y figuras se puedan transmitir por enunciados verbales, su captación es principalmente por la vista, e igualmente por el tacto. (p. 127 – 128)

Por lo expuesto anteriormente es que la capacidad de visualizar y manipular mentalmente figuras tridimensionales no es el camino más completo para un buen aprendizaje del área. Así que la enseñanza de la geometría debe ir integrada con el desarrollo de habilidades visuales, resolución de problemas y aplicación práctica de las propiedades geométricas llevadas al contexto.

Es importante abordar la diversidad en la que los estudiantes reciben la información, pues el uso de estímulos visuales, táctiles y algebraicos pueden ayudar al incremento en la comprensión de los temas orientados, lo cual es sustentado por Hitt (1998b) quien recomienda que los estudiantes deben aprender a partir de ejemplos aterrizados a su realidad y por medio de la integración de los conceptos previamente articulados entre la transformación esperada del sistema educativo.

En síntesis, la importancia de adaptarse a la edad de enseñanza desde un enfoque visual, reconociendo la diversidad de aprendizaje de los estudiantes, permite observar la necesidad de que la enseñanza sea accesible y estimulante para los estudiantes, puesto que el aprendizaje de la geometría destaca la necesidad de integrar la teoría con las representaciones, equilibrando la competencia matemática y la visualización inherente de la

geometría, en donde se proporcionan herramientas cognitivas para abordar las situaciones problemas aplicadas a los diversos contextos de los estudiantes.

### ***2.3.3 Lenguaje algebraico en la comprensión del volumen en prismas y pirámides:***

El lenguaje algebraico es necesario para comprender la naturaleza de las matemáticas, ya que desempeñan un papel fundamental en la representación y solución de problemas matemáticos; como lo expresa Butto & Rojano (2004) debe haber “una secuencia de enseñanza que vincule aspectos numéricos, geométricos y algebraicos” (p. 123). Desde la perspectiva del pensamiento métrico espacial, posibilita una descripción precisa el uso del espacio, facilitando la comprensión del volumen en figuras tridimensionales como prismas y pirámides; en la opinión de Guillén & Figueras (2005) “estas ideas tenían un gran peso en el estudio de la misma dirigido a la aromatización... así como las cosas manuales, en particular al dibujo” (p. 231) esto precisa un enfoque en la enseñanza tradicional donde el estudiante solo se puede imaginar cómo funciona el volumen en dichos cuerpos tridimensionales y el enredarse al tratar de dibujar un cuerpo geométrico en 3D.

El volumen de un prisma o pirámide se conoce con el espacio tridimensional de estas representaciones; en términos algebraicos, el volumen se haya por medio de una formula específica que incorpora las dimensiones de la figura, y es aquí donde el estudiante encuentra mayor dificultad al momento de procesar la información. De acuerdo con Hernández (2016a) los estudiantes manifiestan un desinterés en el área de la geometría ya que se les dificulta la conversión de lo bidimensional a lo tridimensional, haciéndose

necesaria la transformación de la enseñanza docente y la implementación de la didáctica tangible para mejorar la comprensión y aprendizaje de los estudiantes.

El lenguaje algébrico para hallar el volumen de prismas y pirámides es fundamental en este contexto; ya que, para un prisma, el volumen se calcula multiplicando el área de la base por la altura; y para una pirámide, el volumen se halla multiplicando el área de la base por la altura y dividiendo este resultado en tres. Para Serres (2011) el uso del lenguaje algebraico tiene como propósito la precisión, permitiendo resolver problemas y crear conceptos matemáticos en situaciones de la vida real.

En conclusión, el lenguaje algebraico se debe tener en cuenta como herramienta fundamental para describir y resolver problemas en el espacio tridimensional, facilitando la comprensión de conceptos geométricos complejos. Sin embargo, también hay que reconocer las dificultades que presentan los estudiantes al procesar la información algebraica, destacando la necesidad de implementar elementos didácticos para mejorar el aprendizaje y la motivación.

### 3. Diseño metodológico

#### 3.1 Enfoque de investigación:

La presente investigación tiene un enfoque cualitativo de tipo descriptivo, la cual busca desarrollar a partir del diseño de actividades no estructuradas, un estudio que permita identificar elementos puntuales desde la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales hacia la comprensión del contexto, la experiencia y los aprendizajes adquiridos por los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Aranzazu.

Durante el estudio se busca que el aprendizaje del pensamiento métrico espacial se relacione con el lenguaje algebraico y las representaciones visuales en la comprensión del volumen de prismas y pirámides. Hernández-Sampieri & Mendoza (2018) proponen entender el contexto a través de la interacción y formulación de una hipótesis por medio de la observación, centrándose en los aprendizajes subjetivos de los estudiantes y analizando el contexto para hallar soluciones.

De este modo, el enfoque cualitativo interpreta los elementos comprendidos de la geometría tridimensional por los estudiantes, a través de las actividades relacionadas con el contexto, vivencias y emociones, dando paso para que los educandos expresen desde un lenguaje natural, el pensamiento y aprendizaje obtenidos a partir de las estrategias pedagógicas y didácticas diseñadas para mejorar la integración y comprensión de lo algebraico con lo visual enfocado a lo geométrico.

Cueto (2020) Expresa, que este tipo de investigación se caracteriza por comprender la profundidad y complejidad de los hechos sociales, culturales y demás de cada participante a través de exploración e interpretación detallada de los datos cualitativos.

### **3.2 Población y muestra**

Esta propuesta se desarrolló con estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Sagrado Corazón, donde se cuenta con educación desde el grado jardín, preescolar, básica primaria, básica media, bachillerato, formación complementaria y educación de adultos; los estudiantes del grado octavo se encuentran entre un rango de edad de 13 a 15 años, quienes representan la población en la que se llevó a cabo las implementaciones de la investigación, la muestra es el grupo 8 – 1 el cual cuenta con un total de 15 estudiantes.

La muestra de esta investigación cuenta con la participación de todos los estudiantes de dicho curso de manera activa en el proyecto de intervención propuesto durante la práctica pedagógica a través de los diversos instrumentos diseñados por la autora de esta propuesta.

### **3.3 Validación de instrumentos**

La validación de instrumentos, se hace a través de la validación de jueces donde se les presenta cinco fichas de trabajo y un formato compuesto por cuatro criterios de evaluación definidos así: Suficiencia, claridad, coherencia e importancia. Se le solicita al evaluador dar una calificación en una escala de uno a cuatro, donde 1 es “No cumple” y 4 es “Nivel alto”, de manera que consideren las actividades de acuerdo a los criterios evaluativos, y expresen las fortalezas o aspectos por mejorar para la aplicabilidad del diagnóstico, las hojas de trabajo y la evaluación final.

Los pares evaluadores fueron la docente tutora de práctica Licenciada en Matemáticas, y una docente del área de matemáticas de grados inferiores, Magister de las TICS en la enseñanza, quienes aportaron significativamente en la aprobación de los



instrumentos teniendo en cuenta la coherencia y relación de los objetivos con las actividades propuestas.

En la tabla 1, se puede detallar el registro que llevaron a cabo los pares evaluadores quienes fueron los encargados de aprobar los instrumentos a aplicar.

### Validación de instrumentos por juicio de expertos

**Evaluador:** Me dirijo a usted con el fin de solicitarle su colaboración en la lectura, revisión y validación de la guía de trabajo que forma parte de la investigación denominada: *“La integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales para el aprendizaje del volumen en prismas y pirámides en estudiantes de grado octavo”*. Así mismo se propone su revisión utilizando 4 criterios básicos para evaluar cada uno de los interrogantes, como se describen a continuación.

Califique de 1 a 4 marcando con una X en la casilla respectiva según los siguientes criterios evaluativos: **4= Nivel alto, 3= Nivel moderado, 2= Nivel bajo, 1= No cumple**

**Tabla 1.**

*Validación de instrumentos*

CRITERIO DE EVALUACIÓN	VALORACIÓN				OBSERVACIONES (Fortalezas – Aspectos por mejorar)
	1	2	3	4	
<b>SUFICIENCIA</b> Las actividades ayudan a obtener la medición del aprendizaje de los estudiantes sobre lenguaje algebraico y representaciones visuales.					

### **CLARIDAD**

Las actividades se comprenden fácilmente, su sintaxis, praxis y semántica son adecuadas

### **COHERENCIA**

Las actividades tienen relación lógica con el aprendizaje del lenguaje algebraico y representaciones visuales y están relacionadas con los lineamientos curriculares.

### **IMPORTANCIA**

Las actividades son esenciales, y contribuyen a entender bien el concepto, análisis del lenguaje algebraico y las representaciones visuales.

---

## **INFORMACIÓN DEL EVALUADOR**

Nombre y Apellidos del Evaluador: \_\_\_\_\_

Formación Académica: \_\_\_\_\_

Áreas de Experiencia Profesional: \_\_\_\_\_

Función Actual: \_\_\_\_\_

Institución Educativa: \_\_\_\_\_

### **3.4 Componente ético**

Un pilar fundamental dentro de la propuesta es la ética universal que vela por los derechos, la dignidad, bienestar e integridad de los participantes involucrados y el principio de credibilidad de la investigación. De acuerdo a lo anterior, se obtiene el consentimiento

informado (Apéndice D) de cada participante y su acudiente, donde se les ha brindado una información amplia sobre los objetivos, procedimientos y beneficios que trae la participación del mismo, además de aclarar que se guarda la confidencialidad de la información recolectada, garantizando el anonimato de los estudiantes mediante la asignación de código identificadores.

### **3.5 Estructura metodológica:**

Durante la investigación se busca desarrollar a través de un engranaje las acciones que permitan cumplir con el objetivo general, con el fin de contribuir ampliamente en el diseño e implementación de actividades al aprendizaje de las matemáticas a partir de la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales en el aprendizaje del volumen en prismas y pirámides, dando un valor importante en el desarrollo del pensamiento métrico espacial en los estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Sagrado Corazón del municipio de Aranzazu.

Para el objetivo específico: *identificar el lenguaje algebraico y las representaciones visuales que tienen los estudiantes en elementos básicos y propiedades de la geometría plana*, se diseña una ficha de trabajo llamada Diagnostico la cual puede verse en el Apéndice A, donde se busca identificar cual es la relación desde el lenguaje algebraico y las representaciones visuales desde elementos básicos de la geometría como, línea, punto, ángulo, arista (conocida como lado en una figura plana), perímetro, área.

El análisis para este diagnóstico, se tendrá a partir de un análisis sociodemográfico donde se obtienen datos de género, edad, y estrato socioeconómico, con el fin de identificar la población en la que se trabaja y tener un perfil contextualizado de los participantes de la

investigación, para así comprender los procesos analizados durante las intervenciones pedagógicas.

**Tabla 2.**

*Análisis sociodemográfico*

<b>ESTUDIANTE</b>	<b>GÉNERO</b>	<b>EDAD</b>	<b>NIVEL SOCIOECONÓMICO</b>
1.			
2.			

En el análisis de la ficha de trabajo, se sintetizan los resultados de cada estudiante en la siguiente tabla, donde se interpretan los fortalezas y debilidades de los estudiantes con el fin de poder sintetizar la información y obtener un diagnóstico más cercano a la realidad del contexto y poder afrontar el objetivo deseado.

**Tabla 3.**

*Análisis diagnóstico*

<b>ESTUDIANTE</b>	<b>ACTIVIDAD # 1</b>	<b>ACTIVIDAD # 2</b>	<b>ACTIVIDAD # 3</b>
1.			
2.			
<b>SÍNTESIS</b>			

Para el segundo objetivo específico: *Implementar unas hojas de trabajo que facilite la comprensión del concepto de volumen de poliedros, integrando el lenguaje algebraico y las representaciones visuales aplicadas a contextos reales*, donde se busca que los estudiantes por medio de trabajo con representaciones visuales puedan comprender el concepto de volumen en prismas y pirámides y luego ser integrado al lenguaje algebraico,

dando paso a un aprendizaje significativo e introducir a los estudiantes a situaciones reales de su propio contexto.

Las hojas de trabajo fueron diseñadas, guardando entre ellas una relación específica con el objetivo (Apéndice B), de manera que los estudiantes puedan ir comprendiendo el volumen de prismas y pirámides, llevándolos desde la figura plana a la tridimensional, a que finalmente comprendan como hallar el volumen y que a través de la representación visual comprendan el comportamiento del volumen y el uso del espacio, contextualizándolos por medio de resolución de problemas.

La primera hoja de trabajo se evalúa desde los aprendizajes que tienen los estudiantes sobre la relación que hay entre la geometría bidimensional y la tridimensional, y el cómo pueden describir estas figuras algebraicamente, llevando al estudiante a comprender las diferencias y similitudes de estas. Esta hoja de trabajo se divide en 5 momentos, los cuales se desglosan a continuación:

**Momento 1:** Elaboración del cubo, donde se lleva al estudiante a comparar la relación que guarda el cuerpo geométrico plano con el tridimensional, actividad que es trabajada de manera individual.

**Momento 2:** Concéntrese, en parejas los estudiantes irán volteando de a dos fichas con el fin de encontrar la pareja conformada por la representación plana y la tridimensional.

**Momento 3:** Área y volumen, en las parejas que trabajaron el concéntrese, se les distribuirá una de las figuras de dicho juego, indicando unas medidas específicas a cada grupo de trabajo, con las cuales desde la representación plana deberán hallar el área y desde la tridimensional hallarán el volumen.

**Momento 4:** Relación con la realidad, donde se les presenta a los estudiantes objetos con formas de prismas y pirámides haciendo uso del medio audiovisual con el que cuenta el aula, partiendo de estas imágenes para que ellos mismos mencionen otros elementos con estas características.

**Momento 5:** Selección múltiple, actividad individual, donde los estudiantes deben observar una figura plana y luego seleccionar la forma que adaptaría tridimensionalmente.

La valoración de este diagnóstico se detalla en tres actividades: individual, grupal e interactiva, analizando todas las expresiones de los estudiantes durante cada momento, fortalezas, dificultades y demás aspectos relevantes.

**Tabla 4.**

*Análisis hoja de trabajo # 1*

---

<b>SÍNTESIS DE LAS ACTIVIDADES</b>
<b>MOMENTO 1</b> Conversión de lo plano a lo 3D
<b>MOMENTO 2</b> Identificar figuras semejantes en plano y 3D
<b>MOMENTO 3</b> Hallar área y volumen de figuras
<b>MOMENTO 4</b> Relación con situaciones reales de prismas y pirámides

## **MOMENTO 5**

### Comprensión de figura plana y 3D

---

La segunda hoja de trabajo se evalúa desde cada actividad desarrollada por los estudiantes, donde se buscaba mostrarles por medio de representaciones visuales y material tangible, que es el volumen, y cómo la forma en que se ve, influye mucho en la comprensión de este. Esta hoja se compone de cuatro actividades las cuales se describen a continuación:

**Actividad 1:** Volumen y espacio, en grupos debían observar unas imágenes donde se representaban el volumen, y los estudiantes deben responder por la capacidad de este.

**Actividad 2:** ¿Cuántos caben?, de acuerdo a la primera actividad, los estudiantes responderán preguntas, pero esta vez ellos trabajaran con material concreto, donde deberán acomodar objetos de manera que puedan ser acomodados dentro de una caja.

**Actividad 3:** Perspectiva, la docente armaba un prisma, luego los estudiantes iban a observarlo y debían analizar por cuantas fichas estaba armado, y dar el nombre del prisma.

**Actividad 4:** Arma prismas, la docente entregaba unas fichas de jenga, y le indicaba un prisma a armar, con medidas, el cual los estudiantes debían tratar de replicarlo teniendo en cuenta volumen del mismo.

#### **Tabla 5.**

*Análisis hoja de trabajo # 2*

---

## SÍNTESIS

---

### ACTIVIDAD

# 1

Volumen y  
espacio

### ACTIVIDAD

# 2

¿Cuántos  
cabem?

### ACTIVIDAD

# 3

Perspectiva

### ACTIVIDAD

# 4

Arma prismas

---

La tercera hoja de trabajo es analizada de manera general, teniendo por objetivo llevar a los estudiantes a que reconozcan prismas desde su contexto más cercano, y que, a través de estos, puedan hallar el volumen y comprender la diferencia entre capacidad y volumen, y finaliza con resolución de problemas respecto al volumen de prismas.

La cuarta hoja de trabajo, al igual que la tercera, se analiza de forma general, teniendo el mismo objetivo, pero esta vez se trabaja el volumen de pirámides, relación con el entorno y resolución de problemas.

Para el tercer objetivo específico: *analizar los resultados de la estrategia didáctica implementada con los estudiantes del grado octavo para fortalecer el concepto del volumen de poliedros*, se diseña un cuestionario por medio de Google Forms, el cual consta de ocho preguntas relacionadas con la integración del lenguaje algebraico y las



representaciones visuales del volumen en prismas y pirámides, con el fin de analizar el avance obtenido por los estudiantes respecto al trabajo realizado con las hojas de trabajo.

### **3.6 Fases de la investigación**

**Identificación del problema:** Esta etapa se lleva a cabo durante la realización de la práctica pedagógica donde se observa el grupo de intervención y se define y delimita el problema, el cual nos da pie para formular de manera clara y concisa la pregunta de la cual partimos.

**Etapa de diseño:** Se busca reconocer los conocimientos previos de los estudiantes en cuanto a figuras planas y todas sus propiedades; teniendo en cuenta el cómo relacionan el lenguaje algebraico y las representaciones visuales; para esta fase se aplica una prueba diagnóstica.

**Etapa de implementación:** Se crean unas hojas de trabajo como estrategia didáctica para fortalecer el aprendizaje del volumen en prismas y pirámides partiendo de la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales, relacionándolas al contexto.

**Análisis final de la propuesta:** Para finalizar la intervención se realiza a los estudiantes un cuestionario a través de Google forms donde los estudiantes responden unas preguntas sobre el cómo relacionan la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales en el volumen de prismas y pirámides.

#### **4. Análisis de resultados**

El análisis de datos permite extraer la información para proporcionar una comprensión más profunda del proceso obtenido por los estudiantes en cuanto a la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales. El análisis de los datos obtenidos están clasificados en tres fases: la recolección de datos, que pretende identificar los conocimientos base del estudiante en cuanto la geometría bidimensional, y un estudio sociodemográfico para comprender el contexto del estudiante; como segunda fase se implementan cuatro hojas de trabajo que lleva a los estudiantes a comprender la relación de la geometría plana con cuerpos tridimensionales para luego por medio de representaciones visuales pueda comprender como hallar el volumen de prismas y pirámides. En la fase final se realiza un cuestionario, donde se analiza el avance de los estudiantes y como influyen las representaciones visuales en el análisis del contexto que les rodea.

##### **4.1 Análisis de prueba diagnóstica**

En este primer momento se realiza un análisis sociodemográfico donde se busca caracterizar a los estudiantes por género, edad y estrato socioeconómico con el fin de tener una descripción más concreta de la muestra y la descripción de los datos obtenidos de la prueba diagnóstica.

En la tabla 6, se puede verificar los resultados del estudio sociodemográfico donde se evidencia que el estudio cuenta con la participación de quince estudiantes, nueve mujeres y seis hombres, quienes oscilan mayormente entre los 13 años, se consultó el nivel socioeconómico de cada uno según el Sisbén IV, donde la mayoría de los estudiantes están clasificados en un nivel A considerado pobreza extrema, cuatro en el grupo B pobreza

moderada, tres en el grupo C vulnerable, y dos en el grupo D considerados población no pobre, no vulnerable.

**Tabla 6.**

*Resultados estudio socioeconómico*

<b>ESTUDIANTE</b>	<b>GENERO</b>	<b>EDAD</b>	<b>NIVEL SOCIOECONÓMICO</b>
1. YVBM	Femenino	14	B1
2. SMCC	Femenino	13	A2
3. KCZ	Masculino	13	C6
4. ACL	Masculino	13	A2
5. MACM	Masculino	13	C3
6. LDGL	Femenino	15	A3
7. MHJ	Femenino	14	B2
8. MCJJ	Femenino	13	D21
9. SMC	Masculino	13	B5
10. VMA	Femenino	15	A3
11. LSOV	Femenino	14	A4
12. JDPA	Masculino	13	B1
13. JAPC	Masculino	13	C1
14. MASG	Femenino	14	D21
15. KDTO	Femenino	13	A2

Los resultados arrojados, dan claridad de que los estudiantes comprenden los conceptos básicos de la geometría plana, en la tabla 7, se puede observar que durante las tres actividades planteadas los estudiantes manejan un lenguaje algebraico adecuado, y son capaz de relacionar expresiones algebraicas y representaciones visuales con poca

información, también se evidencia en algunos estudiantes una confusión entre la representación del punto y el vértice, clasificación de triángulos y otros pequeños errores.

**Tabla 7.**

*Resultados diagnósticos*

ESTUDIANTE	ACTIVIDAD # 1	ACTIVIDAD # 2	ACTIVIDAD # 3
1. YVBM		El estudiante confunde el punto con el vértice	
2. SMCC	El estudiante confunde el área del cuadrado con el área del triángulo	No tiene claridad sobre la clasificación de triángulos de acuerdo a sus lados y ángulos	
3. KCZ			
4. ACL	Comprende el lenguaje algebraico al momento de relacionar las representaciones visuales de un objeto matemático	El estudiante confunde el punto con el vértice	Todos los estudiantes manejar el material en concreto de forma hábil y estratégica para lograr los objetivos propuestos, no teniendo errores y destacando su creatividad para reorganizar las fichas y que se obtenga el mismo objeto deseado.
5. MACM	No identifica el lenguaje algebraico establecido en las formulas		
6. LDGL		No tiene claridad sobre la clasificación de triángulos de acuerdo a sus lados y ángulos	
7. MHJ	Comprende el lenguaje algebraico al momento de relacionar las representaciones visuales de un objeto matemático	El estudiante confunde el punto con el vértice	
8. MCJJ		No tiene claridad sobre la clasificación de triángulos de acuerdo a sus lados y ángulos	
9. SMC	No tiene una noción clara sobre el ángulo total de una circunferencia ( $360^\circ$ ) y		

	lo confunde con la media vuelta que es igual a $180^\circ$	
10. VMA	Comprende el lenguaje algebraico al momento de relacionar las representaciones visuales de un objeto matemático	No tiene claridad sobre la clasificación de triángulos de acuerdo a sus lados y ángulos
11. LSOV		
12. JDPA		
13. JAPC	No tiene en cuenta que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a $180^\circ$	
14. MASG	Comprende el lenguaje algebraico al momento de relacionar las representaciones visuales de un objeto matemático	
15. KDTO		

**Síntesis actividad 1:** Al momento de aplicar las diferentes fórmulas para hallar el área de una figura plana, confunde la establecida para el triángulo con la que se establece para el cuadrado, esta situación es dada según D’Amore & Fandiño citado por Caviedes et al. (2020) “porque los estudiantes no comprenden el significado de las fórmulas, ni como estas se originan” (p. 1017), es decir, el estudiante todavía no comprende que el cuadrado se puede descomponer en dos triángulos rectángulos y por tal razón al realizar la fórmula para hallar el área establece una división en dos partes iguales.

**Síntesis actividad 2:** La enseñanza tradicional de la geometría a través de fórmulas como las presentadas en libros o trabajadas en el tablero dentro del aula de clases, trae consigo una serie de errores conceptuales que como lo manifiestan Jaime et al. (1992) “dan lugar a la formación de imágenes conceptuales incompletas” (p. 60) pues los estudiantes no

logran diferenciar las características propias de los triángulos de acuerdo a la clasificación establecida de sus lados y de sus ángulos.

Durante la enseñanza de las matemáticas se vienen presentando una serie de inconvenientes que hacen que los estudiantes se les dificulte identificar con claridad el concepto al cual hace referencia determinada representación visual que le presenta el docente; pues como lo afirman Godino & Ruiz (2002) “Un problema didáctico crucial es que con frecuencia usamos la misma palabra para referimos a los objetos perceptibles con determinada forma geométrica y al concepto geométrico correspondiente” (p. 456), razón por la cual algunos estudiantes no diferencian el concepto de punto como una representación visual en el plano y el concepto de vértice como el punto donde se encuentra los dos lados del ángulo.

**Síntesis actividad 3:** Durante el desarrollo de esta actividad se evidencia mayor claridad en el desarrollo de procesos matemáticos, pues el uso de material tangible les permitió comprender la finalidad de la actividad en donde ponían en práctica los conocimientos adquiridos, ya que como lo afirma Tomalá (2023b) “el uso de los materiales concretos es útil por su aporte didáctico-matemático y versatilidad, facilitando el aprendizaje mediante la observación, manipulación y construcción; además, ayudan a construir conceptos, fortalecer los procedimientos y a tener predisposición para el aprendizaje.” (p. 30)

#### **4.2 Análisis de las hojas de trabajo**

Durante este ejercicio la docente implementó cuatro hojas de trabajo, donde los estudiantes iban realizando trabajos prácticos con representación visual, integrando el lenguaje algebraico para que puedan lograr comprender el concepto de volumen, por esto,

se inicia desde lo encontrado en el diagnóstico, llevándolo desde lo plano a lo tridimensional, para luego mostrarles con material tangible cómo funciona el volumen, y finalmente se desarrollan unas actividades de resolución de problemas y de la comparación con objetos del contexto para que observaran su aplicabilidad.

#### **4.2.1 Análisis hoja de trabajo 1**

En el desarrollo de la hoja de trabajo #1 se puede evidenciar que a los estudiantes se les dificultaba usar correctamente la regla para elaborar figuras geométricas tabla 8, sin embargo, cuando lograban realizar los trazos adecuados, comprendían como un objeto plano se transformaba en un cuerpo geométrico tridimensional, a su vez se evidencia que los estudiantes son capaz de formar mentalmente un poliedro desde su molde plano, y empieza a elaborarse el concepto algebraico de como hallar el área y volumen de dichas representaciones.

#### **Tabla 8.**

*Resultados análisis hoja de trabajo # 1*

---

### **SÍNTESIS DE LAS ACTIVIDADES**

---

#### **MOMENTO 1** Conversión de lo plano a lo 3D

**Actividad individual:** En la primera actividad se planteó una actividad cuyo objetivo fue el observar y manipular la conversión de un cubo desde el cuerpo matemático plano hacia el tridimensional, evidenciando que a los estudiantes se les dificultaba la toma de medidas exactas, pues como lo manifestó Tuta et al. (2019) "el estudiante descuida la construcción de la magnitud objeto de la medición, impidiendo la comprensión del objeto resultante" (p. 92), situación que impedía que los bordes de la figura tridimensional coincidieran y los estudiantes observaran su respectiva transformación

Luego de determinar y recortar con exactitud las medidas del cubo, los estudiantes lograron armarlo, observando el proceso de transformación desde la figura plana hasta la tridimensional, llegando

---

a desarrollarse los procesos que describe The National Council of Teacher of Mathematics (2000) al considerar que "los estudiantes mejoran su capacidad para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio con el material en concreto" Gonzato et al., (2011, p. 6)

**MOMENTO 2**  
Identificar figuras  
semejantes en  
plano y 3D

**Actividad grupal:** En la segunda actividad se reunieron a los estudiantes por parejas en donde por medio de un concéntrese, debían encontrar la pareja de la figura plana con su respectivo solido geométrico, evidenciando la comprensión durante el ejercicio anterior, pues como lo considera González (2021) "la competencia de resolución de problemas que implica la construcción de figuras planas y cuerpos solidos se fortalece estableciendo relaciones entre ellas por medio de la Ludificación Matemática como estrategia pedagógica"(p.15) todos estos aspectos de ludificación llevan al estudiante a adquirir un aprendizaje más significativo visto desde las diferentes representaciones y sus respectivas trasformaciones dentro del espacio, logrando comprender el porqué de las fórmulas que se establecen para hallar los volúmenes de dichos sólidos.

**MOMENTO 3**  
Hallar área y  
volumen de figuras

**Actividad grupal:** En la tercera actividad, a cada pareja de trabajo se les designo una de las figuras geométricas, y se les indicó unas medidas para que los estudiantes hallaran el área y volumen de dichos cuerpos, situación que permitió hallar de manera rápida el área, pues tenían claras las medidas en la figura plana, pero al intentar hallar el volumen con las mismas dimensiones, la dificultad fue mayor, ya que como lo manifiesta Bishop (1989) al ser citado por Fernández et al. (2012) las imágenes visuales o mentales, que un estudiante manipula en la actividad de visualización, le permite realizar un proceso de transformación de imágenes visuales ya formadas en otras permitiendo hallar el área y proceso visual no ostensivo, en donde la información es abstracta o no figurativa impidiendo recordar la tridimensionalidad del solido geométrico asignado.

**MOMENTO 4**  
Relación con  
situaciones reales  
de prismas y  
pirámides

**Actividad interactiva:** En la cuarta actividad se llevó a los estudiantes a relacionar las representaciones visuales con objetos reales que se podían encontrar en un contexto cotidiano, con el fin de que el estudiante pase de una herramienta simbólica en un lenguaje natural a una herramienta material en lenguaje materno, pues como lo manifiestan Lupiáñez & Moreno (2001) "sólo un largo proceso de descontextualización instrumental podrá, hacer factible el traslado de ese fragmento de conocimiento a otros contextos" (p. 291) pues después de que los estudiantes lograron evidenciar la transformación de la figura plana a la tridimensional, lo relacionaron con los objetos



del entorno próximo, como fueron la caja de leche en el supermercado, los cubos de Rubik y las pirámides en porcelanas en la juguetería, o los mismos diamantes que venden en las joyerías para lucirlos como dijes en las cadenas.

**MOMENTO 5**  
Comprensión de  
figura plana y 3D

**Actividad individual:** Como cierre de la hoja de trabajo, y evaluación de la misma, los estudiantes desarrollaron de manera correcta una hoja de selección múltiple, donde se les presentaba un cuerpo geométrico plano, y opciones de cómo podría quedar en su representación tridimensional, además del nombre que recibe.

---

#### ***4.2.2 Análisis hoja de trabajo 2***

La segunda hoja de trabajo consistió, en brindar herramientas para que el estudiante observará las diferentes medidas que puede llegar a tener una figura con respecto a su volumen, de acuerdo al punto de vista que se tuviera (vista superior, vista frontal, vista lateral) por esto se diseñan 4 actividades y se analizan en la tabla 9

**Tabla 9.**

*Resultados hoja de trabajo # 2*

---

<b>SÍNTESIS</b>	
<b>ACTIVIDAD # 1</b> Volumen y espacio	<p>En la primera actividad se les presentaba unas imágenes con diferentes elementos donde se encontraban organizadas un grupo de cajas, de manera completa e incompleta y se solicitaba hallar el volumen que cada estiba contenía; razón por la cual se observó que a los estudiantes tenían mayor destreza para hallar el volumen de estibas incompletas o que tenía el mismo orden, ya que solo debían tener en cuenta el alto, ancho y profundo.</p> <p>Así lo sostiene Lozano (2015) "el estudiante genera sus propios conocimientos a partir de su observación" (p.11), situación que se vio evidenciada al momento en que el estudiante debía hallar el volumen de una estiba que tenía diferente organización en cada tendido, pues ellos desarrollaron el ejercicio solo con la vista superior y no las vistas laterales ni frontales.</p>
<b>ACTIVIDAD # 2</b> ¿Cuántos caben?	<p>En la segunda actividad se les hizo entrega de material concreto como cajas, botellas y vasos, con el fin de que los ubicaran de tal manera que ocuparan el menor espacio posible, evidenciando que el volumen de una figura puede variar de acuerdo a la forma que se organice, pues como lo describe Moreno et al. (1998) "en el proceso de adquisición del concepto de medición del volumen es indispensable que el alumno comprenda que todo cuerpo ocupa un lugar en el espacio y que ese espacio puede ser llenado con determinadas unidades cúbicas" (p. 257), pues al tener la misma cantidad de cajas y apilarlas de diferentes maneras, lograron observar que el volumen varía según la forma que se posicionan.</p>
<b>ACTIVIDAD # 3</b> Perspectiva	<p>Este aprendizaje se evidencia con el desarrollo de la tercera actividad donde se les presentó a los estudiantes diferentes torres de jenga que les faltaban fichas en su estructura vertical, y en donde ellos debían hallar el volumen solo observando la vista superior, luego hallarlo con la vista frontal y por último con la vista lateral; situación que les permitió llegar a su propia construcción del concepto, en donde para hallar el volumen se deben tener en cuenta las diferentes medidas que tiene la figura, pues como lo sostienen Guerrero &amp; Flores (2015) "el proceso de relacionar volúmenes por comparación directa no es sencillo, salvo en casos en que se aprecie el proceso de descomposición y recomposición". (p.28), que fue la actividad que debieron desarrollar en la actividad número 4 y que les permitió comparar y hallar con mayor exactitud el volumen de las torres de jenga.</p>
<b>ACTIVIDAD # 4</b> Arma prismas	

---

### 4.2.3 *Análisis hoja de trabajo 3*

En la tercer hoja de trabajo se diseñaron actividades que permitieran al estudiante observar la diferencia entre capacidad y volumen de líquidos en prismas, razón por la cual se les presentó una serie de productos del supermercado que estaban presentados con medidas de peso, capacidad y volumen, con el fin de que hicieran uso de sus conocimientos previos; trabajo desarrollado de manera grupal para llegar a describir la relación existente entre capacidad y volumen de líquidos; pues como lo consideran Blanco-Álvarez et al. (2017) "se habla de volumen y de capacidad indistintamente, para referirse a la extensión tridimensional de un objeto o recipiente, sin reflexionar acerca del significado científico de estas dos palabras" (p. 2072) es por ello, que los estudiantes consideraron que la representación visual del recipiente estaba directamente relacionada con el volumen y la capacidad del mismo, pero al verificar la capacidad de dichos recipientes, pudieron comprobar que esta relación no estaba correcta, pues algunos recipientes contenían sustancias sólidas y otros sustancias líquidas, por lo que la capacidad y el peso variaba, siendo el mismo volumen del recipiente.

Esta observación es sustentada por Pizarro & Zamorano-Vargas (2019) quienes consideran que "el concepto de volumen y el de capacidad son tratados como sinónimos, lo que genera obstáculos en la resolución de problemas" (p. 610), razón por la cual se procedió a aclarar las definiciones con ejemplos y luego el desarrollo de situaciones problemas que llevaran al estudiante a aplicar las nuevas concepciones en su mismo entorno con elementos conocidos por él.

En esta última actividad se evidenció como los estudiantes comprendieron mejor la definición de volumen como representación de una imagen que parece real pues como lo expresa Zúñiga (2022) "los estudiantes establecen relaciones entre objetos geométricos mediante la relación espacial, mientras que con visualización espacial desarrollan la capacidad de manipular mentalmente objetos tridimensionales mediante la proyección de objetos bidimensionales" (p. 56)

#### **4.2.4 Análisis hoja de trabajo 4**

En la hoja de trabajo número cuatro, se les presento a los estudiantes una serie de productos, cuyos representaciones tenían forma de pirámide, con el fin de adentrarlos a la resolución de problemas matemáticos sobre el volumen de las pirámides; por tal razón se les hicieron preguntas si habían observado algún producto líquido que tuviera envase en forma de pirámide, a lo que la respuesta fue negativa; seguidamente se les cuestionó por las medidas en que se presentaban dichos productos y todos coincidieron en que se presentaban en gramos, libras y/o kilos

Esta inducción fue dada para entrelazar los aprendizajes trabajados en la hoja de trabajo tres , ya que como lo manifiesta Bruno (1958) se hace necesario que el estudiante comprenda no solo que el volumen de la pirámide es una tercera parte de su área, sino que, además lo compruebe y esto lo logra gracias a la descomposición de un prisma triangular, para que el estudiante concluya lo afirmado por Estrada (2002) al decir que "un prisma triangular se descompone en tres pirámides triangulares del mismo volumen... utilizando este resultado para mostrar al estudiante que el volumen de una pirámide cualquiera es la tercera parte del producto de su base por la altura" (p.175).

Esta situación permitió a los estudiantes el desarrollo de los problemas matemáticos presentados, pues como lo manifiestan Díaz & Mayorga (2014) "los estudiantes deben trabajar con problemas de diferentes contextos, para tener más y mejores herramientas para solucionar otros problemas" (p. 30), pues como se ha evidenciado a través del desarrollo de las diferentes hojas de trabajo el aprendizaje de los estudiantes ha sido más significativo cuando se relaciona el aprendizaje que se está impartiendo con elementos reales de su entorno y el manejo en concreto de los elementos que componen cada una de las figuras trabajadas.

### 4.3 Cuestionario final

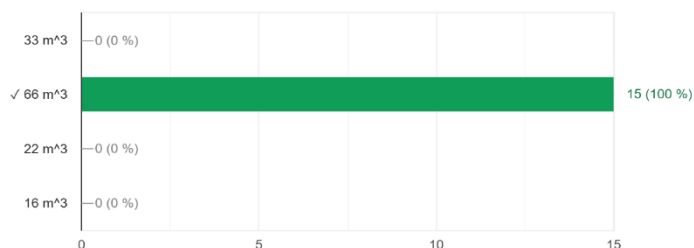
La aplicación del cuestionario final se realizó por medio de Google forms, donde se les envió el link a los estudiantes con el fin de responder y relacionar la representación gráfica con el lenguaje algebraico en el desarrollo de ejercicios y de situaciones problema al momento de hallar volúmenes en prismas y pirámides. Este cuestionario constó de ocho preguntas de selección múltiple con única respuesta, las cuales se describen una a una, indicando los resultados obtenidos de acuerdo con sus respectivas gráficas.

#### Figura 1.

##### Resultados pregunta # 1

Marco tiene un estanque para criar truchas que mide 11 metros de largo, 2 metros de ancho y 3 metros de profundidad. ¿Cuál es el volumen del estanque?

15 de 15 respuestas correctas



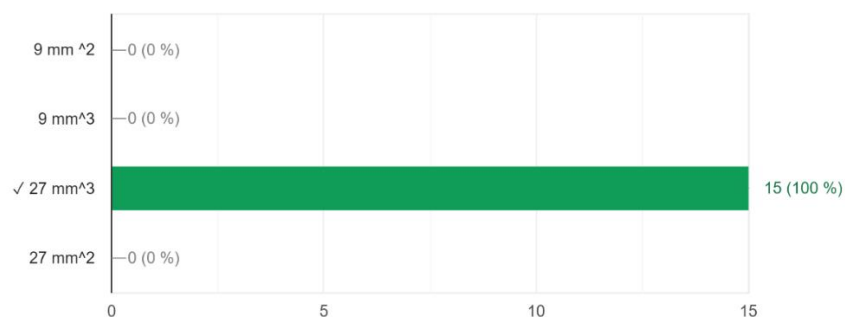
La pregunta número uno se orientó a que los estudiantes hallaran el volumen de un prisma rectangular, en donde las opciones de respuestas dejaban ver si el estudiante confundía el volumen con el área de una figura, ya que como lo manifiestan Caro (2020) “el estudiante debe ser capaz de usar, describir y justificar la relación entre los conceptos matemáticos de área y volumen, y sus respectivas representaciones a nivel geométrico y algebraico”(p.6); es por ello que se evidencia que el 100% de los estudiantes que contestaron la pregunta, acertó y se puede afirmar que estos estudiantes manejan el aprendizaje con respecto a hallar el volumen de un prisma rectangular.

## Figura 2.

### Resultados pregunta # 2

Roberto es un artesano, y María quiere que le diseñe unos aretes en forma de cubo, con medidas de 3 mm por lado ¿Qué cantidad de material usara Roberto?

15 de 15 respuestas correctas

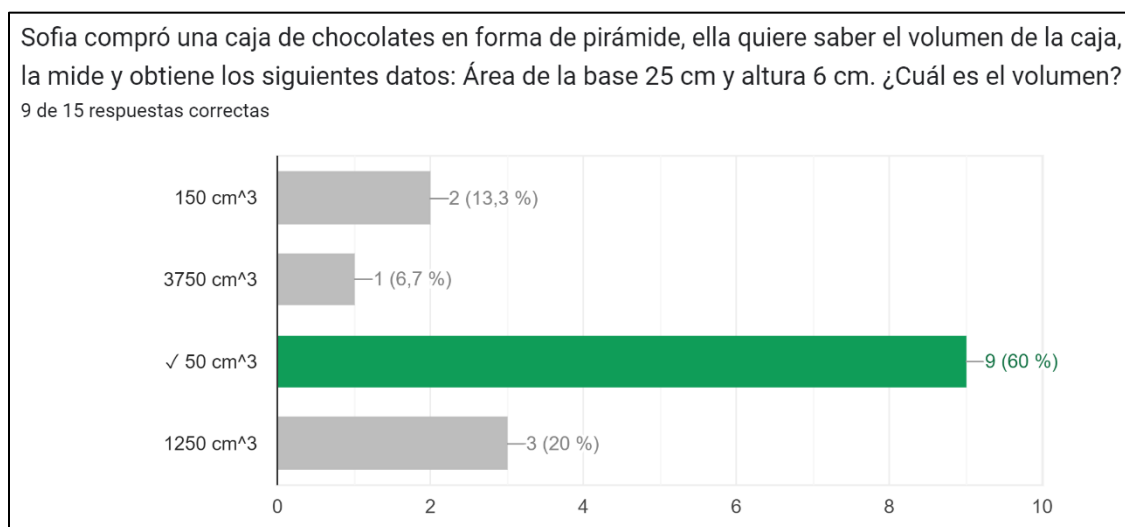


En la segunda pregunta se les solicitaba a los estudiantes que desarrollaran el ejercicio para hallar el volumen de un cubo, además de identificar si diferencian las medidas de superficie con las medidas de volumen, evidenciando que el 100% acertaron a la pregunta y corroborando lo manifestado por Sanmiguel & Salinas (2011) quienes escriben que “las estrategias de tipo perimétrico: componen aditivamente las dimensiones lineales, razonando sobre las aristas del cuerpo... que se dan en los niveles más bajos y

desaparecen en los más elevados” (p.546), pues ya que los estudiantes no confunden en su respuesta las medidas cuadradas con las medidas cúbicas.

### Figura 3.

#### Resultados pregunta # 3



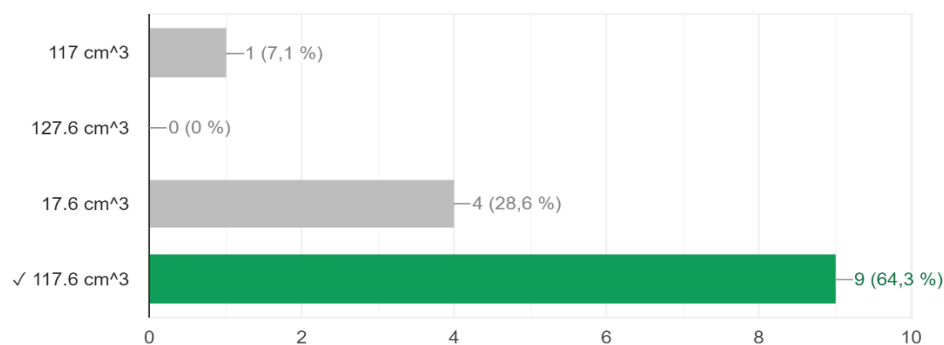
En la tercera pregunta se le presentó al estudiante una situación problema en donde debía hallar el volumen de una caja en forma de pirámide, en donde las opciones de respuesta permitieron comprobar que el 60%, correspondiente a 9 estudiantes, acertaron y aplicaron de manera adecuada la fórmula para hallar el volumen de una pirámide, pero que el 20% no leyeron de manera comprensiva el problema, ya que no tuvieron en cuenta que se les estaba presentando el área de la figura y por tanto multiplicaron la base como si fuera la medida de una de sus aristas, dejando de lado lo descrito por Sosa & Condori (2019) quienes manifiestan que “para que un sujeto pueda resolver un problema debe de haber desarrollado un conocimiento declarativo y el respectivo conocimiento procedimental que les permitan poder comprender información, establecer relaciones y utilizar procedimientos con la finalidad de llegar a resolver el problema que se le ha planteado” (p. 1040)

## Figura 4.

### Resultados pregunta # 4

Calcula el volumen de la siguiente pirámide

9 de 14 respuestas correctas

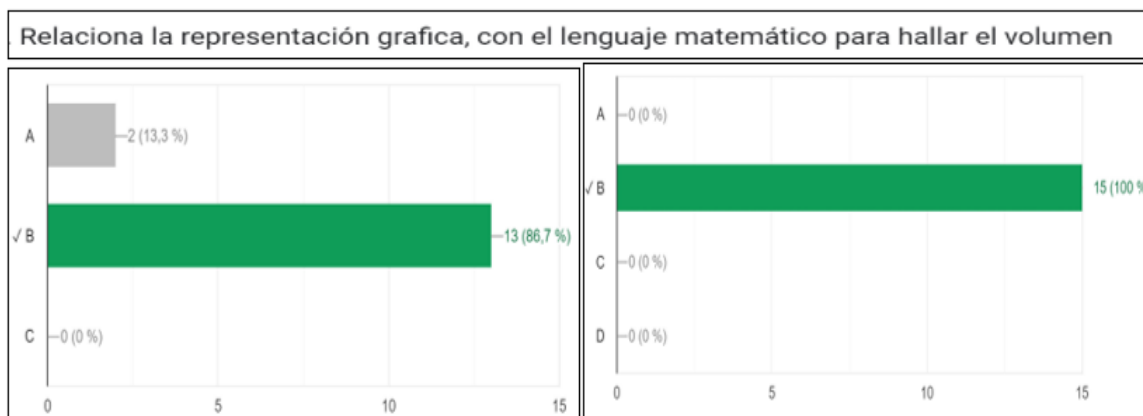


La cuarta pregunta fue presentada de manera directa por medio de un ejercicio en donde el estudiante debía aplicar la fórmula respectiva para hallar el volumen de una pirámide heptagonal, con el fin de aplicar el conocimiento adquirido durante el desarrollo de la secuencia didáctica, pues como lo describe Crespo (2005) “lo que para el matemático es natural y fácil, para los estudiantes es algo difícil, ya que muchas veces no manifiestan la necesidad de la demostración para aceptar una propiedad; lo que evidencia concepciones distintas en la matemática.” (p. 23 – 24), por tal razón se procede a verificar que solo 64,3% de los estudiantes lograron desarrollar de manera acertada la pregunta, pero contrario a esto, se evidencia que el 28,6 % deja de lado la parte de revisión de su resultado, olvidando la verificación de los números que se dan en las opciones de respuesta, aunque el desarrollo general este adecuado.



**Figura 5.**

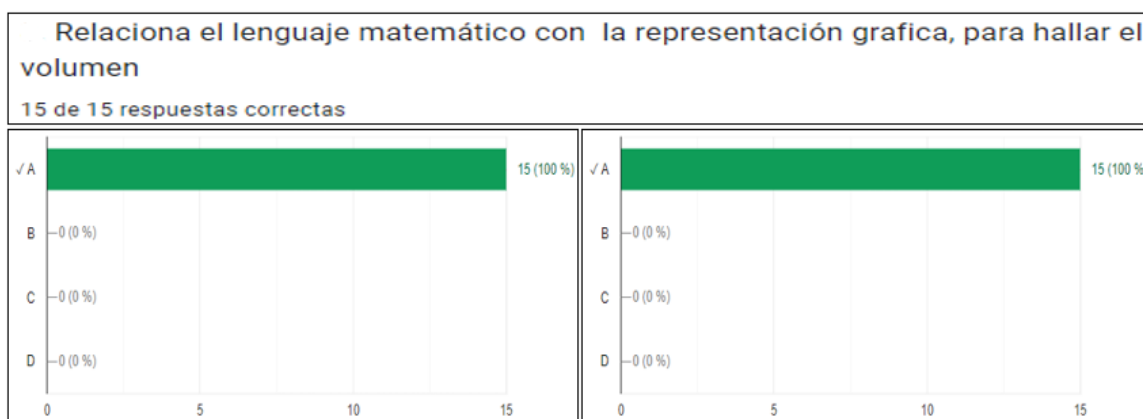
*Resultados preguntas # 5 y # 6*



Las preguntas cinco y seis se orientaron a que los estudiantes relacionaran la representación gráfica de un prisma con el lenguaje matemático, al momento de hallar el volumen de este, pues ya lo menciona de la Fuente & Deulofeu (2022) al considerar que “cuando los profesores implementan actividades de resolución de problemas en clase, realizan conexiones entre diferentes representaciones de una información dada, ayudando, así, a los alumnos a construir el lenguaje algebraico” (p. 396) y es preciso este manejo de las diferentes representaciones semióticas las que se querían inculcar en los estudiantes.

**Figura 6.**

*Resultados preguntas # 7 y # 8*



En la preguntas siete y ocho se les solicitó a los estudiantes que identificaran el lenguaje algebraico con el fin de determinar la representación gráfica que era equivalente al volumen de la pirámide, evidenciando que la totalidad de la muestra objeto de estudio empleó representaciones visuales en la resolución de problemas como una estrategia comúnmente utilizada por los estudiantes, pues como lo manifiestan Gatica & Ares (2012) al citar a Duval “para favorecer el aprendizaje, los profesores deben proponer actividades de conversiones entre diferentes registros de representación semióticas” (p. 91), ya que estas proporcionan una manera tangencial de abordar el contenido matemático, destacando la importancia de estas representaciones, incluso cuando son simples esquemas, en el entendimiento y la solución de problemas matemáticos.

Ya para finalizar y a modo de conclusión, con el análisis del cuestionario final, se puede concluir que la mayoría de los estudiantes que obtuvieron respuestas correctas sin recurrir a métodos algebraicos utilizaron representaciones visuales, en las cuales introducían variables para denotar cantidades desconocidas. Esta actividad, aunque visual en su naturaleza, sugiere una comprensión subyacente del problema desde una perspectiva algebraica, pues los hallazgos encontrados indican la presencia de un pensamiento algebraico en la resolución de problemas, lo que subraya la relevancia de fomentar el uso de representaciones visuales en la enseñanza de las matemáticas.

#### 4.4 Triangulación entre la teoría y lo que se evidenció con los estudiantes

La triangulación como estrategia para garantizar la validez de los hallazgos, y con el fin de profundizar la comprensión obtenida por los estudiantes del grado octavo respecto a la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales, combinando los niveles y fases estipulados en el modelo Van Hiele, y la opinión de otros autores que corroboran los avances obtenidos por los estudiantes

**Tabla 10.**

*Triangulación*

<b>MODELO VAN HIELE</b>	<b>NIVEL 1 DISTINCIÓN</b>	<b>NIVEL 2 VISUALIZACIÓN</b>	<b>NIVEL 3 ANÁLISIS</b>
<b>FASE 1 INDAGACIÓN</b>	Los estudiantes reconocen elementos básicos de la geometría plana, sin embargo, confunden algunos elementos. Como expresa Hitt (1998a) “aspecto importante por resaltar es la distinción entre percibir y visualizar” (p. 29)	Los estudiantes interpretan la información presentada y la clasifican según sus conocimientos. Marmolejo & Vega (2012) expresan que “la visualización tiene matices y características diferentes según el tipo de representación” (p. 8)	De acuerdo con Planas (2013) “Para comprender el sentido de este lenguaje se requiere interiorizar la doble relación entre objetos matemáticos y expresiones algebraicas asociadas” (p. 39) donde los estudiantes se relacionan con conceptos nuevos.
<b>FASE 2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA</b>	Durante la construcción de figuras tridimensionales, comprenden la importancia de tomar medidas exactas, según D’Amore & Fandiño (2007)	Los estudiantes comprenden conceptos nuevos por medio de representaciones visuales. Shulman (2005) “la enseñanza supone la adecuación de las representaciones” (p. 23)	La docente adapta los temas exigidos en el currículo y los transforma en conocimiento didáctico, D’Amore (2006) “se ocupa de temas curriculares, centrados en el

### FASE 3 EXPLICITACIÓN

“Casi nunca se hacen transformaciones sobre las figuras de forma que se conserven o se modifiquen” (p. 61) ocasionando estas dificultades en ellos.

contenido matemático” (p. 18)

Sáiz (2003) “la construcción del conocimiento matemático referente al concepto volumen, así como el estado actual de este conocimiento” (p. 453) aquí los estudiantes diferencian los conceptos nuevos y los aplica de forma adecuada.

Los estudiantes demuestran interés y avanzan significativamente por medio de representaciones visuales, como expresan Flores et al. (2015) “construir conocimiento geométrico, para estudiar las figuras y las formas, la geometría requiere imágenes y representaciones gráficas.” (p. 128)

D’Amore (2006) “el análisis de los registros de presentaciones” (p. 18) los estudiantes analizan la información recibida visualmente y la comprenden realizando los procedimientos adecuados algebraicamente.

### FASE 4 ORIENTACIÓN LIBRE

Barrera (2015) “La visualización es una de las formas más importantes de obtener conocimiento” (p. 5) por medio de actividades con materiales tangibles y representaciones visuales los estudiantes aplican los conocimientos adquiridos.

Bautista (2014) “realizan conversiones de la representación de un registro a otro, sin perder el significado de la representación inicial” (p. 23) los estudiantes pueden hallar el área y volumen de una figura correctamente.

Hernández (2016b) “hacer significativo los aprendizajes de los conceptos de área y de volumen en los estudiantes, permitiendo que ellos los puedan observar y clasificar en su contexto.” (p. 5) resuelve situaciones problemas aplicadas al contexto.

## FASE 5 INTEGRACIÓN

Las representaciones visuales y el lenguaje algebraico son necesarios, así como lo expresa Libâneo (2012) “para lograr una integración entre el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico” (p. 22)

El docente debe propiciar los mejores canales de aprendizaje, para poder integrarlo pues como lo expresa Giarrizzo (2021) “El desafío para los docentes es proponer actividades a sus estudiantes que se resuelvan por medio de representaciones en diferentes marcos con recursos didácticos” (p. 48)

Los estudiantes comprenden el concepto de volumen por medio de presentaciones visuales, pues como afirma Blanco (2009) “el análisis de las representaciones visuales que realizan estudiantes de los cuerpos poliédricos” (p. 3) es fundamental para el aprendizaje.

---

## 5. Conclusiones

### 5.1 Respuesta a la pregunta central

Las representaciones visuales juegan un papel fundamental en el desarrollo de las clases matemáticas, ya que, si se toman como estrategia pedagógica y se relaciona con el entorno, el interés del estudiante será mayor. Esto implica que no solo se muestre una imagen por mostrarla, sino que también se debe relacionarla con el tema requerido en el currículo y el entorno, para evitar que el estudiante tenga actitudes negativas dentro del aula. De esta forma, el conocimiento matemático se vuelve posible desde la perspectiva de utilidad, la que el alumno normalmente no ve.

Otra reflexión importante del proyecto es la importancia de que el docente permita evolucionar su método de enseñanza, ya que están acostumbrados a hacerlo de la misma manera en que les fue enseñado, pero aquí se evidenció que es posible que el estudiante sea el protagonista de su propio conocimiento y que a través de la observación le nazca saber conceptos matemáticos y transportar la enseñanza desde el tablero hacia la construcción colectiva; esto genera un gran cambio ya que no se verá al docente como el único proveedor del conocimiento, sino que se convierte en guía encargado de estimular la curiosidad y facilitar el descubrimiento de los conceptos nuevos.

Esta implementación promueve el desarrollo de habilidades cognitivas causando a su vez la capacidad de dar solución a problemas del contexto próximo de los estudiantes, dando respuesta a la pregunta central del proyecto *¿Cómo la integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales facilita la comprensión de volumen en prismas y pirámides en estudiantes de grado octavo?* Ayudando a estructurar prismas y pirámides comprendiendo la relación de las dimensiones con el volumen por medio de

representaciones visuales apoyando el lenguaje algebraico para expresar las fórmulas y que combinadas refuercen el aprendizaje de conceptos abstractos matemáticos aumentando la motivación dentro del aula de clase

En resumen, es importante que, dentro del aula, se le permita al estudiante componer y descomponer cuerpos geométricos, para que por medio de la manipulación pueda comprender los diferentes conceptos y hacer del aprendizaje algo mas significativo, y que pueda luego darle aplicabilidad adecuada, sin necesidad de estar realizando operaciones matemáticas sin sentido.

## **6. Recomendaciones**

El docente del área de matemáticas, juega un papel fundamental dentro del aula de clases, ya que debe propiciar espacios que lleven al estudiante a interesarse por los contenidos curriculares, de manera que, no los rechace porque los consideran complejos o aburridos, sino, que el docente por medio de su transposición didáctica pueda llevar a los estudiantes a comprender como el uso del material en concreto puede ser de gran importancia para la resolución de problemas cotidianos.

Es por esto, que se hace necesario, que el docente cambie la metodología de enseñanza tradicional, por una donde el estudiante sea el centro de todo, es decir, la base del conocimiento a construir y que se le permita por medio de diversas estrategias, la integración del lenguaje algebraico con el uso de representaciones visuales, aprender conceptos como el volumen de poliedros. De esta manera, se podrá evidenciar cambios significativos en los estudiantes e incluso en las pruebas estandarizadas como Evaluar para Avanzar, rompiendo así, patrones de desempeños bajos que hacen que la calidad educativa sea calificada de forma negativa.

## 7. Referencias

- Baggini, E. (2008). Aportes a la teoría del aprendizaje. Formulación de una situación auténtica concreta. *Grupo Interamericano de Reflexión Científica.*, 1(14), 3–16.
- Barrera, S. (2015). Visualización en tres dimensiones en ambiente de geometría dinámica. *Mathematics, Education and Internet Journal*, 3(1), 1–6.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.18845/rdmei.v3i1.2279>
- Bautista, J. (2014). *Los poliedros polinómicos y el desarrollo de capacidades del área de matemática en estudiantes de secundaria de los planteles de aplicación Guamán Poma de Ayala* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga].
- Blanco, H. (2009). *Representaciones gráficas de cuerpos geométricos. Un análisis de los cuerpos a través de sus representaciones* [Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional].
- Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A., & Oliveras, M.-. (2017). Medidas de capacidad volumétrica no convencionales: aportes a la educación primaria. *X Congreso Internacional Sobre Investigación En Didáctica de Las Ciencias*, 2071–2077. <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/336784/427567>
- Bruno, G. (1958). *Geometría curso superior* (Bedout, Ed.).
- Butto, C., & Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 16(1), 113–148.  
<https://www.redalyc.org/pdf/405/40516105.pdf>



- Caro, A. (2020). *Conocimiento de futuros profesores de primaria sobre el uso de la lengua para la enseñanza de matemáticas: estudio con la relación área-volumen* [Tesis de especialización, Universidad Autónoma de Barcelona].  
[https://ddd.uab.cat/pub/trerecpro/2020/234594/CaroVillarAbigail\\_TFM2020.pdf](https://ddd.uab.cat/pub/trerecpro/2020/234594/CaroVillarAbigail_TFM2020.pdf)
- Carrillo, J. (2017). *Descubriendo matemáticas con fractales en secundaria. Un estudio aplicando el modelo de Van Hiele y el curriculum en espiral de Bruner con tecnología* [Tesis de especialización, Instituto Politécnico Nacional].
- Caviedes, S., Gamboa, G., & Badillo, E. (2020). Procedimientos utilizados por estudiantes de 13-14 años en la resolución de tareas que involucran el área de figuras planas. In *Bolema: Boletim de Educação Matemática* (Vol. 34, Issue 68).  
<https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a09>
- Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa*, 24, 23–29. <http://funes.uniandes.edu.co/23130/1/Crespo2005La.pdf>
- Cueto, E. (2020). Investigación cualitativa. *Applied Sciences in Dentistry*, 1(3), 1–2.
- D'Amore, B. (2006). Didáctica de la matemática. In *Didáctica de la matemática*.
- D'Amore, B., & Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa.*, 10(1), 39–68. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500103>
- de la Fuente, A., & Deulofeu, J. (2022). Uso de las conexiones entre representaciones por parte del profesor en la construcción del lenguaje algebraico. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 36(72), 389–410. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17>

- Díaz, D., & Mayorga, A. (2014). La resolución de problemas como herramienta para la integración de contenidos matemáticos. *Revista de Investigaciones En Educación*, XIV(1), 25–42. <https://revistas.ufro.cl/ojs/index.php/educacion/article/view/1250>
- Estrada, W. (2002). De la generación espontánea de las fórmulas de volumen a su construcción. In C. Luque (Ed.), *Memorias XIII encuentro de geometría y I de aritmética* (pp. 167–181).  
<http://funes.uniandes.edu.co/6108/1/EstradaDelageneraci%C3%B3nGeometr%C3%A9trica2002.pdf>
- Etayo, F. (2009). La Geometría de la representación visual. *R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. (Esp)*, 103(2), 297–303.
- Fernández, T., Godino, J., & Cajaraville, J. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(42A), 39–63. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000100004>
- Flores, P., Ramírez, R., & del Río, A. (2015). Sentido espacial. In P. Flores & L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 127–146). Pirámide.  
[http://funes.uniandes.edu.co/23176/1/2015\\_Sentido\\_espacial\\_preprint.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/23176/1/2015_Sentido_espacial_preprint.pdf)
- Gatica, S., & Ares, O. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Revista de Educación Mediática y TIC*, 1(2), 89–107.  
<https://journals.uco.es/edmetic/article/view/2853/2741>

- Giarrizzo, A. (2021). La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria: Materiales didácticos para favorecer el estudio de figuras o cuerpos geométricos. *Revista de Educación Matemática*, 36(2), 47–66.  
<https://doi.org/https://doi.org/10.33044/revem.34268>
- Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017a). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 31(57), 90–113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017b). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 31(57), 90–113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Godino, J., & Ruiz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. In *Proyecto Edumat-Maestros* (Godino, J., pp. 445–605).
- González, A. (2021). *Fortalecimiento de la competencia de resolución de problemas que implica la construcción de figuras planas y cuerpos estableciendo relaciones entre ellas por medio de la ludificación matemática* [Tesis de Maestría, Universidad de Cartagena].  
[https://repositorio.unicartagena.edu.co/bitstream/handle/11227/12463/TGF\\_Andre%cc%81s%20Gonza%cc%81lez%20Galeano.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.unicartagena.edu.co/bitstream/handle/11227/12463/TGF_Andre%cc%81s%20Gonza%cc%81lez%20Galeano.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Gonzato, M., Godino, J., & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23(3), 5–37. <https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v23n3/v23n3a2.pdf>

- Guerrero, S., & Flores, P. (2015). Obtención del volumen del tetraedro por alumnos con talento matemático, sin emplear formulas. *Revista de Educación Matemática*, 2(90), 21–30.  
[https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/209265/Obtenci%  
b3n.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/209265/Obtenci%c3%b3n.pdf?sequence=1&isAllowed=y)
- Guillén, G., & Figueras, O. (2005). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria: curso-taller como técnica para la obtención de datos. *Noveno Simposio de La Sociedad Española de Educación Matemática, SEIEM*, 227–234.
- Hernández, E. (2016a). *Estrategia para la enseñanza de los conceptos de área y de volumen, utilizando como mediadores de aprendizaje el origami y las tecnologías digitales*. Tesis de Maestría, Universidad de Medellín.
- Hernández, E. (2016b). *Estrategia para la enseñanza de los conceptos de área y de volumen, utilizando como mediadores de aprendizaje el origami y las tecnologías digitales*. [Tesis de maestría, Universidad de Medellín].  
<http://hdl.handle.net/11407/3502>
- Hernández-Sampieri, R., & Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación; las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. (M.-H. INTERAMERICANA, Ed.).
- Hitt, F. (1998a). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*, 10(2), 23–45. <https://doi.org/10.24844/em1002.02>
- Hitt, F. (1998b). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*, 10(2), 23–45. <https://doi.org/10.24844/em1002.02>

Institución Educativa Escuela Normal Superior Sagrado Corazón. (2022). *Institución Educativa Escuela Normal Superior Sagrado Corazón Proyecto Educativo Institucional “formación de ciudadanos y maestros como eje de transformación social.”*

Jaime, A., Chapa, F., & Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de textos de E.G.B. *Revista Epsilon*, 23, 49–61.

Libâneo, J. (2012). La integración entre conocimiento disciplinario y conocimiento pedagógico: una perspectiva para el trabajo de los profesores. *Revista Pedagogía Crítica*, 12(11), 21–38.

Lozano, A. (2015). *Prácticas con laboratorio remoto para la enseñanza de logística usando la metodología aprendizaje basado en problemas* [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Occidente].  
<https://red.uao.edu.co/server/api/core/bitstreams/7b73c9a9-988e-4646-a7df-99b41eae9f4c/content>

Lupiáñez, J., & Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. In Universidad de Granada (Ed.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática* (pp. 292–300).  
<http://funes.uniandes.edu.co/586/1/LupianezJ01-2603.PDF>

Maier, L., & Ferreyra, N. (2014). Introducción al lenguaje algebraico con uso de hipertextos. In P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27* (27th ed., pp. 1611–1619). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.  
<http://funes.uniandes.edu.co/5146/1/RubioLaimportanciaALME2007.pdf>

- Mancera, M. (2022). *Una estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento espacial en los estudiantes del grado octavo de la Escuela Sol Naciente* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia].  
<https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/82673/3070368.2022.pdf?sequence=2&isAllowed=y>
- Marmolejo, G., & Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 24(3), 7–32.  
<https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v24n3/v24n3a2.pdf>
- Mondragón, L., Ferrari, M., & Locia, E. (2022). Identidades algebraicas y factorización desde una perspectiva geométrica [conferencia]. In M. Ferrari (Ed.), *3er Coloquio: Reflexiones sobre innovación de la práctica docente de matemáticas*. (pp. 61–80).  
<http://www.mipdm.uagro.mx/wp-content/uploads/2022/12/2022-3er-MEMORIA.pdf#page=77>
- Montoya, L. (2021). *A propósito de las representaciones algebraicas: una relación entre situaciones cotidianas y el lenguaje algebraico formal mediante un análisis histórico epistemológico*. [Tesis de pregrado, Universidad de Antioquia].  
<http://bibliotecadigital.udea.edu.co>
- Moreno, A., Bulla, B., Giraldo, N., Mantilla, A., & Mantilla, M. (1998). Introducción a la medida del volumen. *Revista EMA*, 3(3), 254–262.  
[http://funes.uniandes.edu.co/1082/1/44\\_Moreno1998Introducci%C3%B3n\\_RevEMA.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1082/1/44_Moreno1998Introducci%C3%B3n_RevEMA.pdf)

- Moriena, S., & Scaglia, S. (2003a). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15(1), 5–19.  
<https://doi.org/10.24844/em1501.1>
- Moriena, S., & Scaglia, S. (2003b). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15(1), 5–19.  
<https://doi.org/10.24844/em1501.1>
- Parra, D. (2020). *Método gráfico para la enseñanza de las fracciones mediado con GeoGebra y la teoría de los registros de representación* [Tesis de maestría, Universidad de Caldas]. <https://repositorio.ucaldas.edu.co/handle/ucaldas/16704>
- Pizarro, N., & Zamorano-Vargas, A. (2019). Factores que inciden en la enseñanza del volumen: un estudio de la práctica docente. In *El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional* (Vol. 32, pp. 610–618).  
<http://funes.uniandes.edu.co/14011/1/Pizarro2019Factores.pdf>
- Planas, N. (2013). Iniciación al lenguaje algebraico en aulas multilingües: Contribuciones de un proyecto en desarrollo. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 3, 25–44. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i3.59>
- Popayán, Y. (2016). *Situaciones didácticas en el aprendizaje de las expresiones algebraicas para la conversión del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico*. Tesis de maestría, Universidad ICESI.
- Prat, M. (2015). Extensión del modelo de Van Hiele al concepto de área. *Extensión Del Modelo de Van Hiele al Concepto de Área*, 1–267.  
<https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/63246/-PRAT%20->

%20Extensi%C3%B3n%20del%20modelo%20de%20Van%20Hiele%20al%20concep  
to%20de%20%20C3%A1rea.pdf?sequence=1

Quispe, C. (2020). *Uso de GeoGebra en el aprendizaje de cuerpos geométricos en estudiantes del tercer grado de educación secundaria*. [Tesis de especialización, Universidad Nacional de Huancavelica].

<http://repositorio.unh.edu.pe/handle/UNH/3489>

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy: miradas, sentidos y desafíos* (1st ed.).

Libros del zorzal.

Sáiz, M. (2003). Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 8(18), 447–478.

<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14001807>

Sanmiguel, M., & Salinas, M. (2011). Dificultades en el razonamiento del alumnado de 2º de eso relacionadas con el concepto de volumen y su medida. *Investigación En Educación Matemática XV*, 543–554.

<https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/44445/01520113000510.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Serna, T., Cardona, E., & Carmona, J. (2021). Propuesta para la enseñanza de las expresiones algebraicas en educación secundaria mediante la asociación del lenguaje cotidiano y el lenguaje algebraico. In E. Serna (Ed.), *Revolución en la formación y la capacitación para el Siglo XXI. Volumen I.: Vol. I* (4th ed., Issue November 2021, pp. 452–470). <https://drive.google.com/file/d/1bbWqgj2K4rsL0-s8RdX61HTraESAKpMm/view>



- Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación.*, 12(1), 122–142.
- Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado: Revista de Curriculum y Formación Del Profesorado*, 9(2), 1–30.
- Sosa, Fredy., & Condori, W. (2019). La comprensión de lectura y su relación con la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Investigaciones de La Escuela de Posgrado*, 8(2), 1037–1047. <https://doi.org/10.26788/riepg.2019.2.124>
- Tomalá, G. (2023a). Material didáctico concreto en el aprendizaje significativo de geometría en estudiantes de tercer grado. *Revista Ciencias Pedagógicas e Innovación*, 10(2), 23–31. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.26423/rcpi.v10i1.610>
- Tomalá, G. (2023b). Material didáctico concreto en el aprendizaje significativo de geometría en estudiantes de tercer grado. *Revista Ciencias Pedagógicas e Innovación*, 10(2), 23–31. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.26423/rcpi.v10i1.610>
- Tuta, A., Chaparro, A., & Leguizamón, J. (2019). Diagnóstico del pensamiento métrico con estudiantes del grado séptimo. *Cultura Científica*, 17, 91–112. <https://doi.org/10.38017/1657463X.596>
- Vargas, G., & Gamboa, R. (2013a). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74–94.
- Vargas, G., & Gamboa, R. (2013b). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74–94. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475947762005%0ACómo>

Vasco, E. (2023). *El álgebra geométrica como herramienta didáctica para la enseñanza de la factorización de trinomios*. [Tesis de pregrado, Universidad Católica de Manizales].

[https://repositorio.ucm.edu.co/bitstream/10839/4258/1/EstebanVascoBermudez\\_2023\\_LMYF.pdf](https://repositorio.ucm.edu.co/bitstream/10839/4258/1/EstebanVascoBermudez_2023_LMYF.pdf)

Zúñiga, F. (2022). Comprensión de la noción de volumen. Utilizando miniconstrucciones en un entorno 3D. *Uno: Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, 55–65.

<https://hdl.handle.net/11162/240427>

## Apéndices

### Apéndice A. Prueba diagnóstica

**Fecha de implementación:** 14 noviembre 2023

**Estudiantes:** Grupo 8 – 1

**Docente:** Tatiana Jaramillo Carvajal – Docente en práctica Universidad Católica de Manizales.

El presente instrumento investigativo, está dirigido a los estudiantes del grado 8 – 1 de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Aranzazu Caldas, población en la que se busca integrar el lenguaje algebraico y las representaciones visuales para el aprendizaje de volumen prismas y pirámides.

**Objetivo:** Identificar el lenguaje algebraico y las representaciones visuales que tienen los estudiantes en elementos básicos y propiedades de la geometría plana.

**Estándar Básico de Competencia:** Identifico las relaciones que hay entre las ecuaciones algebraicas y su representación gráfica.


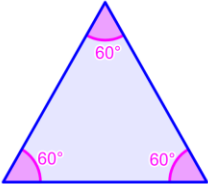
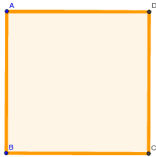
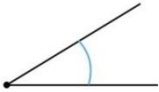
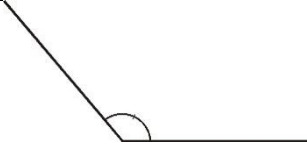
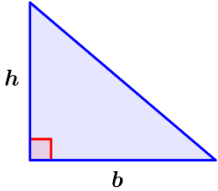
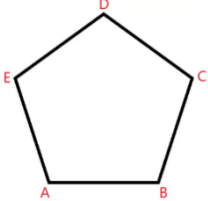
Uso argumentos geométricos en la solución de problemas matemáticos y de otras ciencias.

**DBA:** Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

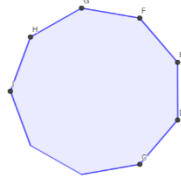
### ACTIVIDADES


Se dividirá el grupo en subgrupos de 4 estudiantes, los cuales deberán realizar una serie de actividades con el fin de acumular puntos y así poder observar los conocimientos de los estudiantes.

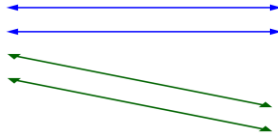
**ACTIVIDAD 1 – Emparejamiento:** Relacionar el objeto matemático con el respectivo lenguaje algebraico. A cada grupo se le entregara unas fichas que contiene una representación visual y el lenguaje algebraico, deberán unir las parejas correctas.


REPRESENTACIÓN VISUAL DEL OBJETO MATEMÁTICO		LENGUAJE ALGEBRAICO
		$a = \frac{b * h}{2}$
		$45^\circ$
		$a = \frac{p * a}{2}$
		$a = \pi * r^2$
		$a = l * l$
		$180 = \text{Suma de los ángulos}$
		$120^\circ$

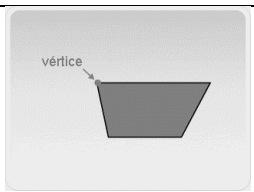
**ACTIVIDAD 2 – Dominó:** Completa el dominó de acuerdo a la información que traen las fichas ya sea con el lenguaje algebraico o su representación visual.

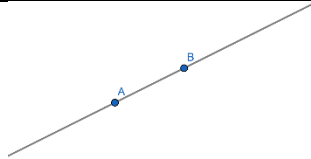
Radio	
-------	---


Eneágono	
----------	---

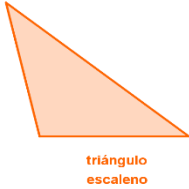
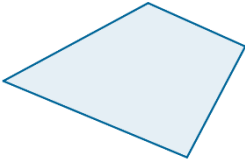
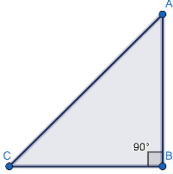
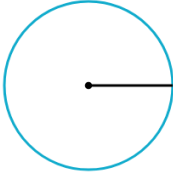
El punto es un elemento geométrico adimensional, no tiene ni volumen, ni área ni longitud ni otro análogo dimensional	
---	--

Líneas que nunca se cruzan y forman el mismo ángulo cuando cruzan otra línea.	
---	---

Aquel que mide $90^\circ$	
---------------------------	--

Punto donde se encuentran los dos lados del ángulo.	
---	--

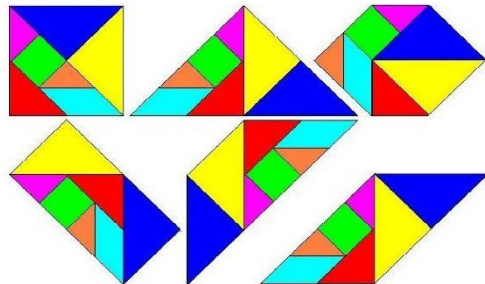
Fragmento de la recta que está comprendido entre dos puntos	 <p style="text-align: center;"><b>Ángulo llano</b></p>
---	---

Aquel que mide $180^\circ$	
Todos sus lados diferentes	
Cuadrilátero	
Triangulo rectángulo	

**ACTIVIDAD 3 – Tangram:** Se le entregará los grupos de trabajo, un tangram, y de una hoja modelo deberán realizar figuras geométricas.

Luego se les preguntara

- Calcula el área de las figuras
- ¿Todas las áreas son iguales usando las mismas figuras?
- ¿Qué tiene mayor área y qué tiene menor área?
- ¿Se pueden hacer las figuras con menos fichas?



## Apéndice B. Hojas de trabajo

### Hoja de trabajo #1

**Fecha de implementación:** 15 noviembre 2023

**Estudiantes:** Grupo 8 – 1

**Docente:** Tatiana Jaramillo Carvajal – Docente en práctica Universidad Católica de Manizales.

El presente instrumento investigativo, está dirigido a los estudiantes del grado 8 – 1 de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Aranzazu Caldas, población en la que se busca integrar el lenguaje algebraico y las representaciones visuales para el aprendizaje de volumen en prismas y pirámides.

**Objetivo:** Implementar unas hojas de trabajo que facilite la comprensión del concepto de volumen de poliedros, integrando el lenguaje algebraico y las representaciones visuales aplicadas a contextos reales.

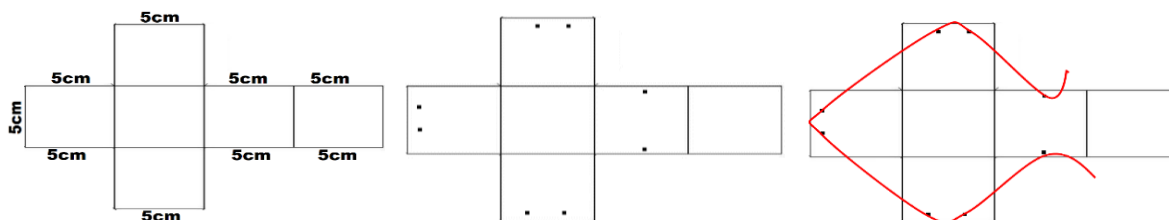
**Estándar Básico de Competencia:** Identifico las relaciones que hay entre las ecuaciones algebraicas y su representación gráfica.

Uso argumentos geométricos en la solución de problemas matemáticos y de otras ciencias.

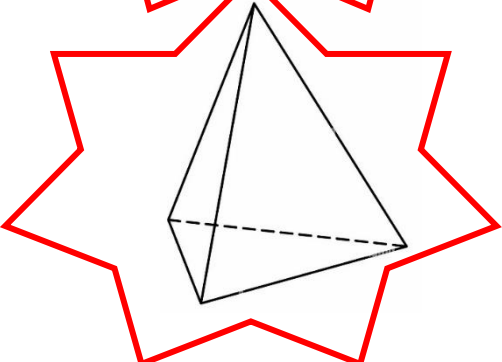
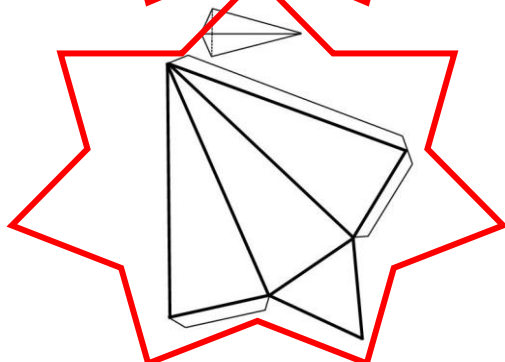
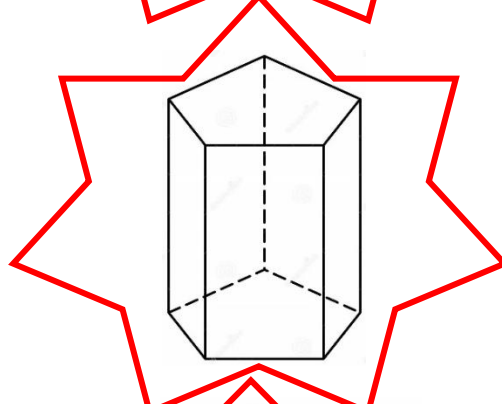
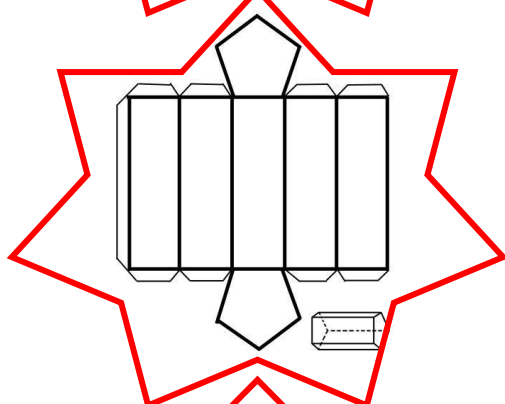
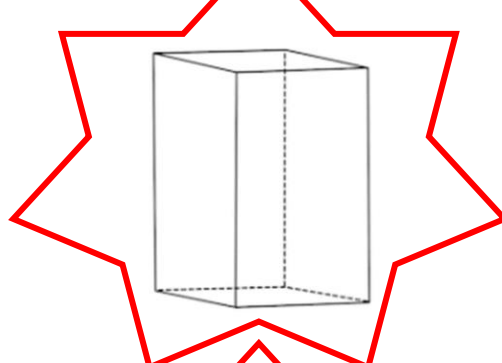
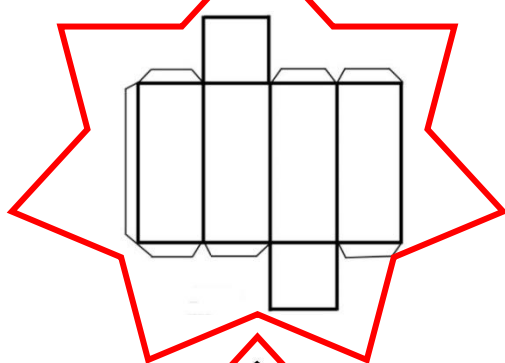
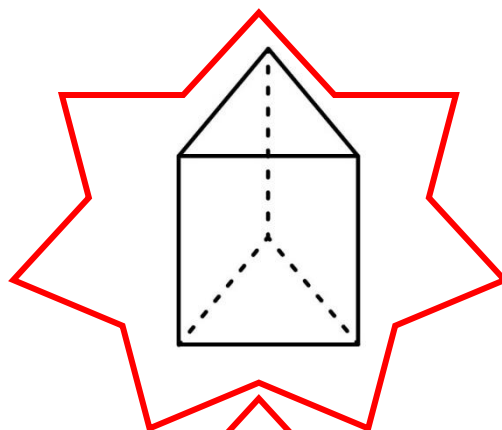
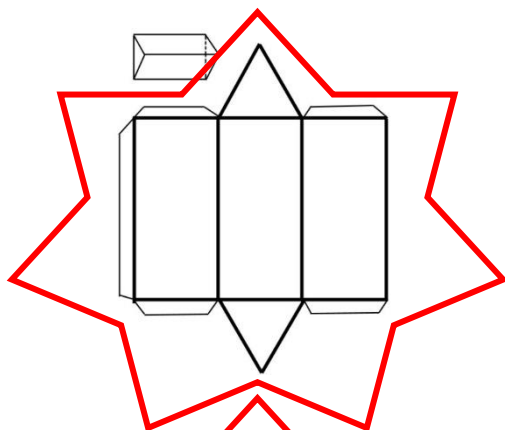
**DBA:** Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

### ACTIVIDADES

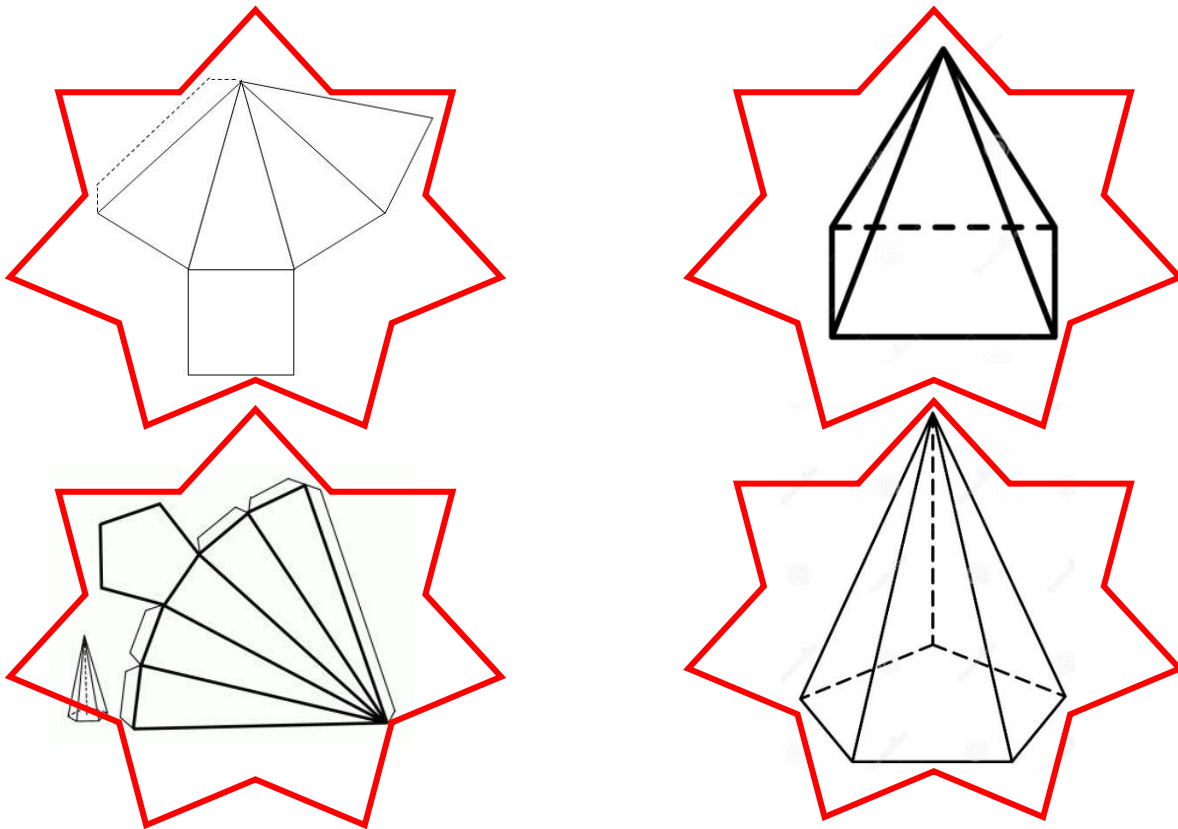
**ACTIVIDAD 1 – Construcción del cubo:** Cada estudiante creará un cubo, donde podrá comparar el cuerpo matemático plano con el tridimensional. se indicará el paso a paso, donde primero dibujarán las caras del cubo, luego deberán hacer los huecos para el nailon y finalmente halar el nailon para observar el cubo armado.



**ACTIVIDAD 2 – Concéntrese:** En parejas se entregará a los estudiantes unas fichas las cuales tienen el molde de la representación plana de un prisma y/o pirámide y su forma tridimensional, deberán buscar la pareja adecuada volteando solo dos fichas por turno.







**ACTIVIDAD 3 – Hallar área y volumen:** La docente dará a cada pareja una figura plana de las anteriores, con una medida, a partir de esa medida deben hallar el área de la figura plana y el volumen de la figura tridimensional.

**ACTIVIDAD 4 – Relación con la realidad:** Se les irá ilustrando a los estudiantes diferentes objetos, lugares, o construcciones donde se evidencian los prismas y pirámides, para llevarlos a la representación real de estos poliedros.



**ACTIVIDAD 5 – Selecciona la opción correcta:** Relaciona la figura plana, con el poliedro y su nombre.

	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

• Uní con flechas cada desarrollo plano con su cuerpo geométrico y con su nombre.

		pirámide pentagonal
		cono
		prisma hexagonal
		cilindro
		prisma cuadrangular

## Hoja de trabajo #2

**Fecha de implementación:** 20 noviembre 2023

**Estudiantes:** Grupo 8 – 1

**Docente:** Tatiana Jaramillo Carvajal – Docente en práctica Universidad Católica de Manizales.

El presente instrumento investigativo, está dirigido a los estudiantes del grado 8 – 1 de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Aranzazu Caldas, población en la que se busca integrar el lenguaje algebraico y las representaciones visuales para el aprendizaje de volumen en prismas y pirámides.

**Objetivo:** Implementar unas hojas de trabajo que facilite la comprensión del concepto de volumen de poliedros, integrando el lenguaje algebraico y las representaciones visuales aplicadas a contextos reales.

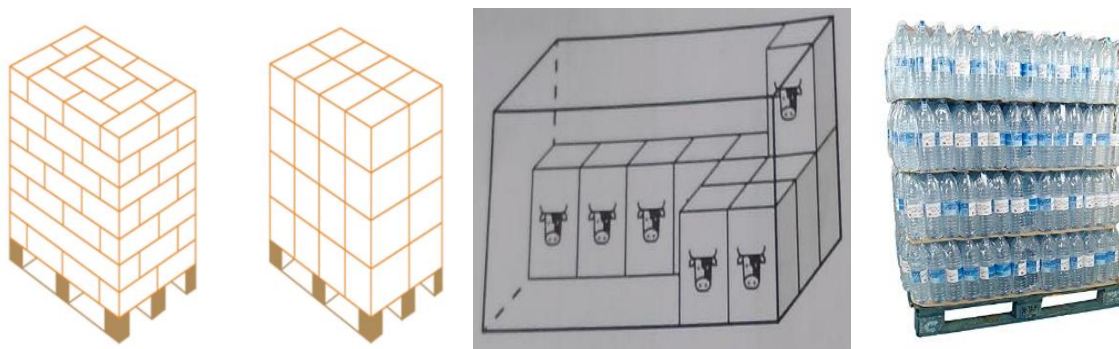
**Estándar Básico de Competencia:** Identifico las relaciones que hay entre las ecuaciones algebraicas y su representación gráfica.

Uso argumentos geométricos en la solución de problemas matemáticos y de otras ciencias.

**DBA:** Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

### ACTIVIDADES

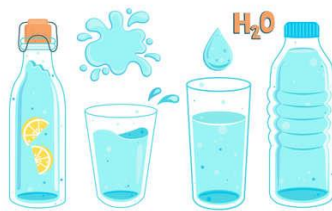
**ACTIVIDAD 1 – Volumen y espacio:** En grupos se hará entrega de una hoja con representaciones de volumen, donde los estudiantes deberán responder cuanto cabe según la representación gráfica.



**ACTIVIDAD 2 – ¿Cuántos caben?:** En parejas se entregará a los estudiantes unas cajas y objetos de diferentes tamaños, deberán acomodarlos de tal manera que puedan introducir la mayor cantidad de objetos posible.

- ¿Qué diferencias hay entre los objetos y las cajas?
- ¿Cómo cabían más?
- ¿Los objetos que forma geométrica tenían?

Al igual que botellas y vasos de diferentes tamaños, con el fin de averiguar cuantos vasos de aguan cabe en la botella.



**ACTIVIDAD 3 – Perspectiva:** En parejas los estudiantes irán pasando donde la docente, quien les mostrará una pirámide o un prisma, hecho con fichas del jenga y deberán decir desde la perspectiva en que lo ven,

- ¿Cuántas fichas lo conforma y por qué?
- ¿Que figura geométrica se forma?



**ACTIVIDAD 4 – Arma prismas:** En parejas se entregarán unas fichas de jenga, donde los estudiantes deberán armar prismas según las indicaciones de la docente, deberán tener en cuenta el volumen de estos.

¿Cuál es la diferencia entre lo que se ve con el objeto en 3D y el dibujo en el tablero?

Teniendo en cuenta que la ficha es rectangular y su base cuadrada es válida a un cubo y su base rectangular es rectangular y su base cuadrada es válida a un cubo y su base rectangular es equivalente a 3 cubos.

### Hoja de trabajo #3

**Fecha de implementación:** 22 noviembre 2023

**Estudiantes:** Grupo 8 – 1

**Docente:** Tatiana Jaramillo Carvajal – Docente en práctica Universidad Católica de Manizales.

El presente instrumento investigativo, está dirigido a los estudiantes del grado 8 – 1 de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Aranzazu Caldas, población en la que se busca integrar el lenguaje algebraico y las representaciones visuales para el aprendizaje de volumen en prismas y pirámides.

**Objetivo:** Implementar unas hojas de trabajo que facilite la comprensión del concepto de volumen de poliedros, integrando el lenguaje algebraico y las representaciones visuales aplicadas a contextos reales.

**Estándar Básico de Competencia:** Identifico las relaciones que hay entre las ecuaciones algebraicas y su representación gráfica.

Uso argumentos geométricos en la solución de problemas matemáticos y de otras ciencias.

**DBA:** Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

### ACTIVIDADES

**ACTIVIDAD 1 – Prismas en la realidad:** Observar los siguientes productos de uso común en los hogares, que tienen forma de prismas, buscar la cantidad de su contenido y analizarlos para responder a las siguientes preguntas.





NARANJA

946 ml



Pañuelo FAMILIA  
triple hoja caja  
pequeña x50 unds



- ¿Cómo es posible que en una caja más pequeña haya mayor cantidad que en la otra?
- ¿Qué tipos de volumen encontramos representados?
- ¿Qué pasa si convierto todos los productos a una sola unidad de medida?
- ¿Qué otros productos conoces que tengan forma de prisma?
- ¿Conoces un producto diferente al prisma cuadrangular o rectangular?

**ACTIVIDAD 2 – Halla capacidad:** Según las imágenes anteriores, selecciona los que tienen volumen, y pasa este volumen a la capacidad correspondiente, realiza operaciones.

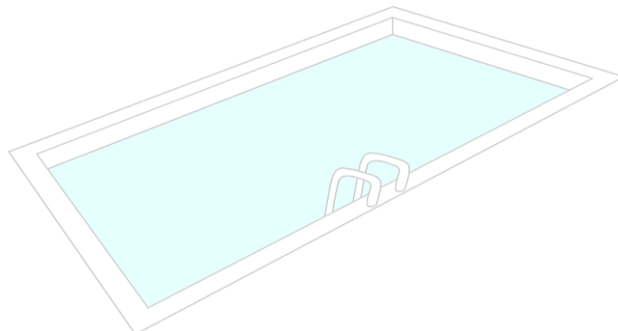
¿Ahora comprendes porque es más pequeño teniendo un número mayor?

¿Cuál es la relación entre volumen y capacidad?

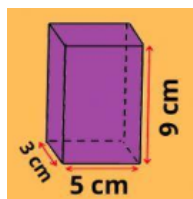
¿Qué relación tienen los productos líquidos con los sólidos?

**ACTIVIDAD 3 – Resolución de problemas:** Lee atentamente los siguientes ejercicios y halla su volumen o capacidad, según la indicación.

- Una piscina tiene 8m de largo, 6m de ancho y 1.5m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de 6€ el metro cuadrado
  - ¿Cuánto costará pintarla?
  - ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla?



2. Calcula el volumen de la siguiente figura.



3. En la casa de Mario hay cuatro closets idénticos al de la imagen, él necesita saber cuál es el volumen de este armario. ¿Cuál es la capacidad de este?



4. José está construyendo una torre y tomo las medidas de su largo, ancho y alto para calcular la capacidad que este tiene. ¿Cuál es el volumen de la torre de José?



5. Enrique encontró un edificio de forma particular en la ciudad, averiguo la información de sus medidas y quiere que le ayudes a calcular su volumen.



## Hoja de trabajo #4

**Fecha de implementación:** 23 noviembre 2023

**Estudiantes:** Grupo 8 – 1

**Docente:** Tatiana Jaramillo Carvajal – Docente en práctica Universidad Católica de Manizales.

El presente instrumento investigativo, está dirigido a los estudiantes del grado 8 – 1 de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Aranzazu Caldas, población en la que se busca integrar el lenguaje algebraico y las representaciones visuales para el aprendizaje de volumen en prismas y pirámides.

**Objetivo:** Implementar unas hojas de trabajo que facilite la comprensión del concepto de volumen de poliedros, integrando el lenguaje algebraico y las representaciones visuales aplicadas a contextos reales.

**Estándar Básico de Competencia:** Identifico las relaciones que hay entre las ecuaciones algebraicas y su representación gráfica.

Uso argumentos geométricos en la solución de problemas matemáticos y de otras ciencias.

**DBA:** Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

## ACTIVIDADES

**ACTIVIDAD 1 – Observar** los siguientes productos de uso común en los hogares, que tienen forma de prismas, buscar la cantidad de su contenido y analizarlos para responder las preguntas:

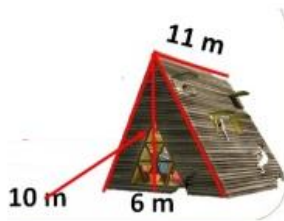


- ¿Qué otros productos conoces que tengan forma de pirámide?
- ¿Conoces un producto diferente a la triangular?
- ¿En qué medidas se presentan los contenidos de los productos presentados?

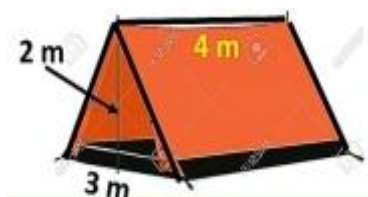


**ACTIVIDAD 2 – Resolución de problemas:** Lee atentamente los siguientes ejercicios y halla su volumen o capacidad, según la indicación.

1. Luisa quiere saber la capacidad de la cabaña de su padre que tiene la forma y las medidas de la imagen. ¿Cuál es su volumen?



2. Sofía compró una tienda de campar con las medidas de la imagen, calcula su capacidad.



3. Paula quiere saber la capacidad del chocolate que cabe dentro del empaque de una chocolatina Toblerone, ella tomó las medidas de la imagen. ¿Cuál es la capacidad?



4. ¿Cuál es el volumen del reloj que compró Karina, sabiendo que tiene la forma y medidas de la imagen?



## Apéndice C. Cuestionario final

### Resultados implementación

**Fecha de implementación:** 24 noviembre 2023

**Estudiantes:** Grupo 8 - 1

**Docente:** Tatiana Jaramillo Carvajal - Docente en práctica Universidad Católica de Manizales.

El presente instrumento, está dirigido a los estudiantes del grado 8 - 1 de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Aranzazu Caldas, población en la que se busca integrar el lenguaje algebraico y las representaciones visuales para el aprendizaje de volumen prismas y pirámides.

**Objetivo:** Analizar los resultados de la estrategia didáctica implementada con los estudiantes del grado octavo para fortalecer el concepto del volumen de poliedros.

**Estándar Básico de Competencia:** Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración.

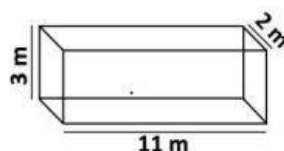
Identifico relaciones entre propiedades gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

**DBA:** Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

➤ Escriba las iniciales de su nombre:

\_\_\_\_\_

1. Marco tiene un estanque para criar truchas que mide 11 metros de largo, 2 metros de ancho y 3 metros de profundidad. ¿Cuál es el volumen del estanque?



- $33 m^3$
- $66 m^3$
- $22 m^3$
- $16 m^3$

2. Roberto es un artesano, y María quiere que le diseñe unos aretes en forma de cubo con medidas de 3 mm por lado ¿Qué cantidad de material usara Roberto?



- $9 mm^2$
- $9 mm^3$
- $27 mm^3$
- $27 mm^2$

3. Sofia compró una caja de chocolates en forma de pirámide, ella quiere saber el volumen de la caja, la mide y obtiene los siguientes datos: Área de la base  $25 cm^2$  y altura 6 cm. ¿Cuál es el volumen?



- $150 cm^3$
- $3750 cm^3$
- $50 cm^3$
- $1250 cm^3$

4. Calcula el volumen de la siguiente pirámide.

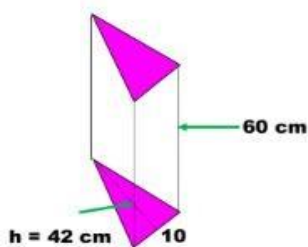
Datos de la base:  
7 lados de 4 cm cada uno  
apotema = 1.8 cm

Datos de la pirámide:  
altura = 14 cm



- 117 cm<sup>3</sup>
- 127,6 cm<sup>3</sup>
- 17,6 cm<sup>3</sup>
- 117,6 cm<sup>3</sup>

5. Relaciona la representación gráfica, con el lenguaje matemático para hallar el volumen:



$$\begin{aligned}
 V &= \hat{a}_b \times h \\
 V &= l^2 \times h \\
 V &= 1.20^2 \times 4 \\
 V &= 1.44 \times 4 \\
 V &= 5.76 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 V &= \hat{a}_b \times h \\
 V &= \frac{(b \times h)}{2} \times h \\
 V &= \frac{(10 \times 42) \times 60}{2} \\
 V &= 210 \times 60 \\
 V &= 12,600 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$



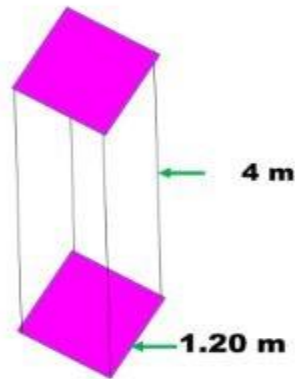
$$\begin{aligned}
 \hat{A}_T &= \hat{a}_L + 2 \hat{a}_b \\
 \hat{A}_T &= 5760 + 2(210) \\
 \hat{A}_T &= 5760 + 420 \\
 \hat{A}_T &= 6180 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \hat{A}_T &= \hat{a}_L + 2 \hat{a}_b \\
 \text{Área}_b &= 2(\text{base} \times \text{altura}) \\
 \text{Área}_b &= 2(1.20 \times 1.20) \\
 \text{Área}_b &= 2(1.44) \\
 \text{Área}_b &= 2.88 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$



6. Relaciona la representación gráfica, con el lenguaje matemático para hallar el volumen:



$\hat{A}_T = \hat{a}_L + 2 \hat{a}_b$

Área<sub>L</sub> = perímetro de la base x altura

Área<sub>L</sub> = p<sub>L</sub> x h

Área<sub>L</sub> = 4(l) x h

Área<sub>L</sub> = 4(1.20) x 4

Área<sub>L</sub> = (4.8) (4)

Área<sub>L</sub> = 19.2 m<sup>2</sup>

A

$V = \hat{a}_b \times h$

$V = l^2 \times h$

$V = 1.20^2 \times 4$

$V = 1.44 \times 4$

$V = 5.76 \text{ m}^3$

B

$\hat{A}_T = \hat{a}_L + 2 \hat{a}_b$

Área<sub>T</sub> = 2 ( base x altura)

Área<sub>T</sub> = 2(1.20 x 1.20)

Área<sub>T</sub> = 2(1.44)

Área<sub>T</sub> = 2.88m<sup>2</sup>

C

$V = \frac{\hat{a}_b \times h}{3}$

$V = \frac{10^2 \times 12}{3}$

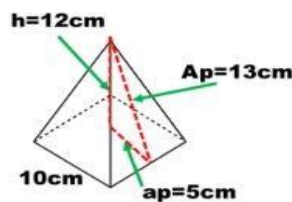
$V = \frac{100 \times 12}{3}$

$V = \frac{1200}{3}$

$V = 400\text{cm}^3$

D

7. Relaciona la representación gráfica, con el lenguaje matemático para hallar el volumen:



$V = \frac{a_b \times h}{3}$ $V = \frac{10^2 \times 12}{3}$ $V = \frac{100 \times 12}{3}$ $V = \frac{1200}{3}$ $V = 400\text{cm}^3$	$V = \frac{a_b \times h}{3}$ $V = \frac{1.307775 \times 3.20}{3}$ $V = \frac{4.18488}{3}$ $V = 1.39496\text{m}^3$
$V = \frac{A_b \times h}{3}$ $V = \frac{15.57 \times 11.7160}{3}$ $V = \frac{182.41812}{3}$ $V = 60.80\text{cm}^3$	$V = a_b \times h$ $V = l^2 \times h$ $V = 1.20^2 \times 4$ $V = 1.44 \times 4$ $V = 5.76 \text{ m}^3$

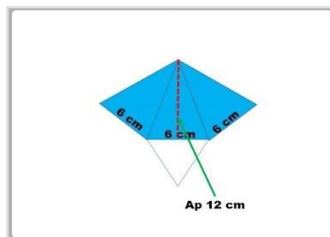
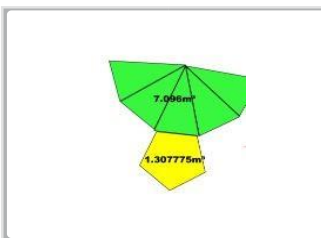
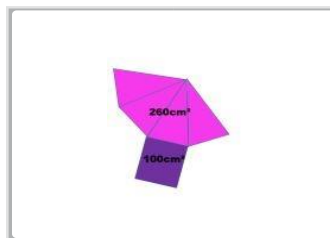
8. Relaciona el lenguaje matemático con la representación gráfica, para hallar el volumen.

$$V = \frac{a_b \times h}{3}$$

$$V = \frac{1.307775 \times 3.20}{3}$$

$$V = \frac{4.18488}{3}$$

$$V = 1.39496\text{m}^3$$



## Apéndice D. Consentimiento informado

Aranzazu Caldas \_\_\_\_ octubre de 2023

### CONSENTIMIENTO INFORMADO

Por medio del presente, yo, \_\_\_\_\_, identificado con cédula de ciudadanía N° \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_, acudiente del estudiante \_\_\_\_\_ del grado 8°1, autorizo que mi acudido participe de manera voluntaria y apoyando el proyecto investigativo denominado: La integración del lenguaje algebraico y las representaciones visuales para el aprendizaje del volumen en prismas y pirámides en estudiantes de grado octavo, propuesta pedagógica de intervención en el aula por la docente en formación Tatiana Jaramillo Carvajal, practicante de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad Católica de Manizales, quien nos informó sobre las intervenciones dentro del aula.

Autorizo registros fotográficos, audiovisuales, grabaciones de vídeos, y demás imágenes que se toman durante la investigación, se puedan difundir y que toda la información obtenida y los resultados de la investigación serán tratados confidencialmente; en virtud de ello, esta información será archivada en papel y/o medio digital, como instrumentos informativos de proyecto de investigación.

Acudiente: \_\_\_\_\_  
C.C: \_\_\_\_\_

Estudiante: \_\_\_\_\_



Universidad<sup>®</sup>  
Católica  
de Manizales

VIGILADA MINEDUCACIÓN

*Obra de Iglesia  
de la Congregación*



Hermanas de la Caridad  
*Dominicas de La Presentación*  
de la Santísima Virgen

*Universidad Católica de Manizales*  
Carrera 23 # 60-63 Av. Santander / Manizales - Colombia  
PBX (6) 8 93 30 50 - [www.ucm.edu.co](http://www.ucm.edu.co)